

Nome completo:

Número de estudante:

---

Este enunciado de teste está escrito nas folhas e versos das folhas. O teste tem 7 questões. Responda apenas ao que lhe é pedido nos lugares indicados para o efeito. Na questão 7 de escolha múltipla, uma resposta certa terá a cotação máxima que lhe for atribuída e uma resposta errada perderá metade dessa cotação.

---

1. Escreva as seguintes expressões usando a notação abreviada de somatório:

(a)  $\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots + \frac{1}{n!}$  ( $n \geq 2$ ). R: \_\_\_\_\_

(b)  $\frac{1}{3!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{3!}$  (20 parcelas). R: \_\_\_\_\_

(c)  $\frac{1}{n} + \frac{2}{n+1} + \frac{3}{n+2} + \cdots + \frac{n+1}{2n}$ . R: \_\_\_\_\_

2. Calcule os seguintes somatórios:

(a)  $\sum_{i=1}^{100} \left( \frac{1}{i+1} - \frac{1}{i} \right)$ .

(b)  $\sum_{i=1}^{10} \sum_{j=1}^{20} 2ij$ .

(c)  $\sum_{i=1}^{10} \sum_{j=1}^{20} (2i+j)$ .

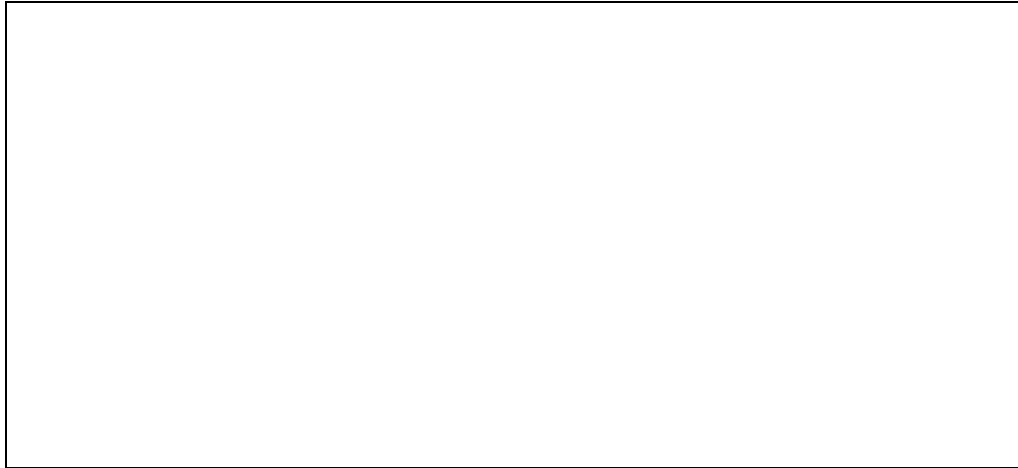
(a)

(b)

(c)

3. Desenhe o grafo que tem matriz de incidência igual a

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$



4. (a) Para que valores de  $n$  é o grafo completo  $K_n$  euleriano?

R.: \_\_\_\_\_

(b) Um grafo simples diz-se **bipartido** se o conjunto dos seus vértices pode ser dividido em dois conjuntos disjuntos  $A$  e  $B$  tais que qualquer aresta do grafo une um vértice de  $A$  a um vértice de  $B$ . O grafo **bipartido completo**  $K_{n,m}$  é um grafo bipartido no qual  $|A| = n$ ,  $|B| = m$  e no qual todo o vértice de  $A$  está ligado a todo o vértice de  $B$  por uma aresta. Desenhe o grafo  $K_{3,5}$ .



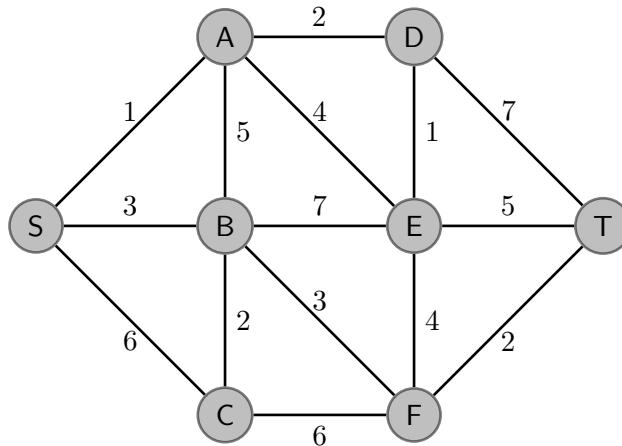
(c) Para que valores de  $n$  e  $m$  é o grafo  $K_{n,m}$  euleriano?

R.: \_\_\_\_\_

(d) Para que valores de  $n$  e  $m$  é o grafo  $K_{n,m}$  uma árvore?

R.: \_\_\_\_\_

5. No grafo



qual é o comprimento do caminho mais curto de  $S$  a  $T$ ? Indique esse caminho.

R.: \_\_\_\_\_

6. Descodifique a mensagem “QOZDMQO”, que foi encriptada com a função

$$f(p) = (3p + 3) \bmod 23,$$

identificando as 23 letras do alfabeto pelos inteiros  $0, 1, 2, \dots, 22$  (como mostra a figura).

|   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | L  | M  | N  | O  | P  | Q  | R  | S  | T  | U  | V  | X  | Z  |
| ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓  | ↓  | ↓  | ↓  | ↓  | ↓  | ↓  | ↓  | ↓  | ↓  | ↓  | ↓  | ↓  |
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 |

R.: \_\_\_\_\_

7. Em cada uma das alíneas seguintes responda com uma das seguintes alternativas:

$$P(8, 3), \overline{P}(8, 3), C(8, 3).$$

Considere uma caixa com 8 bolas numeradas (de 1 a 8). De quantas maneiras diferentes podemos extrair da caixa:

(a) 3 bolas (uma de cada vez, sucessivamente). R.: \_\_\_\_\_

(b) 3 bolas (uma de cada vez, sucessivamente),  
repondo cada bola de novo na caixa, depois de extraída. R.: \_\_\_\_\_

(c) um conjunto de 3 bolas  
(as 3 em simultâneo). R.: \_\_\_\_\_

(d) 3 bolas (uma de cada vez, sucessivamente),  
de modo a que o número de cada bola extraída seja  
estritamente maior que o da bola anteriormente extraída. R.: \_\_\_\_\_