Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra **Estruturas Discretas**

Duração: 1h30m **Teste 2** 15/12/10

SOLUÇÕES

---

1. Escreva as seguintes expressões usando a notação abreviada de somatório:

   (a) $\dfrac{1}{2!}+\dfrac{1}{3!}+\dfrac{1}{4!}+\cdots+\dfrac{1}{n!}$ $(n\geq 2)$. R: $\displaystyle\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{i!}$

   (b) $\dfrac{1}{3!}+\dfrac{1}{3!}+\dfrac{1}{3!}+\cdots+\dfrac{1}{3!}$ (20 parcelas). R: $\displaystyle\sum_{i=1}^{20}\frac{1}{3!}$

   (c) $\dfrac{1}{n}+\dfrac{2}{n+1}+\dfrac{3}{n+2}+\cdots+\dfrac{n+1}{2n}$. R: $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\frac{i+1}{n+i}$

2. Calcule os seguintes somatórios:

   (a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{100}\left(\frac{1}{i+1}-\frac{1}{i}\right)$. (b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{10}\sum_{j=1}^{20}2ij$. (c) $\displaystyle\sum_{i=1}^{10}\sum_{j=1}^{20}(2i+j)$.

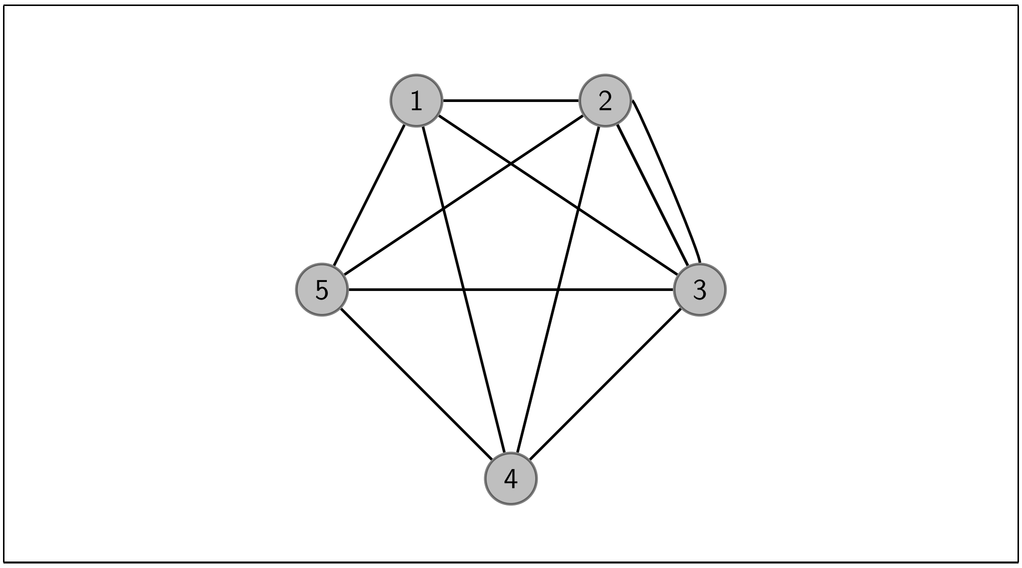
(a) $$\sum_{i=1}^{100}\left(\frac{1}{i+1}-\frac{1}{i}\right)=\left(\frac{1}{2}-1\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{100}-\frac{1}{99}\right)+\left(\frac{1}{101}-\frac{1}{100}\right)=\frac{1}{101}-1=-\frac{100}{101}.$$

(b) $$\sum_{i=1}^{10}\sum_{j=1}^{20}2ij=2\sum_{i=1}^{10}(i\sum_{j=1}^{20}j)=2\Big(\sum_{j=1}^{20}j\Big)\Big(\sum_{i=1}^{10}i\Big)=2\cdot\frac{20\times 21}{2}\cdot\frac{10\times 11}{2}=2\times 210\times 55=23100.$$

(c) $$\sum_{i=1}^{10}\sum_{j=1}^{20}(2i+j)=\sum_{i=1}^{10}\Big(\sum_{j=1}^{20}2i+\sum_{j=1}^{20}j\Big)=\sum_{i=1}^{10}\Big(2i\sum_{j=1}^{20}1+\sum_{j=1}^{20}j\Big)=\sum_{i=1}^{10}(2i\times 20+210)=$$
$$=40\sum_{i=1}^{10}i+\sum_{i=1}^{10}210=40\times 55+2100=4300.$$

3. Desenho o grafo que tem matriz de incidência igual a

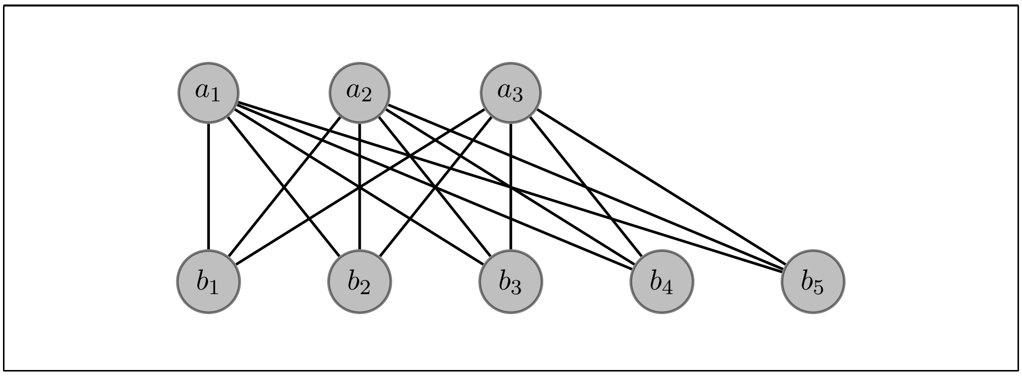
$$\begin{pmatrix}
1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0\\
1&0&0&0&1&1&1&1&0&0&0\\
0&1&0&0&1&0&0&1&1&1&0\\
0&0&1&0&0&1&0&0&1&0&1\\
0&0&0&1&0&0&1&0&0&1&1
\end{pmatrix}.$$



4. (a) Para que valores de n é o grafo completo K_n euleriano?

   R.: Em K_n cada vértice está ligado aos restantes $n-1$ vértices; portanto, o grau de cada vértice é igual a $n-1$ pelo que o grafo é euleriano se e só se $n-1$ é par, isto é, se e só se n é ímpar.

   (b) Um grafo simples diz-se **bipartido** se o conjunto dos seus vértices pode ser dividido em dois conjuntos disjuntos A e B tais que qualquer aresta do grafo une um vértice de A a um vértice de B. O grafo **bipartido completo** $K_{n,m}$ é um grafo bipartido no qual $|A| = n$, $|B| = m$ e no qual todo o vértice de A está ligado a todo o vértice de B por uma aresta. Desenhe o grafo $K_{3,5}$.

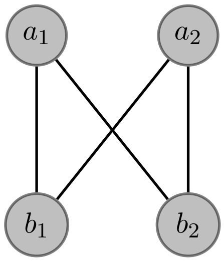


   (c) Para que valores de n e m é o grafo $K_{n,m}$ euleriano?

   R.: Em $K_{n,m}$, o grau de cada vértice $a \in A$ é igual a m e o grau de cada vértice $b \in B$ é igual a n. Assim, o grafo é euleriano se e só se n e m são pares.

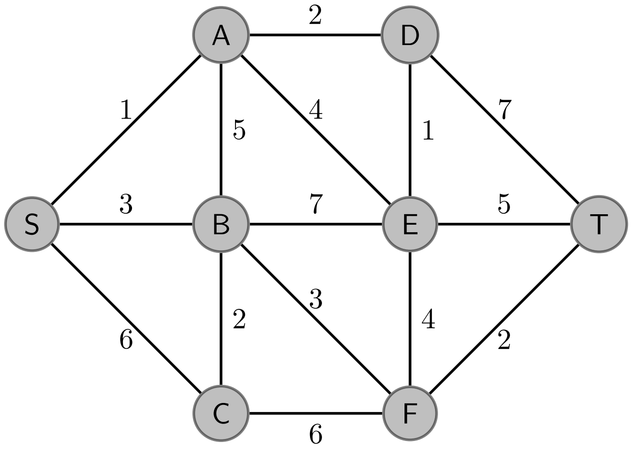
   (d) Para que valores de n e m é o grafo $K_{n,m}$ uma árvore?

   R.: $n = 1$ ou $m = 1$; caso contrário, se $n \geq 2$ e $m \geq 2$ então $K_{n,m}$ contém o ciclo



pelo que não é uma árvore.

5. No grafo



qual é o comprimento do caminho mais curto de S a T? Indique esse caminho.

R.: comprimento: 8; caminho: $S - B - F - T$.

6. Descodifique a mensagem "QOZDMQO", que foi encriptada com a função

$$f(p) = (3p + 3) \text{ mod } 23,$$

identificando as 23 letras do alfabeto pelos inteiros $0, 1, 2, \ldots, 22$ (como mostra a figura).

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	X	Z
$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22

R.: Determinemos a função de desencriptação, inversa de f. De $f(p) = 3p +_{23} 3 = q$, basta determinar o valor de p a partir de q dado. Tem-se então

$$3p +_{23} 3 = q \Leftrightarrow 3 \times_{23} p = q - 3 \Leftrightarrow p = 8 \times_{23} (q - 3) = 8q - 1.$$

Assim, $f^{-1}(Q) = f^{-1}(15) = 8 \times_{23} 15 - 1 = 4 = E$. Continuando, de modo análogo, obtemos $f^{-1}(O) = M$, $f^{-1}(Z) = P$, $f^{-1}(D) = A$, $f^{-1}(M) = T$. A resposta é "EMPATEM".

7. Em cada uma das alíneas seguintes responda com uma das seguintes alternativas:

$$P(8,3),\ \overline{P}(8,3),\ C(8,3).$$

Considere uma caixa com 8 bolas numeradas (de 1 a 8). De quantas maneiras diferentes podemos extrair da caixa:

(a) 3 bolas (uma de cada vez, sucessivamente). R.: $P(8,3)$

(b) 3 bolas (uma de cada vez, sucessivamente),
repondo cada bola de novo na caixa, depois de extraída. R.: $\overline{P}(8,3)$

(c) um conjunto de 3 bolas
(as 3 em simultâneo). R.: $C(8,3)$

(d) 3 bolas (uma de cada vez, sucessivamente),
de modo a que o número de cada bola extraída seja
estritamente maior que o da bola anteriormente extraída. R.: $C(8,3)$