










Na questão de escolha múltipla **1**, cada resposta certa terá a cotação máxima atribuída e cada resposta errada terá o valor negativo da metade dessa cotação. Nas questões restantes, justifique convenientemente as suas respostas e indique os principais cálculos.

Duração: 1h30m








1. Indique o valor de verdade (V: verdade, F: falso) das seguintes sentenças nos mundos **A** e **B** abaixo:










- (a)  $\forall x [\neg \exists y \text{BackOf}(y, x) \rightarrow (\text{Cube}(x) \wedge \text{Large}(x))]$ .
- (b)  $\exists x \text{Dodec}(x) \rightarrow \forall x \text{Dodec}(x)$ .
- (c)  $\exists x \exists y \forall z [\text{Cube}(z) \leftrightarrow ((z = x) \vee (z = y))]$ .

Mundo A

|          |  |   |   |  |   |   |   |
|----------|--|---|---|--|---|---|---|
| <i>d</i> |  |   |   |  |   |   |   |
|          |  |   |  |  | <i>e</i>  |  |   |
|          |  |   |   |  |   |   | <i>c</i>  |
|          |  |  |   |  |  |  |   |
|          |  |   |   |  |   |   |   |
|          |  | <i>b</i>  |   |  |   |   |   |
|          |  |  |   |  |   |   |  |
|          |  |   | <i>a</i>  |  |   |   |   |
|          |  |   |  |  |   |   |   |
|          |  |   |   |  |   |   |   |

Mundo B

|  |  |  |   |  |  |  |   |
|--|--|--|---|--|--|--|---|
|  | <i>d</i>   |  |   |  |  |  |   |
|  |   |  |   |  |  |  | <i>e</i>  |
|  |  |  |   |  |  |  |  |
|  |  |  |   |  |  |  |   |
|  | <i>f</i>   |  |   |  |  |  |   |
|  |  |  |   |  |  |  |   |
|  |  |  |   |  |  |  |  |
|  |  |  |   |  |  |  | <i>a</i>  |
|  |  |  |   |  |  |  |  |
|  |  |  |   |  |  |  |   |
|  |  |  |  |  |  |  |  |

- |   |  |  |
|---|--|--|
|  Tetraedro Pequeno |  Cubo Pequeno |  Dodecaedro Pequeno |
|  Tetraedro Médio   |  Cubo Médio   |  Dodecaedro Médio   |
|  Tetraedro Grande  |  Cubo Grande  |  Dodecaedro Grande  |

2. Traduza as seguintes sentenças para a linguagem do Tarski, usando os predicados

$Dodec(x)$ ,  $Cube(x)$ ,  $Large(x)$ ,  $SameSize(x, y)$ ,  $LeftOf(x, y)$ ,  $FrontOf(x, y)$ .

- (a)  $a$  é um cubo e está à esquerda de  $b$ .
- (b) Não é verdade que exista um dodecaedro à frente de  $b$ .
- (c) Todos os cubos são do mesmo tamanho.

3. Calcule: (a)  $\sum_{i=1}^{n-1} n$ . (b)  $\sum_{j=2}^{40} 2(j-22)$ .

4. Exprima a soma

$$a_7 + a_{14} + a_{21} + a_{28} + \cdots + a_{126}$$

na forma abreviada de somatório.

5. Considere a função  $h: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  definida por

$$h(n) = \begin{cases} 2 & \text{se } n = 1 \\ n(n+1) + h(n-1) & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

Usando o método de indução matemática prove que, para qualquer  $n \in \mathbb{N}$ :

(a)  $h(n) = \sum_{i=1}^n i(i+1)$ . (b)  $h(n) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$ .

6. Usando o exercício anterior:

(a) Calcule  $\sum_{i=1}^{300} i(i+1)$ . (b) Mostre que  $\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ .

7. Considere o grafo  $G$  com vértices  $v_1, v_2, v_3, v_4$  cuja matriz de incidência é a seguinte:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- (a) Indique a sequência de graus dos vértices de  $G$ .
  - (b) Escreva a matriz de adjacência  $A$  do grafo  $G$ .
  - (c) O que conta o elemento situado na linha 3 e coluna 1 de  $A^2$ ? Calcule-o.
  - (d) O grafo  $G$  é euleriano? É semi-euleriano? Indique um caminho de comprimento cinco de  $v_1$  para  $v_3$  sem repetição de arestas.
-