

Lógica elementar

Tarski World

1. Um mundo de Tarski (tridimensional) consiste num tabuleiro de xadrez (8×8) juntamente com figuras geométricas diversas: tetraedros, cubos, e octaedros, dispostas nas casas do tabuleiro. Relativamente a estas figuras consideram-se os seguintes predicados unários, binários e ternários, que descrevem o tamanho, o tamanho relativo e posição relativa:

Predicados unários

| Sentença atómica | Interpretação |
|------------------|---------------------|
| $Tet(a)$ | a é um tetraedro |
| $Cube(a)$ | a é um cubo |
| $Dodec(a)$ | a é um dodecaedro |
| $Small(a)$ | a é pequeno |
| $Medium(a)$ | a é médio |
| $Large(a)$ | a é grande |

Predicados binários

| Sentença atómica | Interpretação |
|-------------------|---|
| $SameSize(a, b)$ | a tem o mesmo tamanho que b |
| $SameShape(a, b)$ | a tem a mesma forma que b |
| $Larger(a, b)$ | a é maior que b |
| $Smaller(a, b)$ | a é menor que b |
| $SameCol(a, b)$ | a está na mesma coluna que b |
| $SameRow(a, b)$ | a está na mesma linha que b |
| $Adjoins(a, b)$ | a e b estão localizados em casas adjacentes (mas não na diagonal) |
| $LeftOf(a, b)$ | a está numa coluna à esquerda de b |
| $RightOf(a, b)$ | a está numa coluna à direita de b |
| $FrontOf(a, b)$ | a está numa linha à frente de b |
| $BackOf(a, b)$ | a está numa linha atrás de b |

Predicados ternários

| Sentença atómica | Interpretação |
|--------------------|---|
| $Between(a, b, c)$ | a, b e c estão na mesma coluna, linha ou diagonal, e a está entre b e c . |

- (a) Para se familiarizar com o Tarski World abra-o e carregue os ficheiros Wittgenstein's World e Wittgenstein's Sentences (na pasta TW Exercises). Nestes ficheiros verá um

mundo de blocos geométricos e uma lista de sentenças atômicas (algumas delas têm comentários). Percorra essa lista e tente calcular mentalmente o correspondente valor lógico nesse mundo. Use o botão **Verify** para verificar se a sua resposta está correcta ou não. Se ficar surpreendido por alguma resposta, tente ver porque errou, comparando a sua interpretação do predicado com a definição exacta do predicado.

- (b) Em seguida, mude o mundo de Wittgenstein de diversas maneiras, alterando os objectos e as suas posições, observando o que acontece ao valor lógico das diversas sentenças.

[Objectivo: ajudá-lo a memorizar a interpretação de cada um dos predicados do **Tarski World**; só deverá avançar depois de dominar bem a lista de predicados e as suas interpretações.]

2. Determine o valor lógico das afirmações seguintes relativas ao mundo

| | | | | | | | |
|---|---|---------------|---------------|---------------|--|---------------|---|
| | | | | ★ <i>a</i> | | | |
| | | | | | | | ▽ |
| | | ▽ <i>d</i> | | | | | |
| | | | | | | | |
| ▽ | | | □ <i>c</i> | | | ★ <i>b</i> | |
| | □ | | | | | | |
| | | | | □ | | | ★ |
| | | ▽ | | | | | ★ |

Estrela Pequena: ★

Estrela Média: ★

Estrela Grande: ★

Quadrado Pequeno: □

Quadrado Médio: □

Quadrado Grande: □

Triângulo Pequeno: ▽

Triângulo Médio: ▽

Triângulo Grande: ▽

- | | V | F |
|--|----------|----------|
| (a) $Estrela(a) \wedge \neg Grande(a)$ | | |
| (b) $\forall x(\neg Estrela(x) \rightarrow Quadrado(c))$ | | |
| (c) $\exists y \forall x (Triângulo(x) \rightarrow MaisPequeno(x, y))$ | | |
| (d) $\forall x (Pequeno(x) \rightarrow \exists y (x \neq y \wedge MesmaColuna(x, y)))$ | | |

3. Construa um mundo no qual as seguintes sentenças sejam simultaneamente verdadeiras:
 $Tet(a)$, $Medium(a)$, $Dodec(b)$, $Cube(c)$, $FrontOf(a, b)$, $Between(a, b, c)$, $a = d$, $Larger(a, b)$, $Smaller(a, c)$, $LeftOf(b, c)$.
4. Abra os ficheiros **Lestrade's Sentences** e **Lestrade's World**. Reparará que nenhum dos objectos neste mundo tem nome. Atribua nomes aos objectos de modo que todas as sentenças na lista se tornem verdadeiras.

5. Observe a diferença entre os predicados *Larger* e *BackOf*: um determinado cubo a ser maior ou não que outro cubo b é um facto óbvio, de resposta precisa, independente da perspectiva com que olhemos para o mundo; mas saber se a está atrás de b já depende da perspectiva: se rodarmos o mundo 90° , a resposta poderá mudar.

Abra os ficheiros *Austin's Sentences* e *Wittgenstein's World*.

- (a) Determine o valor lógico das sentenças neste mundo e confira que são os seguintes:

| | Original | Rodado 90° | Rodado 180° | Rodado 270° |
|----|----------|-------------------|--------------------|--------------------|
| 1. | F | | | |
| 2. | F | | | |
| 3. | V | | | |
| 4. | F | | | |
| 5. | V | | | |
| 6. | F | | | |

- (b) Rode o mundo 90° e torne a avaliar as sentenças, juntando os resultados à tabela. Repita o processo até dar uma volta completa.
- (c) Junte uma sétima sentença à lista com o seguinte padrão: V F V F .
- (d) Existem sentenças atómicas nesta linguagem que produzam uma linha com o padrão F V F F ?
- (e) Existem sentenças atómicas nesta linguagem que produzam uma linha com exactamente três V ?
6. Para simplificar, representaremos um mundo de Tarski na folha de papel (bidimensional) num tabuleiro de xadrez (8×8) com quadrados (representarão os cubos), triângulos (representarão os tetraedros), e estrelas (representarão os dodecaedros), dispostos nas casas do tabuleiro¹. Por exemplo:

O mundo de Wittgenstein

| | | | | | | | |
|---|----------|--|----------|----------|--|---|----------|
| | □ d | | | ★ e | | | ▽ f |
| | | | | | | | |
| | | | | | | | |
| | | | | | | | |
| ▽ | | | □ c | | | ★ | |
| | | | | | | | |
| | ▽ a | | | □ b | | | ★ |
| | | | | | | | |

¹Identificaremos também os predicados pelo seu nome em português; para *Between*(a, b, c) usaremos $B(a, b, c)$.

(a) Quais das sentenças seguintes são verdadeiras no mundo de Wittgenstein?

1. $Triângulo(f) \wedge Pequeno(f)$.
2. $Triângulo(f) \wedge Grande(f)$.
3. $Triângulo(f) \wedge \neg Pequeno(f)$.
4. $Triângulo(f) \wedge \neg Grande(f)$.
5. $\neg Triângulo(f) \wedge \neg Pequeno(f)$.
6. $\neg Triângulo(f) \wedge \neg Grande(f)$.
7. $\neg(Triângulo(f) \wedge Pequeno(f))$.
8. $\neg(Triângulo(f) \wedge Grande(f))$.
9. $\neg(\neg Triângulo(f) \wedge \neg Pequeno(f))$.
10. $\neg(\neg Triângulo(f) \wedge \neg Grande(f))$.
11. $Esquerda(a, c) \vee Esquerda(c, b) \vee \neg B(c, a, b)$.
12. $\neg\neg(Acima(e, b) \wedge \neg Abaixo(c, b))$.
13. $Acima(d, a) \wedge Esquerda(d, e) \wedge Abaixo(b, e) \wedge B(c, d, b)$.
14. $MaisPequeno(c, e) \vee \neg(Quadrado(a) \vee Quadrado(d))$.
15. $\neg(\neg Estrela(e) \vee \neg\neg Triângulo(f))$.

(b) Qual é o número máximo de sentenças que pode tornar verdadeiras num só mundo mudando o tamanho ou a forma de f (ou ambos)?

7. Construa um mundo em que todas as sentenças seguintes são verdadeiras:

- (a) $Dodecaedro(a) \wedge Cubo(b)$.
- (b) $Abaixo(b, a) \wedge Esquerda(d, b) \wedge Acima(f, d) \wedge Direita(a, f)$.
- (c) $Tetraedro(c) \wedge Tetraedro(e) \wedge Esquerda(c, d)$.
- (d) $\neg Esquerda(c, e) \wedge \neg Esquerda(e, c)$.
- (e) $B(d, b, c) \wedge \neg B(d, c, a)$.
- (f) $\neg Cubo(b) \vee (Cubo(d) \wedge Acima(d, b))$.
- (g) $(Pequeno(c) \wedge Abaixo(c, b)) \vee Cubo(d)$.
- (h) $Maior(f, a) \wedge Maior(a, b)$.
- (i) $\neg(MaisPequeno(c, a) \vee MaisPequeno(a, c))$.
- (j) $Maior(d, b) \wedge Maior(f, d) \wedge \neg(Maior(e, d) \vee Maior(d, e))$.

8. Considere as premissas seguintes:

1. $Tetraedro(b)$.
2. $Cubo(c)$.
3. $Maior(c, b) \vee (b = c)$.

(a) Determine se cada uma das sentenças seguintes é consequência tautológica das premissas dadas, justificando cuidadosamente as suas respostas:

- (i) $MaisPequeno(b, c)$.
- (ii) $Maior(c, b) \vee (Tetraedro(b) \wedge b = c)$.
- (iii) $\neg(Maior(c, b) \wedge \neg Maior(c, b))$.

- (b) Considerando a interpretação usual, no mundo de Tarski, dos predicados considerados, determine se a sentença

$$(Tetraedro(b) \wedge Pequeno(b)) \vee (Cubo(c) \wedge Médio(c))$$

é consequência lógica das premissas consideradas. Em caso afirmativo, justifique cuidadosamente a sua resposta. Se não for, construa um mundo — recorrendo ao software Tarski World — no qual as premissas sejam verdadeiras e a conclusão seja falsa.

9. Diga em que casos as “conclusões” são consequências lógicas das premissas. Para cada caso em que isso não aconteça, construa um mundo (isto é, um *contra-exemplo*) no qual as premissas sejam verdadeiras e a conclusão falsa.
- (a) Premissa: *Esquerda*(a, b). Conclusão: *Direita*(b, a).
- (b) Premissas: *Esquerda*(a, b), $b = c$. Conclusão: *Direita*(c, a).
- (c) Premissas: *Esquerda*(a, b), *Direita*(c, a). Conclusão: *Esquerda*(b, c).
- (d) Premissas: *Trás*(a, b), *Frente*(a, c). Conclusão: *Frente*(b, c).
- (e) Premissas: $B(b, a, c)$, *Esquerda*(a, c). Conclusão: *Esquerda*(a, b). (Recorde que $B(b, a, c)$ significa que b está entre a e c , na mesma fila.)
10. (a) Descreva cada uma das propriedades seguintes do mundo de Boole, com sentenças da linguagem de primeira ordem do Tarski (use os predicados referidos em exercícios anteriores):
1. f não está abaixo de a .
 2. f está à direita de a e à esquerda de b .
 3. f está acima ou é mais pequeno do que a .
 4. e e d estão ambos entre c e a .
 5. Nem e nem d são maiores que c .
 6. c nem é maior nem é mais pequeno do que e .
 7. c é mais pequeno do que a , mas maior do que e .
 8. c está abaixo de a ; além disso, é mais pequeno do que f .

O mundo de Boole

| | | | | | | | |
|--|----------|----------|----------|--|----------|----------|----------|
| | | | | | | ★ f | |
| | | | | | | | |
| | | | | | ∇ a | | ∇ b |
| | | | ★ d | | | | |
| | | ★ e | | | | | |
| | ∇ c | | | | | | |
| | | | | | | | |

- (b) Neste mundo apenas uma das frases seguintes é verdadeira. Qual? Traduza essa frase para a linguagem da lógica de primeira ordem.
1. a é pequeno ou c e d são ambos grandes.
 2. d e e estão ambos acima de b .
 3. d e e estão ambos acima de b e não são maiores do que ele.
 4. d e c são quadrados; além disso, nenhum deles é médio.
 5. Nem e nem a estão à direita de c nem à esquerda de b .
 6. e não é grande ou está acima de a .
 7. c nem está entre a e b nem está abaixo deles.
 8. a e e são ambos triângulos, ou a e f são-no ambos.
 9. c está entre d e f ou é mais pequeno do que os dois.

11. Determine o valor lógico das sentenças seguintes no mundo de Wittgenstein (Exercício 10).

- (a) $(Triângulo(a) \wedge Quadrado(c)) \rightarrow Estrela(d)$.
- (b) $Quadrado(c) \rightarrow (Grande(c) \rightarrow (Quadrado(c) \wedge Grande(c)))$.
- (c) $\neg(Triângulo(a) \rightarrow Grande(a)) \rightarrow (Triângulo(a) \wedge \neg Grande(a))$.
- (d) $\neg(Grande(a) \leftrightarrow Pequeno(b))$.
- (e) $[Pequeno(c) \wedge (Quadrado(a) \vee Quadrado(d))] \leftrightarrow [(Pequeno(c) \wedge Quadrado(a)) \vee (Pequeno(c) \wedge Quadrado(d))]$.
- (f) $Quadrado(a) \leftrightarrow (Quadrado(c) \leftrightarrow Grande(c))$.