1. (a)

a	b	a	$\wedge$	$\neg$	$(a \wedge b)$	$\wedge$	$\neg b$
V	V		F	F	V	F	F
V	F		V	V	F	V	V
F	V		F	V	F	F	F
F	F		F	V	F	F	V

(b) Trata-se de uma contingência, pois toma valores lógicos verdadeiros e falsos.

(c) Sim, porque têm a mesma tabela de verdade:

a	b	$a \wedge \neg b$
V	V	F
V	F	V
F	V	F
F	F	F

Solução alternativa: Sim, pois

$$a \wedge \neg(a \wedge b) \wedge \neg b \equiv a \wedge \neg b \wedge (\neg a \vee \neg b) \equiv (a \wedge \neg b \wedge \neg a) \vee (a \wedge \neg b \wedge \neg b) \equiv \mathsf{F} \vee (a \wedge \neg b) \equiv a \wedge \neg b.$$

2.

Sentenças	**Mundo A**	**Mundo B**
$SameShape(a,b) \vee Large(a)$	V	V
$Cube(b) \rightarrow RightOf(b,a)$	V	F
$\forall x((Cube(x) \wedge LeftOf(x,b)) \rightarrow Small(x))$	F	V
$\exists x \exists y(x \neq y \wedge Small(x) \wedge Small(y))$	V	F
$\exists x \forall y(x \neq y \rightarrow RightOf(y,x))$	V	F
$\exists x(Cube(x) \wedge \forall y(Dodec(y) \rightarrow \exists z(LeftOf(x,z) \wedge LeftOf(z,y))))$	F	V

3. (a) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}(2+3^i)$.

(b) $\displaystyle\sum_{i=2}^{8}\frac{1}{2i}\,x^{2i+1}$.

(c) $\displaystyle\sum_{i=1}^{10}(ix)^{[(-1)^{i+1}]}$. Solução alternativa: $\displaystyle\sum_{i=1}^{5}\left[(2i-1)x+\frac{1}{2ix}\right]$.

4. (a)

$$\sum_{i=1}^{n}(3i-2) = \sum_{i=1}^{n}(3i) - \sum_{i=1}^{n}2 = 3\sum_{i=1}^{n}i - 2n$$
$$= 3\frac{n(n+1)}{2} - 2n = \frac{3n(n+1)-4n}{2} = \frac{n(3n-1)}{2}.$$

(b) Seja $P(n)$ a proposição $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(3i-2) = \frac{n(3n-1)}{2}$. Teremos que mostrar que

- $P(1)$ é V, e
- A implicação $P(n) \to P(n+1)$ é V para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

Quanto a $P(1)$ é evidente: $3-2 = \dfrac{(3-1)}{2}$ é claramente uma proposição verdadeira.
Seja então n um natural arbitrário e suponhamos que $P(n)$ é V (*hipótese de indução* HI).
Teremos que mostrar que nessas condições também $P(n+1)$ é V, ou seja,

$$\sum_{i=1}^{n+1}(3i-2) = \frac{(n+1)[3(n+1)-1]}{2}:$$

De facto,

$$\sum_{i=1}^{n+1}(3i-2) = \sum_{i=1}^{n}(3i-2)+[3(n+1)-2] \overset{\text{HI}}{=} \frac{n(3n-1)}{2}+3n+1 = \frac{n(3n-1)+6n+2}{2} = \frac{3n^2+5n+2}{2}$$

e, por outro lado,

$$\frac{(n+1)[3(n+1)-1]}{2} = \frac{(n+1)(3n+2)}{2} = \frac{3n^2+5n+2}{2}.$$

5. (a) Cada vértice está ligado a todos os restantes $n-1$ vértices (o que dá $n-1$ arestas). Sendo n vértices no total, existirão

$$\frac{n(n-1)}{2} \text{ arestas}$$

(porque deste modo cada aresta é contada 2 vezes).

<u>Solução alternativa</u>: Cada aresta de K_n corresponde a um subconjunto de 2 elementos do conjunto dos n vértices. Portanto, o número de arestas é igual ao número de subconjuntos binários do conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$, ou seja,

$$C(n,2) = \frac{n!}{2!\,(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

(b) Pela alínea anterior, o grau de cada vértice é igual a $n-1$. Logo, pelo Teorema de Euler, K_n é euleriano se e só se $n-1$ é par, isto é, n é ímpar.

6. (a) Como $6 \times_{23} 4 = 1$, então

$$\begin{aligned} 4x \equiv_{23} 1 \quad &\Leftrightarrow \quad 6 \times_{23} 4 \times_{23} x \equiv_{23} 6 \times_{23} 1 \\ &\Leftrightarrow \quad x \equiv_{23} 6. \end{aligned}$$

Portanto, as soluções para x são os inteiros da forma $6 + 23k$ ($k \in \mathbb{Z}$).

(b) Cálculo da função de desencriptação (usando a questão anterior):

$$q = f(p) = (4p+1) \bmod 23 \Leftrightarrow q \equiv_{23} 4p+1 \Leftrightarrow 6q \equiv_{23} 6(4p+1) = p+6 \Leftrightarrow p \equiv_{23} 6q-6.$$

Portanto, $f^{-1}(q) = 6(q-1) \bmod 23$. Logo:

$f^{-1}(F) = f^{-1}(5) = 24 \bmod 23 = 1 = \mathbf{B}$, $\quad f^{-1}(H) = f^{-1}(7) = 36 \bmod 23 = 13 = \mathbf{O}$,

$f^{-1}(B) = f^{-1}(1) = 0 \bmod 23 = 0 = \mathbf{A}$, $\quad f^{-1}(A) = f^{-1}(0) = -6 \bmod 23 = 17 = \mathbf{S}$,

$f^{-1}(U) = f^{-1}(19) = 108 \bmod 23 = 16 = \mathbf{R}$, $\quad f^{-1}(E) = f^{-1}(4) = 18 \bmod 23 = 18 = \mathbf{T}$,

$f^{-1}(S) = f^{-1}(17) = 96 \bmod 23 = 4 = \mathbf{E}$.

Mensagem original: **B O A S O R T E**!

7. (a) O algarismo dos milhares pode ser escolhido de 9 maneiras distintas, pois não pode ser igual a 0. O algarismo das centenas pode ser escolhido de 9 maneiras, pois não pode ser igual ao primeiro algarismo. O terceiro algarismo, das dezenas, pode ser escolhido de 8 maneiras, pois não pode ser igual ao primeiro e segundo algarismos, e, finalmente, o algarismo das unidades pode ser escolhido de 7 maneiras distintas. Assim, pelo princípio da multiplicação, a resposta é

$$9 \times 9 \times 8 \times 7 = 4536.$$

Quanto aos números que são pares:

Há 5 maneiras de escolher o algarismo das unidades. Note que agora começamos por este algarismo, que é o mais restrito: só pode ser 0,2,4,6 ou 8. Em seguida, vamos ao primeiro algarismo, dos milhares. De quantas maneiras se pode escolher este algarismo? A resposta é "depende": se não tivermos usado o 0 nas unidades, haverá 8 maneiras de escolher o primeiro algarismo, pois não poderemos usar nem o 0 nem o algarismo já usado na última posição; se já tivermos usado o 0, haverá 9 maneiras de escolher o primeiro algarismo, pois apenas o 0 não poderá ser usado na primeira posição. Para ultrapassar este impasse, separemos os números em dois conjuntos:

$$- - - \overset{0}{-} \quad \text{e} \quad - - - \overset{\neq 0}{-}\ .$$

Os da esquerda são em número de $9 \times 8 \times 7$ enquanto os da direita são em número de $4 \times 8 \times 8 \times 7$ (raciocinando a partir da última posição, passando depois para a primeira e em seguida para as segunda e terceira). Portanto, existem

$$9 \times 8 \times 7 + 4 \times 8 \times 8 \times 7 = 41 \times 8 \times 7 = 2296$$

números pares.

<u>Cuidado</u>: Poderia haver a tentação de dizer que metade dos números são pares e a outra metade são ímpares mas a resolução acima mostra que isso não é verdade (pois 41 não é a metade de 9×9): dos 4536, 2296 são pares, pelo que 2240 são ímpares.

Porque será que há menos 56 ímpares que pares?...

<u>Solução alternativa</u>: Seria muito mais fácil calcular primeiro o número de ímpares e depois, por complementação, o número de pares:

$$\begin{array}{cccc} 9 & 9 & 9 & 9 \\ 8 & 8 & 8 & 7 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ - & - & - & - \end{array}$$

Começando pela última posição, depois pela primeira e em seguida pelas segunda e terceira, concluímos que existem $5 \times 8 \times 8 \times 7 = 40 \times 8 \times 7$ ímpares. Logo, existem $(81-40) \times 8 \times 7 = 41 \times 8 \times 7$ pares.

(b) Se um número natural n, na sua representação decimal

$$\underset{-}{a_t}\ \cdots\ \underset{-}{a_2}\,\underset{-}{a}\ \underbrace{\underset{-}{0}\,\underset{-}{0}\ \cdots\ \underset{-}{0}\,\underset{-}{0}}_{k}$$

tiver k algarismos nulos à direita do último algarismo não nulo a, é porque é da forma

$$(a_t \cdots a_2 a) \times 10^k.$$

Portanto, o número k de zeros é igual ao número de vezes que $10 = 5 \times 2$ divide n. Basta então ver quantos pares '5×2' existem na factorização prima de

$$n = 50! = 50 \times 49 \times \cdots \times 3 \times 2.$$

Como existem claramente mais '2' que '5' na factorização, basta calcular o número de cincos. Mas estes só aparecem dentro dos factores $5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50$ (mas, cuidado: em 25 e 50 aparecem em duplicado). Portanto, existem $10 + 2 = 12$ cincos na factorização prima de $50!$.

Em conclusão, $k = 12$ (pelo que $50!$ é um natural da forma $?? \cdots ??\,000\,000\,000\,000$).

(c) Pensemos numa distribuição qualquer das 7 bolas pelas 4 caixas, como, por exemplo,

$$\underbrace{\bigcirc\qquad\qquad\qquad}_{\text{A}}\quad \underbrace{\bigcirc\qquad\qquad\qquad}_{\text{B}}\quad \underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{\text{C}}\quad \underbrace{\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\qquad}_{\text{D}} \qquad (*)$$

Podemos simplesmente representar esta distribuição na forma de uma sequência de comprimento 10, formada por 7 bolas e 3 barras (utilizadas para demarcar as 4 caixas):

$$\bigcirc | \bigcirc || \bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\,.$$

Portanto, é evidente que o número pedido é igual ao número de sequências de comprimento 10 que podemos formar com 7 bolas e 3 barras. Quantas são? Formar uma sequência destas equivale a escolher o conjunto das 3 posições (entre as 10 disponíveis) para colocar as barras (as bolas ficam automaticamente nas 7 posições restantes), ou seja, a escolher uma combinação de 10 elementos 3 a 3. Portanto, o número total é igual a

$$C(10,3) = \frac{10!}{3!\,7!} = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2} = 120.$$

<u>Solução alternativa</u>: Alternativamente, podemos representar a distribuição $(*)$ pelo multiconjunto $\{A, B, D, D, D, D, D\}$ (a ordem das letras é irrelevante), ou seja, por uma combinação *com repetição* de 4 elementos (as caixas) 7 a 7 (as bolas). Assim, o número pedido é igual a $\overline{C}(4,7) = C(10,7) = C(10,3) = 120$.

8. Observemos que o valor inicial de *var* é 0 e que uma unidade é adicionada a *var* de cada vez que o *ciclo* é atravessado com um conjunto de inteiros i_1, i_2, i_3, i_4, i_5 tais que

$$1 \leq i_5 \leq i_4 \leq i_3 \leq i_2 \leq i_1 \leq n.$$

O número de tais conjuntos de inteiros é igual ao número de maneiras de escolher 5 inteiros de $\{1, 2, \ldots, n\}$, ordenados por ordem crescente, com repetição permitida, ou seja, é igual ao número de combinações com repetição $\overline{C}(n,5)$. Portanto,

$$var(n) = \overline{C}(n,5) = C(n+5-1,5) = C(n+4,5) = \frac{(n+4)!}{(n-1)!\,5!} = \frac{(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)n}{120}$$

e, em particular, $var(5) = C(9,5) = \dfrac{9 \times 8 \times 7 \times 6}{4 \times 3 \times 2} = 9 \times 7 \times 2 = 126$.