

Lógica elementar: programa Boolé

1. Abra o Boolé e construa a tabela de verdade da proposição

$$\neg(p \wedge (\neg p \vee (q \wedge r))) \vee q.$$

Para isso, escreva a fórmula no topo direito da tabela (usando a barra de ferramentas). Se a fórmula estiver bem formada, o “(1)” acima dela passa a verde (note que **as variáveis proposicionais têm que ser escritas obrigatoriamente em maiúsculas:** $A, B, C, \dots, P, Q, R, \dots$). Em seguida, insira à esquerda, as colunas das diversas variáveis proposicionais (colunas de referência) com a ajuda das instruções **Add Column Before** ou **Add Column After** e preencha-as com os diversos valores lógicos de verdade (pode fazer isso automaticamente com a tecla **Fill Ref Cols**). Depois preencha os valores de verdade T e F nas outras colunas por baixo da fórmula, de acordo com as respectivas operações lógicas. Quando a tabela estiver completa, clique no botão **Verify Table** para verificar se todos os valores estão correctos.

Depois de ter uma tabela completa e correcta, clique no botão **Assessment** por baixo da barra de ferramentas. Aqui deverá responder a um questionário sobre se a proposição é uma tautologia. Verifique se a sua resposta está correcta em **Verify Assess**.

2. Use o Boolé para construir as tabelas de verdade das seguintes proposições e indique se são tautologias.

- (a) $\neg(P \wedge \neg Q \wedge \neg P)$.
- (b) $P \vee \neg(Q \vee \neg(R \wedge P))$.
- (c) $\neg(\neg A \vee \neg(B \wedge C) \vee (A \wedge B))$.
- (d) $\neg((\neg A \vee B) \wedge \neg(C \wedge D))$.

3. Com a ajuda do Boolé determine as tabelas de verdade do Exercício 9 (Folha 1-TP).

4. Revisite os problemas 11 e 13 (1-TP), agora com a ajuda do Boolé.

5. Confirme com o Boolé as suas respostas ao Exercício 20 (1-TP).

6. Seleccione a opção correcta quanto à validade de cada uma das deduções seguintes (**V**: dedução válida; **F**: dedução falaciosa):

- (a) De $p \vee q$ e $\neg p$ deduz-se q .
- (b) De $p \vee q$ e q deduz-se $\neg p$.
- (c) De $\neg(p \vee q)$ deduz-se $\neg p$.
- (d) De $\neg(p \wedge q)$ deduz-se $\neg q$.
- (e) De $p \vee q$ e $q \rightarrow r$ deduz-se $p \vee r$.

V F

<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
--------------------------	--------------------------

<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
--------------------------	--------------------------

<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
--------------------------	--------------------------

<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
--------------------------	--------------------------

<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
--------------------------	--------------------------

Lógica elementar: programa Tarski World

1. Um mundo de Tarski (tridimensional) consiste num tabuleiro de xadrez (8×8) juntamente com figuras geométricas diversas: tetraedros, cubos, e octaedros, dispostas nas casas do tabuleiro. Relativamente a estas figuras consideram-se os seguintes predicados unários, binários e ternários, que descrevem o tamanho, o tamanho relativo e posição relativa:

Predicados unários

Sentença atómica	Interpretação
$Tet(a)$	a é um tetraedro
$Cube(a)$	a é um cubo
$Dodec(a)$	a é um dodecaedro
$Small(a)$	a é pequeno
$Medium(a)$	a é médio
$Large(a)$	a é grande

Predicados binários

Sentença atómica	Interpretação
$SameSize(a, b)$	a tem o mesmo tamanho que b
$SameShape(a, b)$	a tem a mesma forma que b
$Larger(a, b)$	a é maior que b
$Smaller(a, b)$	a é menor que b
$SameCol(a, b)$	a está na mesma coluna que b
$SameRow(a, b)$	a está na mesma linha que b
$Adjoins(a, b)$	a e b estão localizados em casas adjacentes (mas não na diagonal)
$LeftOf(a, b)$	a está numa coluna à esquerda de b
$RightOf(a, b)$	a está numa coluna à direita de b
$FrontOf(a, b)$	a está numa linha à frente de b
$BackOf(a, b)$	a está numa linha atrás de b

Predicados ternários

Sentença atómica	Interpretação
$Between(a, b, c)$	a, b e c estão na mesma coluna, linha ou diagonal, e a está entre b e c .

- (a) Para se familiarizar com o Tarski World abra-o e carregue os ficheiros Wittgenstein's World e Wittgenstein's Sentences (na pasta TW Exercises). Nestes ficheiros verá um mundo de blocos geométricos e uma lista de sentenças atómicas (algumas delas têm comentários). Percorra essa lista e tente calcular mentalmente o correspondente valor lógico nesse mundo. Use o botão **Verify** para verificar se a sua resposta está correcta ou não. Se ficar surpreendido por alguma resposta, tente ver porque errou, comparando a sua interpretação do predicado com a definição exacta do predicado.
- (b) Em seguida, mude o mundo de Wittgenstein de diversas maneiras, alterando os objectos e as suas posições, observando o que acontece ao valor lógico das diversas sentenças.

[Objectivo: ajudá-lo a memorizar a interpretação de cada um dos predicados do Tarski World; só deverá avançar depois de dominar bem a lista de predicados e as suas interpretações.]

2. Determine o valor lógico das afirmações seguintes relativas ao mundo

				★ <i>a</i>			
							▽
		▽ <i>d</i>					
▽			□ <i>c</i>			★ <i>b</i>	
	□						
				□			★
		▽					★

Estrela Pequena:	★
Estrela Média:	★
Estrela Grande:	★
Quadrado Pequeno:	□
Quadrado Médio:	□
Quadrado Grande:	□
Triângulo Pequeno:	▽
Triângulo Médio:	▽
Triângulo Grande:	▽

V F

(a) $Estrela(a) \wedge \neg Grande(a)$

--	--

(b) $\forall x(\neg Estrela(x) \rightarrow Quadrado(c))$

--	--

(c) $\exists y \forall x (Triângulo(x) \rightarrow MaisPequeno(x, y))$

--	--

(d) $\forall x (Pequeno(x) \rightarrow \exists y (x \neq y \wedge MesmaColuna(x, y)))$

--	--

3. Construa um mundo no qual as seguintes sentenças sejam simultaneamente verdadeiras:

$Tet(a)$, $Medium(a)$, $Dodec(b)$, $Cube(c)$, $FrontOf(a, b)$, $Between(a, b, c)$, $a = d$, $Larger(a, b)$, $Smaller(a, c)$, $LeftOf(b, c)$.

4. Abra os ficheiros **Lestrade's Sentences** e **Lestrade's World**. Reparará que nenhum dos objectos neste mundo tem nome. Atribua nomes aos objectos de modo que todas as sentenças na lista se tornem verdadeiras.

5. Observe a diferença entre os predicados $Larger$ e $BackOf$: um determinado cubo a ser maior ou não que outro cubo b é um facto óbvio, de resposta precisa, independente da perspectiva com que olhemos para o mundo; mas saber se a está atrás de b já depende da perspectiva: se rodarmos o mundo 90° , a resposta poderá mudar.

Abra os ficheiros **Austin's Sentences** e **Wittgenstein's World**.

(a) Determine o valor lógico das sentenças neste mundo e confira que são os seguintes:

	Original	Rodado 90°	Rodado 180°	Rodado 270°
1.	F			
2.	F			
3.	V			
4.	F			
5.	V			
6.	F			

- (b) Rode o mundo 90° e torne a avaliar as sentenças, juntando os resultados à tabela. Repita o processo até dar uma volta completa.
- (c) Junte uma sétima sentença à lista com o seguinte padrão: V F V F .
- (d) Existem sentenças atômicas nesta linguagem que produzam uma linha com o padrão F V F F ?
- (e) Existem sentenças atômicas nesta linguagem que produzam uma linha com exactamente três V ?
6. Para simplificar, representaremos um mundo de Tarski na folha de papel (bidimensional) num tabuleiro de xadrez (8×8) com quadrados (representarão os cubos), triângulos (representarão os tetraedros), e estrelas (representarão os dodecaedros), dispostos nas casas do tabuleiro¹. Por exemplo:

O mundo de Wittgenstein

	□ <i>d</i>			★ <i>e</i>			▽ <i>f</i>
▽			□ <i>c</i>			★	
	▽ <i>a</i>			□ <i>b</i>			★

- (a) Quais das sentenças seguintes são verdadeiras no mundo de Wittgenstein ?

1. $Triângulo(f) \wedge Pequeno(f)$.
2. $Triângulo(f) \wedge Grande(f)$.
3. $Triângulo(f) \wedge \neg Pequeno(f)$.
4. $Triângulo(f) \wedge \neg Grande(f)$.
5. $\neg Triângulo(f) \wedge \neg Pequeno(f)$.
6. $\neg Triângulo(f) \wedge \neg Grande(f)$.
7. $\neg(Triângulo(f) \wedge Pequeno(f))$.
8. $\neg(Triângulo(f) \wedge Grande(f))$.
9. $\neg(\neg Triângulo(f) \wedge \neg Pequeno(f))$.
10. $\neg(\neg Triângulo(f) \wedge \neg Grande(f))$.
11. $Esquerda(a, c) \vee Esquerda(c, b) \vee \neg B(c, a, b)$.
12. $\neg\neg(Acima(e, b) \wedge \neg Abaixo(c, b))$.
13. $Acima(d, a) \wedge Esquerda(d, e) \wedge Abaixo(b, e) \wedge B(c, d, b)$.

¹Identificaremos também os predicados pelo seu nome em português; para $Between(a, b, c)$ usaremos $B(a, b, c)$.

14. $MaisPequeno(c, e) \vee \neg(Quadrado(a) \vee Quadrado(d))$.

15. $\neg(\neg Estrela(e) \vee \neg \neg Triangulo(f))$.

- (b) Qual é o número máximo de sentenças que pode tornar verdadeiras num só mundo mudando o tamanho ou a forma de f (ou ambos)?

7. Construa um mundo em que todas as sentenças seguintes são verdadeiras:

- (a) $Dodecaedro(a) \wedge Cubo(b)$.
(b) $Abaixo(b, a) \wedge Esquerda(d, b) \wedge Acima(f, d) \wedge Direita(a, f)$.
(c) $Tetraedro(c) \wedge Tetraedro(e) \wedge Esquerda(c, d)$.
(d) $\neg Esquerda(c, e) \wedge \neg Esquerda(e, c)$.
(e) $B(d, b, c) \wedge \neg B(d, c, a)$.
(f) $\neg Cubo(b) \vee (Cubo(d) \wedge Acima(d, b))$.
(g) $(Pequeno(c) \wedge Abaixo(c, b)) \vee Cubo(d)$.
(h) $Maior(f, a) \wedge Maior(a, b)$.
(i) $\neg(MaisPequeno(c, a) \vee MaisPequeno(a, c))$.
(j) $Maior(d, b) \wedge Maior(f, d) \wedge \neg(Maior(e, d) \vee Maior(d, e))$.

8. Considere as premissas seguintes:

1. $Tetraedro(b)$.
2. $Cubo(c)$.
3. $Maior(c, b) \vee (b = c)$.

- (a) Determine se cada uma das sentenças seguintes é consequência tautológica das premissas dadas, justificando cuidadosamente as suas respostas:

- (i) $MaisPequeno(b, c)$.
- (ii) $Maior(c, b) \vee (Tetraedro(b) \wedge b = c)$.
- (iii) $\neg(Maior(c, b) \wedge \neg Maior(c, b))$.

- (b) Considerando a interpretação usual, no mundo de Tarski, dos predicados considerados, determine se a sentença

$$(Tetraedro(b) \wedge Pequeno(b)) \vee (Cubo(c) \wedge Médio(c))$$

é consequência lógica das premissas consideradas. Em caso afirmativo, justifique cuidadosamente a sua resposta. Se não for, construa um mundo — recorrendo ao software **Tarski World** — no qual as premissas sejam verdadeiras e a conclusão seja falsa.

9. Diga em que casos as “conclusões” são consequências lógicas das premissas. Para cada caso em que isso não aconteça, construa um mundo (isto é, um *contra-exemplo*) no qual as premissas sejam verdadeiras e a conclusão falsa.

- (a) Premissa: $Esquerda(a, b)$. Conclusão: $Direita(b, a)$.
(b) Premissas: $Esquerda(a, b)$, $b = c$. Conclusão: $Direita(c, a)$.
(c) Premissas: $Esquerda(a, b)$, $Direita(c, a)$. Conclusão: $Esquerda(b, c)$.
(d) Premissas: $Trás(a, b)$, $Frente(a, c)$. Conclusão: $Frente(b, c)$.
(e) Premissas: $B(b, a, c)$, $Esquerda(a, c)$. Conclusão: $Esquerda(a, b)$. (Recorde que $B(b, a, c)$ significa que b está entre a e c , na mesma fila.)

10. (a) Descreva cada uma das propriedades seguintes do mundo de Boole, com sentenças da linguagem de primeira ordem do Tarski (use os predicados referidos em exercícios anteriores):
1. f não está abaixo de a .
 2. f está à direita de a e à esquerda de b .
 3. f está acima ou é mais pequeno do que a .
 4. e e d estão ambos entre c e a .
 5. Nem e nem d são maiores que c .
 6. c nem é maior nem é mais pequeno do que e .
 7. c é mais pequeno do que a , mas maior do que e .
 8. c está abaixo de a ; além disso, é mais pequeno do que f .

O mundo de Boole

						★ f	
					▽ a		▽ b
			★ d				
		★ e					
	▽ c						

- (b) Neste mundo apenas uma das frases seguintes é verdadeira. Qual? Traduza essa frase para a linguagem da lógica de primeira ordem.
1. a é pequeno ou c e d são ambos grandes.
 2. d e e estão ambos acima de b .
 3. d e e estão ambos acima de b e não são maiores do que ele.
 4. d e c são quadrados; além disso, nenhum deles é médio.
 5. Nem e nem a estão à direita de c nem à esquerda de b .
 6. e não é grande ou está acima de a .
 7. c nem está entre a e b nem está abaixo deles.
 8. a e e são ambos triângulos, ou a e f são-no ambos.
 9. c está entre d e f ou é mais pequeno do que os dois.
11. Determine o valor lógico das sentenças seguintes no mundo de Wittgenstein (Exercício 10).
- (a) $(\text{Triângulo}(a) \wedge \text{Quadrado}(c)) \rightarrow \text{Estrela}(d)$.
 - (b) $\text{Quadrado}(c) \rightarrow (\text{Grande}(c) \rightarrow (\text{Quadrado}(c) \wedge \text{Grande}(c)))$.
 - (c) $\neg(\text{Triângulo}(a) \rightarrow \text{Grande}(a)) \rightarrow (\text{Triângulo}(a) \wedge \neg \text{Grande}(a))$.
 - (d) $\neg(\text{Grande}(a) \leftrightarrow \text{Pequeno}(b))$.

(e) $[Pequeno(c) \wedge (Quadrado(a) \vee Quadrado(d))] \leftrightarrow [(Pequeno(c) \wedge Quadrado(a)) \vee (Pequeno(c) \wedge Quadrado(d))]$.

(f) $Quadrado(a) \leftrightarrow (Quadrado(c) \leftrightarrow Grande(c))$.

12. Indique, com uma cruz, todas as traduções correctas (na linguagem da lógica de primeira ordem do Tarski) das seguintes sentenças:

(a) **Não é verdade que c seja um tetraedro grande.**

- | | |
|---|---|
| <input type="checkbox"/> $\neg(Tet(c) \vee Large(c))$ | <input type="checkbox"/> $\neg Tet(c) \wedge \neg Large(c)$ |
| <input type="checkbox"/> $\neg Tet(c) \vee \neg Large(c)$ | <input type="checkbox"/> $\neg(Tet(c) \wedge Large(c))$ |

(b) **d está na linha de b , a não ser que ambos os objectos sejam dodecaedros.**

- | | |
|--|--|
| <input type="checkbox"/> $SameRow(d, b) \vee Dodec(d \wedge b)$ | <input type="checkbox"/> $SameRow(d, b) \vee Dodec(d) \wedge Dodec(b)$ |
| <input type="checkbox"/> $SameRow(d, b) \vee (Dodec(d) \wedge Dodec(b))$ | <input type="checkbox"/> $SameRow(d, b) \wedge Dodec(d) \wedge Dodec(b)$ |

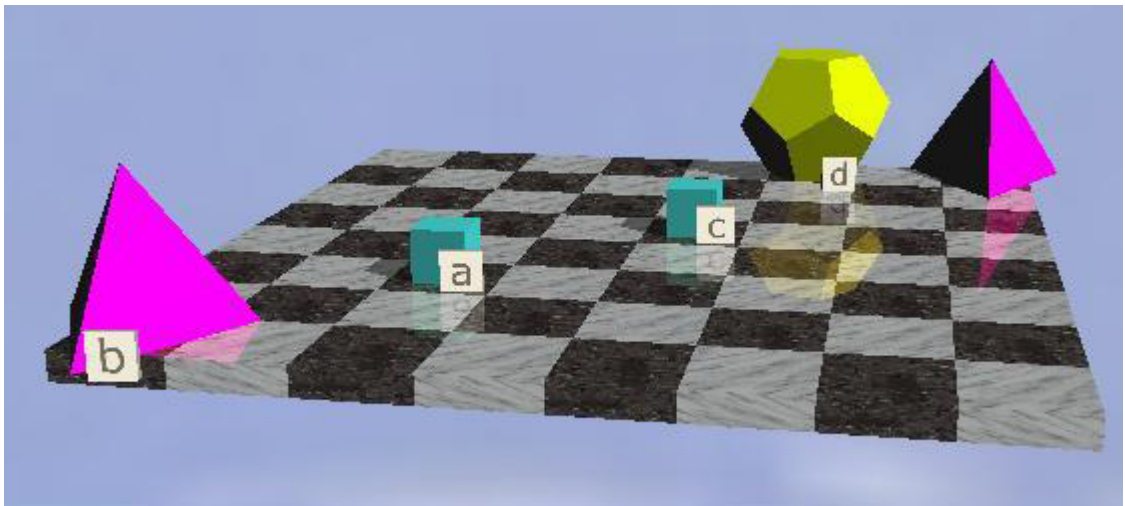
13. Traduza cada uma das seguintes sentenças da linguagem Tarski para Português.

- (a) $Tet(a) = Tet(b)$.
 (b) $Larger(a, a)$.
 (c) $\neg(Tet(f) \wedge Cube(a))$.
 (d) $LeftOf(a, b) \wedge Tet(b) \vee Cube(a)$.
 (e) $\exists x(Cube(x) \wedge Small(x))$.
 (f) $\forall z(Tet(z) \rightarrow Medium(z))$.
 (g) $\exists x(Tet(x) \wedge \forall z(Cube(z) \rightarrow FrontOf(x, z)))$.
 (h) $\forall x \forall y(BackOf(x, y) \rightarrow Larger(x, y))$.

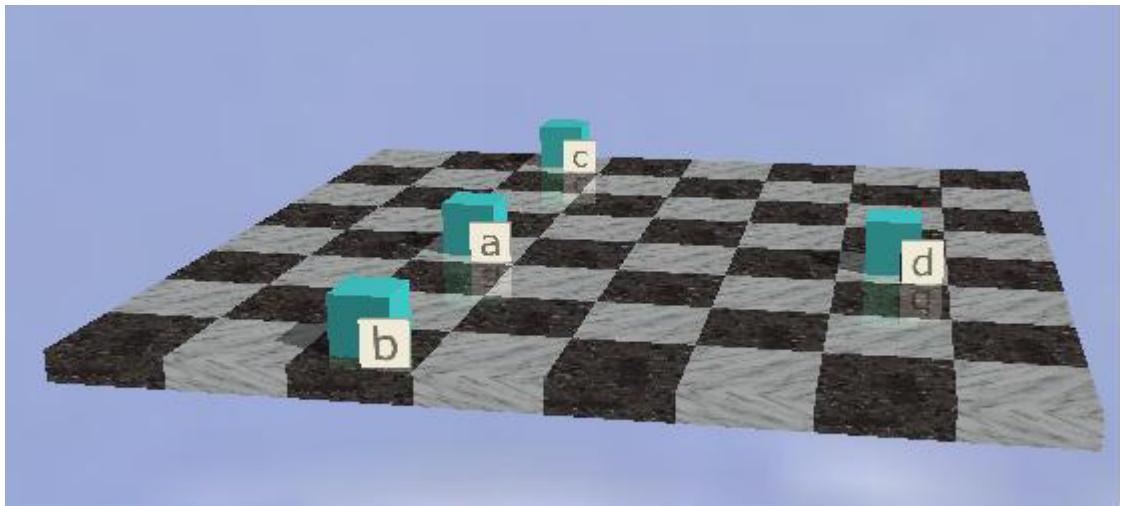
14. Avalie da verdade ou falsidade das seguintes sentenças nos mundos A, B, C (em baixo), preenchendo a seguinte tabela com **V**'s (verdade) e **F**'s (falso):

Sentenças	A	B	C
$Cube(a) \vee Tet(b)$			
$a \neq d$			
$Between(a, b, c) \rightarrow (Small(a) \wedge Large(b))$			
$\neg(Large(b) \rightarrow Small(d))$			
$\forall x(Dodec(x) \rightarrow Large(x))$			
$\exists x(Tet(x) \wedge RightOf(x, a) \wedge \neg Small(x))$			
$\forall x(Cube(x) \wedge Small(x))$			
$\forall x \forall y((Cube(x) \wedge Tet(y)) \rightarrow Smaller(x, y))$			
$\exists x(Tet(x) \wedge Large(x) \wedge \forall z(Cube(z) \rightarrow Between(z, x, b)))$			
$\forall z[Cube(z) \rightarrow \exists x(Tet(x) \wedge Large(x) \wedge \forall w(LeftOf(w, z) \rightarrow Between(z, x, w)))]$			

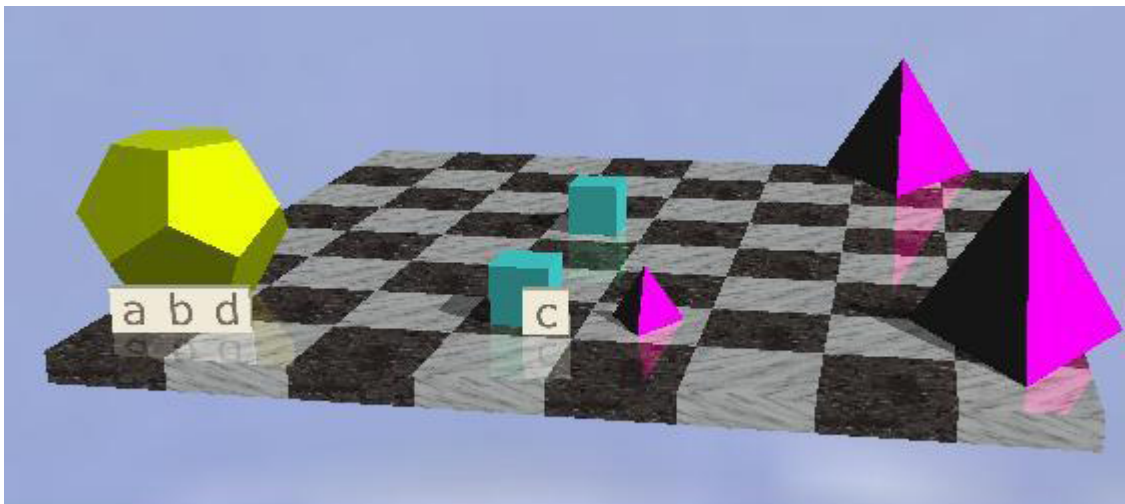
Mundo A



Mundo B



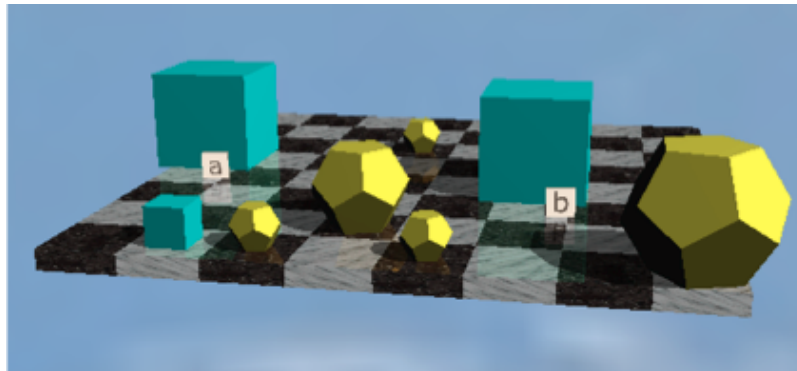
Mundo C



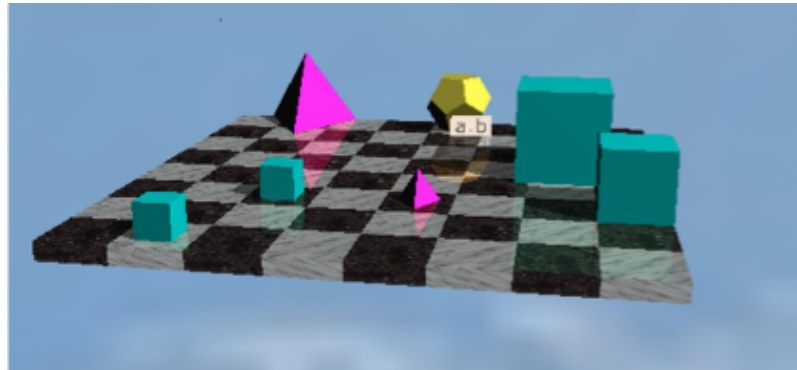
15. Avalie da verdade ou falsidade das seguintes sentenças nos mundos A, B, C (em baixo), preenchendo a seguinte tabela com **V**'s (verdade) e **F**'s (falso):

Sentenças	A	B	C
$SameShape(a, b) \wedge \neg Large(a)$			
$Dodec(b) \rightarrow Dodec(a)$			
$LeftOf(a, b) \vee a \neq b$			
$\neg(Dodec(b) \leftrightarrow LeftOf(b, a))$			
$\exists x(Cube(x) \wedge Small(x))$			
$\forall x((Cube(x) \wedge LeftOf(x, b)) \rightarrow Small(x))$			
$\exists x(Cube(x) \wedge Large(x)) \wedge \exists x LeftOf(x, b)$			
$\forall x \forall y((Cube(x) \wedge Cube(y) \wedge x \neq y) \rightarrow \neg SameSize(x, y))$			
$\forall x(Cube(x) \rightarrow \exists y(Dodec(y) \wedge SameSize(y, x)))$			
$\exists x(Cube(x) \wedge \forall w(Dodec(w) \rightarrow \exists z(LeftOf(x, z) \wedge LeftOf(z, w))))$			

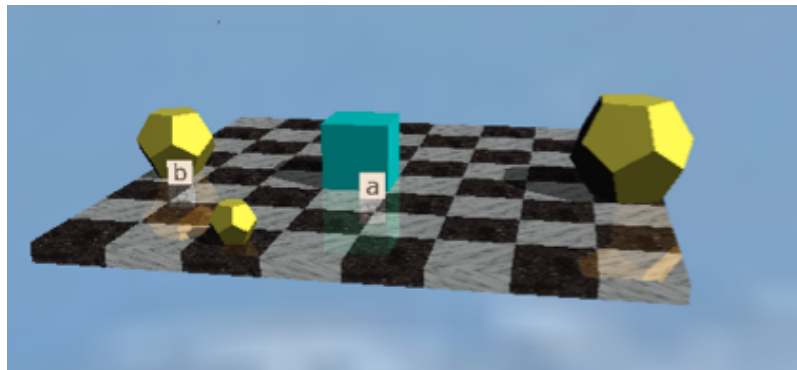
Mundo A



Mundo B



Mundo C



16. Traduza as seguintes sentenças para a linguagem do Tarski:

- (a) a é um cubo e está à esquerda de b .
- (b) Nem a nem b são dodecaedros.
- (c) Se a e b são cubos, então são o mesmo objecto.
- (d) a é grande mas não é um cubo.
- (e) Todo o cubo à direita de b é pequeno.
- (f) Não é verdade que exista um dodecaedro à frente de b .
- (g) Nenhum cubo está entre dodecaedros.
- (h) Há um cubo pequeno que está à frente de todos os tetraedros médios.
- (i) Se um cubo está atrás dum tetraedro então o tetraedro é pequeno.
- (j) Todos os cubos são do mesmo tamanho.
- (k) Se um cubo é mais pequeno do que outro então este último é grande.
- (l) Se existirem cubos eles são todos do mesmo tamanho.
- (m) Não há nada que esteja à esquerda de todos os cubos.
- (n) Se existirem tetraedros atrás de b então eles são pequenos.
- (o) Nenhum cubo com um objecto à sua direita é maior do que todos os tetraedros.

17. Dado o significado usual da linguagem do mundo de Tarski, diga se cada uma das afirmações seguintes está correcta (i.e., se a conclusão é consequência lógica das premissas). Em caso afirmativo, escreva SIM. Caso contrário, *construa* um contra-exemplo (isto é, um mundo onde as premissas sejam verdadeiras e a conclusão falsa).

- (a) $a = b, Tet(a), Cube(b) \models Larger(a, b)$.
- (b) $\neg Cube(a) \models \neg(Cube(a) \wedge Tet(c))$.
- (c) $Tet(a) \vee Tet(b) \models Tet(a)$.