

Justifique convenientemente as suas respostas e indique os principais cálculos.
 Na questão **2**, cada resposta certa tem a cotação total atribuída e cada resposta errada perde metade desse valor.

Duração: 2h30m

1. (a) Calcule a tabela de verdade da fórmula $a \wedge \neg(a \wedge b) \wedge \neg b$.
 (b) Indique se se trata de uma tautologia, contingência ou contradição.
 (c) Indique se se trata de uma fórmula logicamente equivalente a $a \wedge \neg b$.

2. Indique o valor lógico (**V**: verdade; **F**: falso) das seguintes seis sentenças nos mundos A e B da figura em baixo:

Sentenças	Mundo A	Mundo B
$SameShape(a, b) \vee Large(a)$		
$Cube(b) \rightarrow RightOf(b, a)$		
$\forall x((Cube(x) \wedge LeftOf(x, b)) \rightarrow Small(x))$		
$\exists x \exists y(x \neq y \wedge Small(x) \wedge Small(y))$		
$\exists x \forall y(x \neq y \rightarrow RightOf(y, x))$		
$\exists x(Cube(x) \wedge \forall y(Dodec(y) \rightarrow \exists z(LeftOf(x, z) \wedge LeftOf(z, y))))$		

Mundo A

Mundo B

Tetraedro Pequeno	Cubo Pequeno	Dodecaedro Pequeno
Tetraedro Médio	Cubo Médio	Dodecaedro Médio
Tetraedro Grande	Cubo Grande	Dodecaedro Grande

$RightOf(a, b)$: a está numa coluna à direita de b . $SameShape(a, b)$: a tem a mesma forma de b .

3. Escreva as seguintes expressões usando a notação abreviada de somatório:

(a) $3 + 5 + 11 + 29 + \dots + (2 + 3^n)$.

(b) $\frac{1}{4}x^5 + \frac{1}{6}x^7 + \frac{1}{8}x^9 + \frac{1}{10}x^{11} + \frac{1}{12}x^{13} + \frac{1}{14}x^{15} + \frac{1}{16}x^{17}$.

(c) $x + \frac{1}{2x} + 3x + \frac{1}{4x} + 5x + \frac{1}{6x} + 7x + \frac{1}{8x} + 9x + \frac{1}{10x}$.

4. Prove que para todos os números naturais n se tem

$$\sum_{i=1}^n (3i - 2) = \frac{n(3n - 1)}{2}$$

(a) usando propriedades dos somatórios.

(b) usando indução matemática.

5. Considere o grafo completo K_n com n vértices.

(a) Quantas arestas tem K_n ?

(b) Para que valores de n é K_n euleriano?

6. (a) Determine todas as soluções inteiras da congruência linear $4x \equiv_{23} 1$.

(b) Descodifique a mensagem “F H B A H U E S”, que foi encriptada com a função

$$f(p) = (4p + 1) \bmod 23,$$

identificando as 23 letras do alfabeto pelos inteiros $0, 1, 2, \dots, 22$ (como mostra a figura).

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	X	Z
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22

7. (a) Quantos números naturais com 4 algarismos, todos distintos, existem? Quantos deles são pares?

(b) Em quantos zeros termina o número $n = 50!$ (factorial de 50)? (isto é, sendo a o algarismo não nulo de n mais à direita, quantos zeros existem à direita de a ?)

(c) De quantas maneiras diferentes podemos distribuir 7 bolas iguais por 4 caixas etiquetadas (A, B, C, D) ?

Nota: não é obrigatório que todas as caixas fiquem com bolas, algumas podem ficar vazias.

8. Considere o seguinte algoritmo:

```

Procedure var (n: inteiro positivo)
var := 0
for  $i_1 := 1$  to  $n$ 
  for  $i_2 := 1$  to  $i_1$ 
    for  $i_3 := 1$  to  $i_2$ 
      for  $i_4 := 1$  to  $i_3$ 
        for  $i_5 := 1$  to  $i_4$ 
          var := var + 1
    
```

Calcule $var(5)$ e determine uma fórmula geral para $var(n)$, $n \in \mathbb{N}$.
