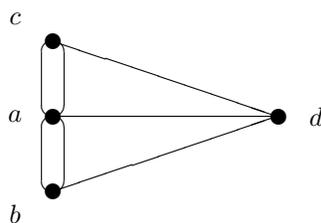
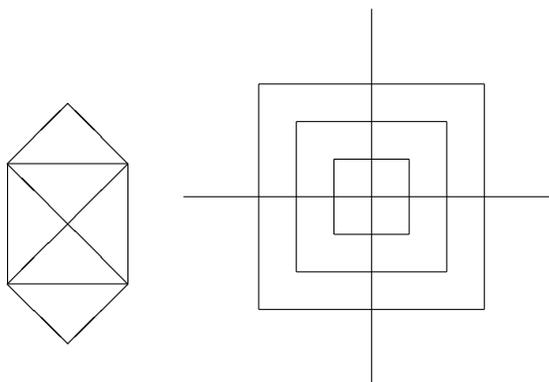


### Grafos

1. Desenhe todos os grafos não dirigidos simples conexos, não isomorfos entre si, de  $n$  vértices, para
  - (a)  $n = 2$ .
  - (b)  $n = 3$ .
  - (c)  $n = 4$ .
2. Seja  $G$  um grafo simples com vértices  $v_1, v_2, \dots, v_n$ .
  - (a) Que pode dizer sobre a soma dos elementos de cada linha e de cada coluna da matriz de incidência de  $G$ ?
  - (b) Mostre que o número de elementos não-nulos da matriz de adjacência de  $G$  é igual ao número de elementos não-nulos da matriz de incidência.
3. Quantos vértices poderá ter um grafo simples regular com 24 arestas?
4. Considere o seguinte grafo  $G$ :



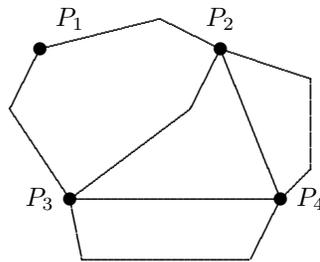
- (a)  $G$  é euleriano?
  - (b) Qual o menor número de arestas que tenho de acrescentar ao grafo  $G$  de forma a conseguir desenhá-lo sem levantar o lápis do papel?
5. Quais dos seguintes desenhos podem ser feitos sem levantar a ponta do lápis do papel e sem tornar a passar por uma linha previamente traçada?



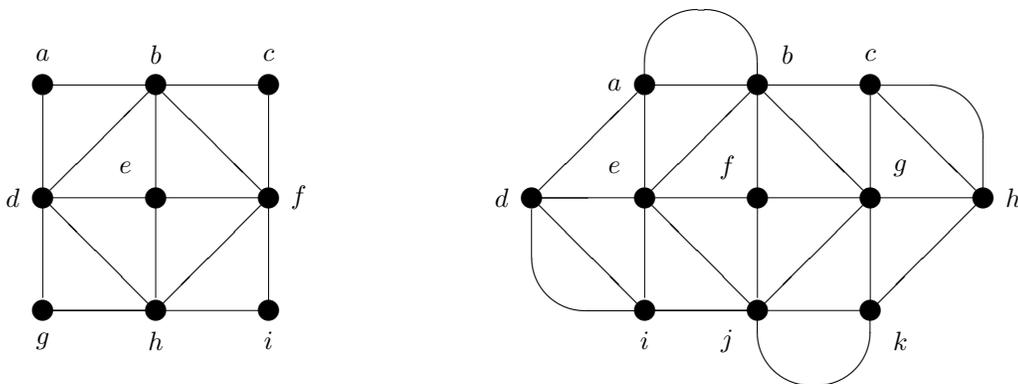
6. Considere um grafo simples conexo  $G = (V, A)$  com 5 vértices, cuja matriz de adjacência relativamente à marcação de vértices  $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5$  é a seguinte:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

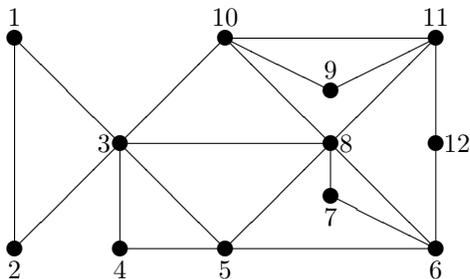
- (a) Qual é a sequência de graus dos vértices de  $G$ ?
- (b) Existem caminhos  $v_4 - v_5$  de comprimento 2?
- (c) Mostre que  $G$  não é euleriano. É semi-euleriano? (isto é, tem um caminho euleriano aberto?)
7. (a) Desenhe o grafo completo de três vértices,  $K_3$ . Defina caminho euleriano e diga, justificando, se  $K_3$  possui um caminho euleriano.
- (b) Diga, justificando, quais os grafos completos  $K_n$  ( $n \geq 1$ ) que têm um caminho euleriano.
8. Este ano o cortejo da Queima das Fitas deve percorrer uma só vez todas as ruas da área representada, partindo de uma das praças  $P_1, P_2, P_3$  ou  $P_4$  e regressando à mesma praça.



- (a) Diga se é possível encontrar um percurso nestas condições. Se a sua resposta for afirmativa, copie a figura para o seu papel, e represente-o.
- (b) Determine a matriz de adjacências do grafo.
9. Qual dos seguintes grafos é euleriano? Exiba um caminho euleriano desse grafo.



10. O grafo



é euleriano. Determine um seu caminho euleriano e uma sua partição em ciclos.

11. Seja  $G$  um grafo euleriano. Consideremos  $L(G)$  o grafo definido do seguinte modo:

- (a)  $V(L(G)) = A(G)$ ;
- (b)  $\{a_i, a_j\} \in A(L(G))$  se e só se  $a_i$  e  $a_j$  forem, em  $G$ , arestas incidentes no mesmo vértice.

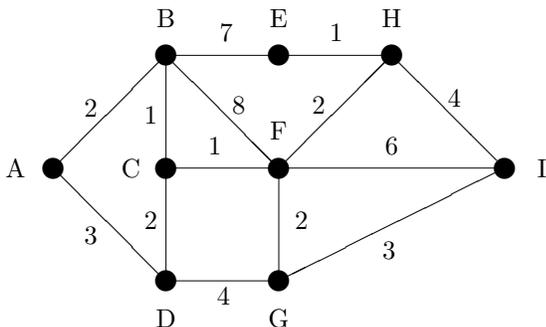
Prove que  $L(G)$  também é euleriano.

12. Os custos de ligação (em milhares de contos) entre 7 acampamentos no deserto,  $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7$ , e uma fonte de água  $F$  são dados pelo seguinte quadro (onde a cruz  $\times$  significa que, por razões de ordem técnica, é impossível ligar os dois pontos respectivos):

	$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$	$A_5$	$A_6$	$A_7$
$F$	1	4	6	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$
$A_1$		5	$\times$	2	4	$\times$	$\times$
$A_2$			2	$\times$	7	4	$\times$
$A_3$				$\times$	$\times$	6	$\times$
$A_4$					1	$\times$	7
$A_5$						3	5
$A_6$							2

- (a) Qual é o custo mínimo de ligar a fonte  $F$  ao acampamento  $A_7$ ?
- (b) Para esse custo, qual é o número máximo de acampamentos que será possível irrigar?

13. Determine o caminho mais curto de  $A$  para  $I$  em



14. Enumere todas as árvores com 5 arestas (nenhum par de árvores nessa lista poderá ser isomorfo).
15. Quantos vértices de grau 1 tem uma árvore com dois vértices de grau 2, quatro vértices de grau 3, três vértices de grau 4 e nenhum de grau superior a 4?
16. Seja  $G$  uma árvore com 7 vértices.
  - (a) Diga, justificando sucintamente, se as afirmações seguintes são verdadeiras ou falsas:
    - (i)  $G$  pode ter todos os vértices de grau 1.
    - (ii)  $G$  pode ter dois vértices de grau 1 e cinco de grau 2.
    - (iii)  $G$  pode ter cinco vértices de grau 1 e dois de grau 2.
  - (b) Quantos vértices de grau 1 terá  $G$  se tiver dois vértices de grau 3?
17. Poderá haver uma árvore com 13 vértices, dois dos quais de grau 7?
18. Mostre que qualquer árvore é um grafo bipartido. Quais são os grafos bipartidos completos que são árvores?