Ano lectivo 2012/13 **Frequência de Estruturas Discretas**

Lic.ª Eng. Informática 7/11/2012

Justifique convenientemente as suas respostas e indique os principais cálculos. Na questão **2(a)**, cada resposta certa tem a cotação total atribuída e cada resposta errada perde metade desse valor.

SOLUÇÕES

---

1. (a) Duas fórmulas bem formadas da lógica de proposições dizem-se *logicamente equivalentes* se tiverem a mesma tabela de verdade.

(b)

p	q	$\neg$	$(\neg q$	$\rightarrow$	$(p \rightarrow q))$	$\wedge$	p
V	V	F	F	V	V	F	V
V	F	V	V	F	F	V	V
F	V	F	F	V	V	F	F
F	F	F	V	V	V	F	F

(c) Não, porque a tabela de verdade da fórmula $q \vee \neg p$ é diferente:

p	q	$q \vee \neg p$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

(d) O resultado final F V F F da tabela da fórmula $\neg(\neg q \rightarrow (p \rightarrow q)) \wedge p$ é precisamente a negação da tabela da alínea anterior (V F V V), logo

$$\neg(\neg q \rightarrow (p \rightarrow q)) \wedge p \equiv \neg(q \vee \neg p) \equiv \neg q \wedge p.$$

Solução alternativa:

$$\begin{aligned}
\neg(\neg q \rightarrow (p \rightarrow q)) \wedge p &\equiv \neg(q \vee (p \rightarrow q)) \wedge p \\
&\equiv \neg(q \vee (\neg p \vee q)) \wedge p \\
&\equiv \neg(q \vee \neg p) \wedge p \\
&\equiv \neg q \wedge p \wedge p \equiv \neg q \wedge p.
\end{aligned}$$

2. (a)

	Mundo A	**Mundo B**
(a1)	F	V
(a2)	V	V
(a3)	V	V
(a4)	V	F
(a5)	F	V

(b) (a2, Mundo A): os 4 dodecaedros e os objectos d, e.

(a2, Mundo B): b.

(a3, Mundo A): os 3 tetraedros na coluna 8.

(a3, Mundo B): os 3 tetraedros.

3. (a) $\texttt{Cube(a)} \land \texttt{Large(a)} \land \texttt{LeftOf(a, b)}$.

   (b) $\forall \texttt{x}\ (\texttt{Cube(x)} \to \texttt{BackOf(x, b)})$.

   (c) $\forall \texttt{x}\ \forall \texttt{y}\ (\texttt{Cube(x)} \land \texttt{Large(x)} \to (\texttt{Tet(y)} \to \texttt{Larger(x, y)}))$.

   <u>Solução alternativa</u>: $\forall \texttt{x}\ \forall \texttt{y}\ (\texttt{Cube(x)} \land \texttt{Large(x)} \land \texttt{Tet(y)} \to \texttt{Larger(x, y)})$.

   (d) $\forall \texttt{x}\ \forall \texttt{y}\ (\texttt{Cube(x)} \land \texttt{Cube(y)} \to (\texttt{LeftOf(x, b)} \land \texttt{LeftOf(y, b)} \lor \texttt{RightOf(x, b)} \land \texttt{RightOf(y, b)}))$.

   <u>Solução alternativa</u>: $\forall \texttt{x}\ (\texttt{Cube(x)} \to \texttt{LeftOf(x, b)}) \lor \forall \texttt{x}\ (\texttt{Cube(x)} \to \texttt{RightOf(x, b)})$.

4. (a) O erro da "demonstração" de P1 está no ponto de partida

   "`Suponhamos que` $x = 7$",

   pois está-se a assumir como *hipótese* aquilo que se quer concluir (a *tese*)!

   O erro da "demonstração" de P2 está também no ponto de partida:

   "`Suponhamos por absurdo que` $x = 3$ `e` $y = 8$";

   com efeito, o método da redução ao absurdo exige que se assuma a negação da tese, que é neste caso "$x = 3$ ou $y = 8$" e não "$x = 3$ e $y = 8$".

   (b) P1 é verdadeira.

   Dem: Se $\frac{2x-5}{x-4} = 3$, então $2x - 5 = 3(x - 4)$, isto é, $2x - 5 = 3x - 12$. Logo $x = 12 - 5 = 7$. $\square$

   <u>Dem. alternativa</u>: Suponhamos por absurdo que $x \neq 7$. Então $3x - 2x \neq 12 - 5$, isto é, $3x - 2x \neq 3 \times 4 - 5$, ou seja, $3(x - 4) \neq 2x - 5$. Uma vez que $x \neq 4$, isto significaria que $\frac{2x-5}{x-4} \neq 3$, uma contradição. $\square$

   Quanto a P2, é falsa: por exemplo, o par $x = 3$ e $y = 7$ é um *contra-exemplo* (isto é, satisfaz as premissas mas não satisfaz a conclusão).

5. (a) $\displaystyle\sum_{i=2}^{8} (-1)^i \frac{1}{2i}\, x^{2i+1}$.

   (b) $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} \frac{n+j}{j+1}$.

6. (a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{30} 2(i - 22) = 2\sum_{i=1}^{30} i - \sum_{i=1}^{30} 44 = 2 \times \frac{30 \times 31}{2} - 44 \times 30 = 30(31 - 44) = -30 \times 13 = -390.$

   (b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{6}(i + ij) = \sum_{i=1}^{4}\Big(\sum_{j=1}^{6} i + \sum_{j=1}^{6} ij\Big) = \sum_{i=1}^{4}\Big(i\sum_{j=1}^{6} 1 + i\sum_{j=1}^{6} j\Big) = \sum_{i=1}^{4}(6i + 21i) = 27\sum_{i=1}^{4} i =$

   $= 27 \times 10 = 270.$

   (c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{99}(10 + k) = \sum_{k=0}^{99} 10 + \sum_{k=0}^{99} k = 100 \times 10 + \frac{99 \times 100}{2} = 1000 + 4950 = 5950.$

7. Seja $P(n)$ a proposição $\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2$. Teremos que mostrar que

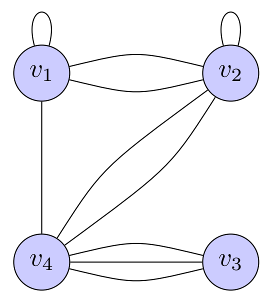
- $P(1)$ é V, e
- A implicação $P(n) \to P(n+1)$ é V para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

Quanto a $P(1)$ é evidente: $2 - 1 = 1^2$ é claramente uma proposição verdadeira.

Seja então n um natural arbitrário e suponhamos que $P(n)$ é V (*hipótese de indução* HI). Teremos que mostrar que nessas condições também $P(n+1)$ é V:

$$\sum_{i=1}^{n+1}(2i-1) = \sum_{i=1}^{n}(2i-1) + [2(n+1)-1] \stackrel{\text{HI}}{=} n^2 + 2n + 2 - 1 = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2.$$

8.



O grau de v_3 é igual a 3.