Contagem

1. Quantas cadeias de bits de comprimento sete existem?

2. Quantas funções existem de um conjunto com m elementos para um conjunto de n elementos? Quantas delas são injectivas?

3. Qual é o valor de k após o seguinte algoritmo ter sido executado?

```
k := 0
for i_1 := 1 to 10
   for i_2 := 1 to 100
      for i_3 := 1 to 1000
         k := k + 1
```

4. Numa determinada linguagem de computação, o nome das variáveis é uma palavra com um ou dois caracteres alfanuméricos, onde as letras maiúsculas e minúsculas não são distinguidas (um caracter *alfanumérico* é uma das 26 letras do alfabeto inglês ou um dos 10 algarismos). Além disso, o nome deve começar por uma letra e deve ser diferente de cinco cadeias de dois caracteres reservados para comandos de programação. Com quantas variáveis diferentes poderemos trabalhar?

5. A *password* de um computador é formada por uma letra seguida de 3 ou 4 algarismos. Qual é o número total de *passwords* que é possível formar?

6. Dizemos que um número é *equilibrado* caso um dos seus algarismos seja a média dos outros. Quantos números equilibrados de 3 algarismos existem?

7. A um número como 19977991, que lido da direita para a esquerda, coincide com o número original, chama-se *capicua*. Quantas capicuas de 7 algarismos, com 4 algarismos diferentes, existem?

8. Chamemos *número simples* a um número inteiro positivo formado apenas pelos algarismos 1 ou 2 (ou ambos). Quantos números simples existem, inferiores a um milhão?

9. De quantas maneiras podemos seleccionar 4 jogadores, a partir de uma equipa de 10 jogadores, para jogarem 4 jogos de ténis, sendo os jogos ordenados?

10. Calcule o número de equipas de 8 jogadores que é possível formar com 3 portugueses e não mais do que 2 brasileiros, escolhidos entre 10 portugueses, 10 brasileiros e 10 espanhóis.

11. Dados n pontos numa circunferência, quantos polígonos de p lados ($p \leq n$) é possível formar com tais pontos?

12. Quantos números de 3 algarismos se podem formar com os algarismo 1,2,3,4,5,6:

    (a) sem repetição de algarismos? (b) podendo haver repetição de algarismos?

    (c) de modo que sejam pares? (d) de modo que sejam pares e constituídos por algarismos distintos?

13. Se os conjuntos A e B têm, respectivamente, 6909 e 1107 elementos, e $A \cap B$ tem 225 elementos, quantos elementos possui $A \cup B$?

14. Calcule o cardinal do conjunto S, sabendo que os conjuntos $S \cup T$, T e $S \cap T$ têm, respectivamente, 36, 19 e 8 elementos.

15. O Clube Pitágoras tem 100 sócios do sexo feminino e 80 sócios do sexo masculino. O Clube Euclides tem 80 sócios do sexo feminino e 100 sócios do sexo masculino. Existem exactamente 60 raparigas que são sócias de ambos os clubes. O número total de pessoas que pertencem a pelo menos um dos clubes é igual a 230. Quantos rapazes são sócios do Clube Pitágoras e não são sócios do Clube Euclides?

16. Qual é a probabilidade de um inteiro entre 1 e 10000, escolhido ao acaso, não ser quadrado perfeito nem cubo perfeito?

17. Uma pessoa escreveu 5 cartas diferentes a 5 amigos e fechou-as nos envelopes sem reparar que os envelopes já tinham os endereços escritos. Qual é a probabilidade de:

    (a) nenhuma carta corresponder ao envelope onde foi colocada?

    (b) exactamente 2 amigos receberem as cartas que lhes eram destinadas?

18. Seja $a_{n+1} - ca_n = 0$ $(n \geq 0)$ uma relação de recorrência. Sabendo que $a_3 = 153/49$ e $a_5 = 1377/2401$, determine c.

19. Suponha que tem um robô capaz de dar passos de um ou de dois metros. Exprima por meio de uma relação de recorrência o número p_n de modos diferentes que o robô possui para percorrer n metros.

20. Uma pessoa deposita 1000 Euros numa conta a prazo, com juro anual de 4%.

    (a) Determine uma relação de recorrência para o valor existente na conta ao fim de n anos.

    (b) Determine uma fórmula explícita para esse valor.

    (c) Quanto dinheiro terá a conta ao fim de 100 anos?

21. Recorde que a sucessão de Fibonacci se define recursivamente por: $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, e $f(n) = f(n-1) + f(n-2)$ para $n \geq 2$.

    (a) Determine $f(3)$.

    (b) Mostre que para todo o $n \geq 1$ se verifica a igualdade $f(4n) = 3f(4n-3) + 2f(4n-4)$.

    (c) Prove, usando o princípio de indução matemática, que $f(4n)$ é múltiplo de 3 para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

22. Num determinado algoritmo, o valor de uma variável s vai variando de acordo com a seguinte regra: em cada passo n $(n \geq 2)$, o valor de s (que denotamos por s_n) é igual ao dobro do valor de s dois passos antes menos o valor de s no passo anterior.

    (a) Sabendo que $s_0 = 1$ e $s_1 = 2$, enumere os primeiros 6 valores da sequência $(s_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$.

    (b) Determine (de forma explícita) o valor de s_n para qualquer n.

    (c) E se $s_0 = s_1 = 1$, qual é o valor de s_n?

23. Determine a solução de cada uma das seguintes relações de recorrência:

    (a) $a_{n+1} - 1.5a_n = 0$, $n \geq 0$.

    (b) $3a_{n+1} - 4a_n = 0$, $n \geq 0$, $a_1 = 5$.

    (c) $a_n = 7a_{n-1}$, $n \geq 1$, $a_2 = 98$.

    (d) $2a_n - 3a_{n-1} = 0$, $n \geq 1$, $a_4 = 81$.

    (e) $a_n = 3a_{n-2} + 2a_{n-3}$, $n \geq 3$, $a_0 = 1$, $a_1 = 3$, $a_2 = 7$.

    (f) $a_n - 6a_{n-1} + 9a_{n-2} = 0$, $n \geq 2$, $a_0 = 5$, $a_1 = 12$.

24. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja a_n o número de sequências ordenadas com elementos iguais a 1 ou 2 cuja soma é igual a n. Determine a_n para qualquer $n \in \mathbb{N}$.