Ano lectivo 2017/18 **Frequência de Estruturas Discretas**

Lic.ª Eng. Informática **PROVA A** 20/12/2017

Duração: 1h30m | Justifique convenientemente as suas respostas e indique os principais cálculos |

SOLUÇÕES

---

1. Iterando o algoritmo de Dijkstra obtemos:

Vértices	Etiquetas temporárias	Etiq. definitivas
A	0 (A)	0 (A)
B	3 (AB)	3 (AB)
C	~~6 (AC)~~ 5 (ABC)	5 (ABC)
D	1 (AD)	1 (AD)
E	~~8 (ADE)~~ 7(ABCE)	7 (ABCE)
F	3 (ADF)	3 (ADF)
G	10 (ABCEG)	10 (ABCEG)
H	~~10 (ADFH)~~ 9 (ABCEH)	9 (ABCEH)
I	~~14 (ABCEHI)~~ 13 (ABCEGI)	$\boxed{\text{13 (ABCEGI)}}$

2. Cálculo da função de desencriptação:

$$q = f(p) = (6p+1) \bmod 23 \quad \Leftrightarrow \quad q \equiv_{23} 6p + 31 \quad \Leftrightarrow \quad q-1 \equiv_{23} 6p \quad \Leftrightarrow \quad 4(q-1) \equiv_{23} p.$$

Portanto, $f^{-1}(q) = 4(q-1) \bmod 23$. Logo:

$$f^{-1}(\mathsf{H}) = f^{-1}(7) = 24 \bmod 23 = 1 = \mathsf{B}$$
$$f^{-1}(\mathsf{L}) = f^{-1}(10) = 36 \bmod 23 = 13 = \mathsf{O}$$
$$f^{-1}(\mathsf{B}) = f^{-1}(1) = 0 \bmod 23 = 0 = \mathsf{A}$$
$$f^{-1}(\mathsf{M}) = f^{-1}(11) = 40 \bmod 23 = 17 = \mathsf{S}$$
$$f^{-1}(\mathsf{I}) = f^{-1}(8) = 28 \bmod 23 = 5 = \mathsf{F}$$
$$f^{-1}(\mathsf{C}) = f^{-1}(2) = 4 \bmod 23 = 4 = \mathsf{E}$$
$$f^{-1}(\mathsf{F}) = f^{-1}(5) = 16 \bmod 23 = 16 = \mathsf{R}.$$
$$f^{-1}(\mathsf{D}) = f^{-1}(3) = 8 \bmod 23 = 8 = \mathsf{I}.$$

Mensagem original: BOAS FÉRIAS!

3. (a) Seja X_2 o subconjunto de X formado pelos números que são divisíveis por 2, ou seja, os números pares. É evidente que $|X_2| = \lfloor \frac{60}{2} \rfloor = 30$.

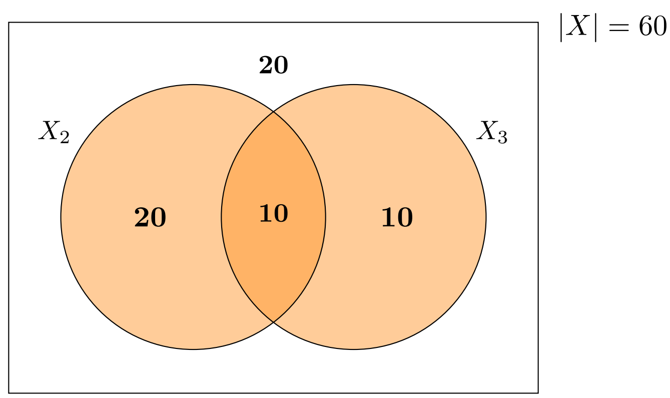
   (b) Seja X_3 o subconjunto de X formado pelos números que são divisíveis por 3, ou seja, os múltiplos de 3. Então $|X_3| = \lfloor \frac{60}{3} \rfloor = 20$.

(c) O número pedido é o cardinal do conjunto $\overline{X_2} \cap \overline{X_3} = X \setminus (X_2 \cup X_3)$. Então, pelo Princípio da Inclusão-Exclusão,

$$|\overline{X_2} \cap \overline{X_3}| = |X| - (|X_2| + |X_3| - |X_2 \cap X_3| = 60 - (30 + 20 - 10) = 20$$

uma vez que $X_2 \cap X_3$ é o conjunto dos múltiplos de 6 em X.

Em conclusão, a situação é a seguinte:



4. (a) Pela relação entre os graus dos vértices e o número de vértices de uma árvore sabemos que, em qualquer árvore com 9 vértices,

$$\sum_{i=1}^{9} g(v_i) = 2 \cdot (9 - 1) = 16.$$

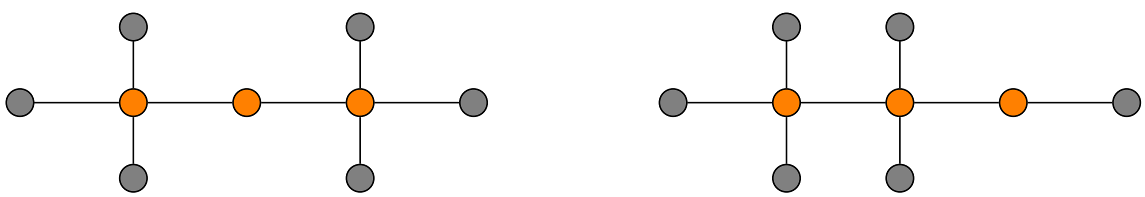
Isto mostra logo que é impossível termos 3 vértices de grau 4 pois, nesse caso, teríamos

$$\sum_{i=1}^{9} g(v_i) \geq 3 \cdot 4 + 6 = 18,$$

uma impossibilidade. Portanto, a nossa árvore terá no máximo 2 vértices de grau 4 e obrigatoriamente 6 vértices de grau 1 e 1 de grau 2:

$$16 = 4 + 4 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 2.$$

Por exemplo, podemos ter duas árvores nessas condições:



(b) Como $4 \times_7 2 = 1$, então

$$\begin{aligned} 2x \equiv_7 5 &\Leftrightarrow 4 \times_7 2 \times_7 x \equiv_7 4 \times_7 5 \\ &\Leftrightarrow x \equiv_7 6. \end{aligned}$$

Portanto, as soluções para x são os inteiros da forma $6 + 7k$:

$$-1 \xrightarrow{+7} \boxed{6} \xrightarrow{+7} \boxed{13} \xrightarrow{+7} \boxed{20} \xrightarrow{+7} \boxed{27} \xrightarrow{+7} \cdots$$

Quais deles pertencem ao conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, 1000\}$? Precisamente os números 6 (tomando $k = 0$), 13 (tomando $k = 1$), 20 (tomando $k = 2$), 27 (tomando $k = 3$), $\cdots$,1000 (note que o número 1000 é da forma $6 + 7k$ pois $1000 = 6 + 7 \times 142$). Uma vez que esta listagem começa em $k = 0$ e termina em $k = 142$, são precisamente 143 números.

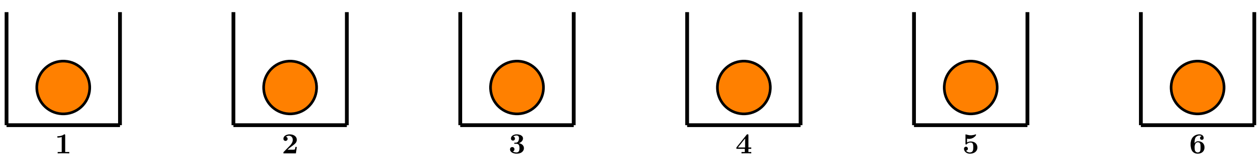
(c) É igual ao número de sequências binárias de comprimento 10 formadas por 4 zeros e 6 uns:

$$\underbrace{\_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_}_{\text{quatro ‘0’ + seis ‘1’}}\ \overset{0}{\_}\ \overset{0}{\_}$$

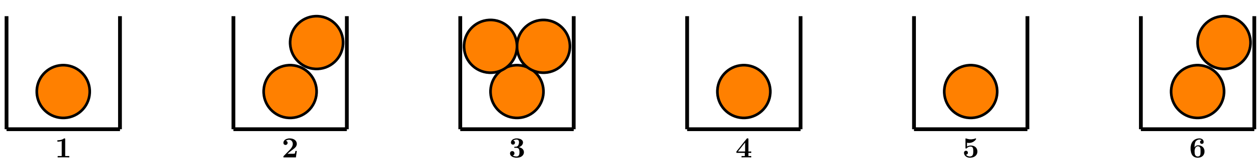
Comecemos por colocar os zeros. Para isso, escolhemos o subconjunto dos quatro lugares onde os colocamos. Isso pode ser feito de $C(10, 4)$ maneiras distintas. Nos seis lugares restantes não resta outra hipótese senão colocar os 6 uns. Assim, o número de sequências é igual a

$$C(10, 4) = \frac{10!}{4!\ 6!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{4 \times 3 \times 2} = 30 \times 7 = 210.$$

(d) Teremos primeiro que colocar uma bola em cada caixa para nenhuma fique vazia. Como as bolas são todas iguais, só temos uma maneira de fazer isso:



Portanto, o problema equivale a distribuir as 4 bolas restantes pelas 6 caixas. Cada uma dessas distribuições é uma combinação com repetição, de comprimento 4, formada pelas 6 etiquetas das caixas, pois colocar as 4 bolas corresponde a escolher o multiconjunto das etiquetas das 4 caixas onde são colocadas. Por exemplo, a distribuição



corresponde ao multiconjunto $\{2, 3, 3, 6\}$. Portanto, o número total é igual a

$$\overline{C}(6, 4) = C(9, 4) = \frac{9!}{4!\ 5!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6}{4 \times 3 \times 2} = 18 \times 7 = 126.$$

(e) Uma vez que $2310 = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11$, cada divisor de 2310 obtem-se com uma qualquer combinação dos primos $\{2, 3, 5, 7, 11\}$. Assim, os divisores que têm exactamente 3 primos na sua factorização prima resultam das combinações de $\{2, 3, 5, 7, 11\}$ de cardinal 3, ou seja,

$$C(5, 3) = \frac{5!}{3!\ 2!} = \frac{5 \times 4}{2} = 10.$$