Ano lectivo 2014/15 **Exame de Estruturas Discretas**

Lic.ª Eng. Informática 6/02/2015

SOLUÇÕES

---

1. (a) Duas fórmulas dizem-se logicamente equivalentes quando têm a mesma tabela de verdade.

   (b)

p	q	r	$(p \to q)$	$\wedge$	$(q \vee r)$	$\wedge$	$\neg q$	$\to$	$(\neg p \wedge r)$
V	V	V	V	V	V	F	F	V	F
V	V	F	V	V	V	F	F	V	F
V	F	V	F	F	V	F	V	V	F
V	F	F	F	F	F	F	V	V	F
F	V	V	V	V	V	F	F	V	V
F	V	F	V	V	V	F	F	V	F
F	F	V	V	V	V	V	V	V	V
F	F	F	V	F	F	F	V	V	F

   (c) Sim, pois $p \vee \neg p$ também é uma tautologia.

2. (a) V (b) F (c) F (d) V (e) F.

3. (a) ☐ ☒

   ☒ ☒

   (b) ☐ ☒

   ☐ ☒

4. (a)

$$\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=0}^{3} 2i(j+1) = \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} 2ij = 2\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} ij = 2\sum_{i=1}^{4}(i\sum_{j=1}^{4} j) = 2(\sum_{j=1}^{4} j)(\sum_{i=1}^{4} i)$$
$$= 2 \times (1+2+3+4)^2 = 2 \times 10^2 = 2 \times 100 = 200.$$

   (b) Usando o algoritmo de Euclides:

$$28 = 6 \times 4 + 4$$

$$6 = 1 \times 4 + \boxed{2}$$

$$4 = 2 \times 2 + 0.$$

   Portanto, $\text{mdc}(28, 6) = 2$.

(c) Como o grau de cada vértice de K_n é igual a $n-1$, o grafo é euleriano se e só se $n-1$ é par, isto é, n é ímpar.

Para ser semi-euleriano, tem que ter dois vértices de grau ímpar (portanto, n é necessariamente par) e os restantes de grau par. Como o grafo é regular, isto só é possível se tiver dois vértices de grau ímpar e nenhum de grau par. Portanto, $n = 2$.

(d) Pretende-se contar de quantas maneiras diferentes podemos preencher

$$\_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_$$

com duas vogais (entre quatro possíveis) e quatro consoantes (entre onze possíveis). Comecemos a construir essas sequências, escolhendo as duas posições onde vamos colocar as duas vogais (o que pode ser feito de $C(6, 2) = 15$ maneiras distintas). Em seguida escolhemos as duas vogais a colocar nessas duas posições. Como não é imposta nenhuma restrição, podemos repetir as vogais. Temos assim $\overline{P}(4, 2) = 4^2 = 16$ maneiras de fazer isso. Finalmente, escolhemos quatro consoantes para colocar nas quatro posições restantes, o que pode ser feito de $\overline{P}(11, 4) = 11^4$ maneiras distintas. Em conclusão, pelo princípio da multiplicação, existem

$$15 \times 16 \times 11^4$$

sequências.

5.
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

6. Cálculo da função de desencriptação:

$$q = f(p) = (3p+3) \bmod 23 \quad \Leftrightarrow \quad q \equiv_{23} 3p+3 \quad \Leftrightarrow \quad q-3 \equiv_{23} 3p \quad \Leftrightarrow \quad 8(q-3) \equiv_{23} p.$$

Portanto, $f^{-1}(q) = 8(q-3) \bmod 23$. Logo:

$$\begin{aligned} f^{-1}(\mathsf{G}) &= f^{-1}(6) = 24 \bmod 23 = 1 = \mathsf{B} \\ f^{-1}(\mathsf{U}) &= f^{-1}(19) = 128 \bmod 23 = 13 = \mathsf{O} \\ f^{-1}(\mathsf{O}) &= f^{-1}(13) = 80 \bmod 23 = 11 = \mathsf{M} \\ f^{-1}(\mathsf{I}) &= f^{-1}(8) = 40 \bmod 23 = 17 = \mathsf{S} \\ f^{-1}(\mathsf{Q}) &= f^{-1}(15) = 96 \bmod 23 = 4 = \mathsf{E} \\ f^{-1}(\mathsf{M}) &= f^{-1}(11) = 64 \bmod 23 = 18 = \mathsf{T} \\ f^{-1}(\mathsf{F}) &= f^{-1}(5) = 16 \bmod 23 = 16 = \mathsf{R}. \end{aligned}$$

Mensagem original: BOM SEMESTRE!

7. (a) $s(n) = s(n-1) + 1500$.

   (b) É evidente que

$$\begin{aligned} 95\,000 = s(50) &= s(49) + 1500 = s(48) + 2 \times 1500 = \\ &= s(47) + 3 \times 1500 = \cdots = s(0) + 50 \times 1500. \end{aligned}$$

   Portanto, $s(0) = 95\,000 - 50 \times 1500 = 95\,000 - 75\,000 = 20\,000$.

8. (a) $f(3) = 2f(2) + f(1) = 2(2f(1) + f(0)) + 1 = 4 + 1 = 5$.

   Alternativa: Como $f(0) = 0$ e $f(1) = 1$ então

$$f(2) = 2 \times 1 + 0 = 2,$$

$$f(3) = 2 \times 2 + 1 = 5,$$

$$f(4) = 2 \times 5 + 2 = 12,$$

$$f(5) = 2 \times 12 + 5 = 29,$$

$$f(6) = 2 \times 29 + 12 = 70.$$

   (b)

$$\begin{aligned} f(3n) &= 2f(3n-1) + f(3n-2) = \\ &= 2[2f(3n-2) + f(3n-3)] + f(3n-2) = 5f(3n-2) + 2f(3n-3). \end{aligned}$$

   (c) Seja $P(n)$ a afirmação

$$f(3n) \text{ é múltiplo de } 5.$$

   Queremos mostrar que $P(n)$ é V para qualquer natural n. Pelo método de indução matemática teremos que mostrar duas coisas:

   (1) <u>$P(1)$ é V</u>:

   Como vimos em (a), $f(3) = 5$.

   (2) <u>A implicação $P(k) \to P(k+1)$ é V para qualquer $k \geq 1$</u>:

   Suponhamos que $P(k)$ é V, isto é,

$$f(3k) \text{ é múltiplo de } 5.$$

   Então, usando a alínea (b), teremos

$$f(3(k+1)) = 5f(3(k+1)-2) + 2f(3(k+1)-3) = \underbrace{5f(3k+1)}_{\text{múltiplo de } 5} + 2\underbrace{f(3k)}_{\text{múltiplo de } 5}$$

   o que mostra precisamente que $f(3(k+1))$ também é múltiplo de 5, isto é, $P(k+1)$ também é V.

9. (a) Simulando o algoritmo com input $n = 12345$ e $b = 8$ obtemos:

$q := 12345$
$k := 0$
$q \neq 0$
  $a_0 := 12345 \texttt{ mod } 8 = 1$ (pois $12345 = 8 \times 1543 + 1$)
  $q := \lfloor 12345/8 \rfloor = 1543$
  $k := k + 1 = 1$
$q \neq 0$
  $a_1 := 1543 \texttt{ mod } 8 = 7$ (pois $1543 = 8 \times 192 + 7$)
  $q := \lfloor 1543/8 \rfloor = 192$
  $k := k + 1 = 2$
$q \neq 0$
  $a_2 := 192 \texttt{ mod } 8 = 0$ (pois $192 = 8 \times 24$)
  $q := \lfloor 192/8 \rfloor = 24$
  $k := k + 1 = 3$
$q \neq 0$
  $a_3 := 24 \texttt{ mod } 8 = 0$ (pois $24 = 8 \times 3$)
  $q := \lfloor 24/8 \rfloor = 3$
  $k := k + 1 = 4$
$q \neq 0$
  $a_4 := 3 \texttt{ mod } 8 = 3$ (pois $3 = 8 \times 0 + 3$)
  $q := \lfloor 3/8 \rfloor = 0$
  $k := k + 1 = 5$
$q = 0$ STOP

{a expansão de n na base b é o número $a_4a_3a_2a_1a_0 = 30071$ }

Portanto $(12345)_8 = 30071$.

(b) Como se observou na alínea anterior, em cada passo do ciclo `while` o algoritmo realiza uma divisão inteira (registadas entre parêntesis) que permite calcular simultaneamente os valores de a_k e q. Portanto, o número de divisões efectuadas é igual ao número de passos do ciclo, que depende evidentemente do número n. Mais exactamente, esse número é o inteiro d que satisfaz $b^{d-1} \leq n < b^d$ (no exemplo da alínea anterior, $4096 = 8^4 \leq 12345 < 8^5 = 32768$ pelo que $d = 5$). Logo, $d - 1 \leq \log_b n < d$. Assim, $d \leq \log_b n + 1$ o que mostra que o algoritmo tem complexidade $O(\log_b n)$.