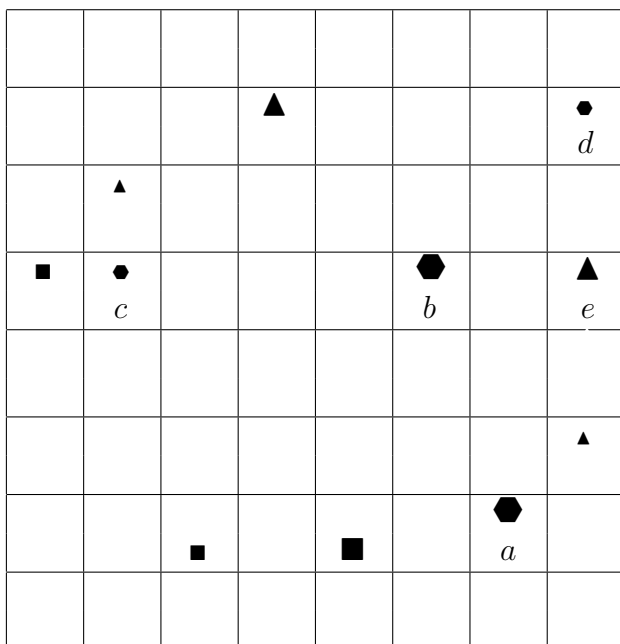


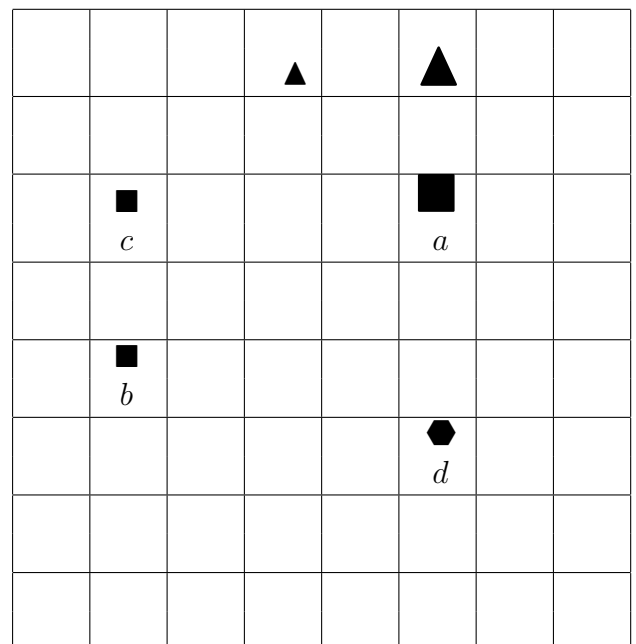
Justifique convenientemente as suas respostas e indique os principais cálculos.
Na questão **2(a)**, cada resposta certa tem a cotação total atribuída e cada resposta errada perde metade desse valor.

Duração: 2h00m

1. (a) Traduza os seguintes argumentos para fórmulas da lógica proposicional (usando os símbolos proposicionais p, q, r, \dots para identificar as proposições atómicas):
 - (a1) *Chove se e só se levo guarda-chuva. Hoje não levei guarda-chuva. Logo, hoje não choveu.*
 - (a2) *Chove só se levo guarda-chuva. Hoje não levei guarda-chuva. Logo, hoje não choveu.*
 - (b) Indique, justificando, a validade de cada um destes argumentos.
2. (a) Indique o valor lógico (V: verdade; F: falso) das seguintes sentenças nos mundos **A** e **B**.
 - (a1) $Dodec(a) \leftrightarrow SameRow(b, c)$.
 - (a2) $\forall x \forall y (SameShape(x, y) \wedge SameCol(x, y) \rightarrow SameSize(x, y))$.
 - (a3) $\forall x (Cube(x) \rightarrow \exists y (Dodec(y) \wedge LeftOf(x, y)))$.
 - (a4) $\neg \exists x (Dodec(x) \wedge SameRow(x, b))$.
 - (a5) $\forall x \forall y (\neg SameShape(y, x) \vee Tet(y) \vee Cube(x))$.
 - (b) Nos casos em que a fórmula (a5) é falsa, indique todos os pares de objectos x e y que a não satisfazem.
 - (c) Mostre que a negação da fórmula (a5) é equivalente a $\exists x \exists y (Dodec(x) \wedge Dodec(y))$.



Mundo A



Mundo B

- | | | |
|---------------------|----------------|----------------------|
| ▲ Tetraedro Pequeno | ■ Cubo Pequeno | ● Dodecaedro Pequeno |
| ▲ Tetraedro Médio | ■ Cubo Médio | ● Dodecaedro Médio |
| ▲ Tetraedro Grande | ■ Cubo Grande | ● Dodecaedro Grande |

3. Escreva as seguintes expressões usando a notação abreviada de somatório:

(a) $3 + 5 + 11 + 29 + \dots + (2 + 3^n)$.

(b) $n + \frac{n+1}{2} + \frac{n+2}{3} + \dots + \frac{2n}{n+1}$.

(c) $1 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} - \frac{4}{x^3} + \frac{5}{x^4} - \frac{6}{x^5} + \frac{7}{x^6}$.

4. Calcule a soma:

(a) Dos primeiros 100 termos da progressão aritmética de razão $r = \frac{1}{2}$ e primeiro termo $a = 1$.

(b) $\sum_{i=1}^{100} \sum_{j=1}^{51} [i \cos(j\pi)]$.

5. Prove que para todos os números naturais n se tem

$$\sum_{i=1}^n (3i - 2) = \frac{n(3n - 1)}{2}$$

(a) usando propriedades dos somatórios.

(b) usando indução matemática.

6. Considere o seguinte algoritmo que calcula o valor da função var num inteiro $n \geq 1$.

```
Procedure var (n: inteiro positivo)
  var := 1/2
  for i = 1 to n
    var := (var + 1) / 2
```

Calcule $var(5)$. A que é igual $var(n)$ para $n \geq 1$ arbitrário?

7. (a) Determine o menor inteiro positivo n que satisfaz a desigualdade $3^n < n!$.

(b) Designando o inteiro da alínea anterior por n_1 , prove, usando o método de indução matemática, que para qualquer natural $n \geq n_1$,

$$3^n < n!.$$

8. (a) Quantas arestas tem o grafo G cuja matriz de adjacência é a matriz A ?

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(b) Desenhe o grafo G (com os vértices v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 dispostos por esta ordem num círculo, no sentido do movimento dos ponteiros do relógio, e marcando as arestas por a_1, a_2, \dots).

(c) G é euleriano? Em caso afirmativo, indique um caminho euleriano.
