

Raciocínio matemático, indução e recursão

- Mostre que a proposição $P(0)$ é verdadeira, para as seguintes proposições $P(n)$:
 - $P(n)$: Se $n > 1$ então $n^2 > n$.
 - $P(n)$: Se a e b são inteiros positivos com $a \geq b$, então $a^n \geq b^n$.
- Será correcto assumir que se $\neg p$ é verdadeira então $\neg q$ é verdadeira, usando o facto de que $p \rightarrow q$ é verdadeira?
- Apresente uma prova por contradição do teorema “Se $3n + 2$ é ímpar, então n é ímpar.”
- Sejam p a proposição “ $n \equiv_3 1$ ” e q a proposição “ $n^2 \equiv_3 1$ ”. A implicação $p \rightarrow q$, que é “se $n \equiv_3 1$, então $n^2 \equiv_3 1$ ” é verdadeira. Se q é verdadeira, ou seja, $n^2 \equiv_3 1$, decorre daí que p é verdadeira, isto é, que $n \equiv_3 1$?
- As demonstrações das seguintes proposições estão erradas!

P1: *Seja x um número real diferente de 4. Se $\frac{2x-5}{x-4} = 3$, então $x = 7$.*

Dem: Suponhamos que $x = 7$. Então $\frac{2x-5}{x-4} = \frac{2 \cdot 7 - 5}{7 - 4} = \frac{9}{3} = 3$. Portanto, se $\frac{2x-5}{x-4} = 3$, então $x = 7$. \square

P2: *Sejam x e y dois números reais tais que $x + y = 10$. Então $x \neq 3$ e $y \neq 8$.*

Dem: Suponhamos por absurdo que $x = 3$ e $y = 8$. Então $x + y = 11$, o que contraria a hipótese de que $x + y = 10$. Logo $x \neq 3$ e $y \neq 8$. \square

 - Indique onde está o erro de raciocínio em cada uma delas.
 - Indique se estas proposições são verdadeiras ou não e, no caso afirmativo, apresente uma demonstração correcta.
- Prove que o quadrado de um número par é par usando
 - uma prova directa.
 - uma prova por contradição.
- Seja n um inteiro. Prove a equivalência das seguintes três proposições:

p_1 : $n \bmod 3 = 1$ ou $n \bmod 3 = 2$.

p_2 : n não é divisível por 3.

p_3 : $n^2 \equiv_3 1$.
- Prove, por indução matemática, que, para qualquer inteiro positivo n :
 - A soma dos primeiros n inteiros positivos é igual a $(n^2 + n)/2$.
 - $n < 2^n$.

- (c) $n^3 - n$ é divisível por 3.
 (d) $1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1$.

9. Para que inteiros não negativos n é válida a desigualdade $2n + 3 \leq 2^n$? Justifique a sua resposta usando indução matemática.
 10. Prove, usando o método de indução matemática, que $n! < n^n$ para qualquer inteiro positivo $n \geq 2$.
 11. Prove que para todos os números naturais

$$\sum_{i=0}^n (2i + 1) = (n + 1)^2.$$

12. A seguinte “prova” por indução sobre n de que $3^n = 1$ para todo o inteiro $n \geq 0$ tem um erro:

Passo inicial:	$3^0 = 1$ é verdadeiro por definição de 3^0 .
Hipótese de indução:	$3^k = 1$ para todo o inteiro $0 \leq k \leq n$.
Passo indutivo:	$3^{n+1} = 3^{2n-(n-1)} = \frac{3^n \times 3^n}{3^{n-1}} = \frac{1 \times 1}{1} = 1$.

Em qual das seguintes hipóteses consiste o erro? (Justifique sucintamente.)

- (A) A formulação da hipótese de indução está errada.
 (B) A igualdade

$$3^{2n-(n-1)} = \frac{3^n \times 3^n}{3^{n-1}}$$

não se verifica para todos os números naturais.

- (C) A igualdade $3^{n+1} = 3^{2n-(n-1)}$ não se verifica para todos os números naturais.
 (D) O passo indutivo não funciona para todos os $n \geq 0$ porque para $n + 1 = 1$ não podemos concluir a igualdade

$$\frac{3^n \times 3^n}{3^{n-1}} = \frac{1 \times 1}{1}$$

a partir da hipótese de indução.

- (E) O passo indutivo não funciona para todos os $n \geq 0$ porque para $n + 1 = 2$ não podemos concluir a igualdade

$$\frac{3^n \times 3^n}{3^{n-1}} = \frac{1 \times 1}{1}$$

da hipótese de indução.