Ano lectivo 2018/19 **Frequência de Estruturas Discretas**

Lic.ª Eng. Informática **PROVA A** 21/11/2018

Na questão de escolha múltipla **1**, cada resposta certa terá a cotação máxima atribuída e cada resposta errada terá o valor negativo da metade dessa cotação. Nas questões restantes, justifique convenientemente as suas respostas e indique os principais cálculos.

SOLUÇÕES

1.

	Mundo A	Mundo B
1.	V	F
2.	V	F
3.	F	V

2. (a) $\texttt{Cube}(a) \wedge \texttt{LeftOf}(a,b)$.

   (b) $\neg\exists x\ [\texttt{Dodec}(x) \wedge \texttt{FrontOf}(x,b)]$.

   (c) $\forall x \forall y\ [\texttt{Cube}(x) \wedge \texttt{Cube}(y) \rightarrow \texttt{SameSize}(x,y)]$.

3. (a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} n = \underbrace{n+n+\cdots+n}_{(n-1)\text{ parcelas}} = (n-1)n.$

   (b)

$$\sum_{j=2}^{40} 2(j-22) = 2\left[\sum_{j=2}^{40} j - \sum_{j=2}^{40} 22\right] = 2\left[\sum_{j=1}^{40} j - 1 - (39\times 22)\right] = 2\left[\frac{40\times 41}{2} - 1 - 858\right]$$

$$= 2\left[(20\times 41) - 859\right] = 2(820-859) = 2\times(-39) = -78.$$

4. $\displaystyle\sum_{i=1}^{18} a_{7i}$ (pois $126 = 7\times 18$).

5. (a) Seja $P(n)$ a identidade

$$h(n) = \sum_{i=1}^{n} i(i+1).$$

Queremos mostrar que $P(n)$ é V para qualquer $n\in\mathbb{N}$. Pelo método de indução matemática teremos que mostrar duas coisas:

(1) $\underline{P(1)\text{ é V}}$: É evidente, pois $\displaystyle\sum_{i=1}^{1} i(i+1) = 1\times 2 = 2$ e, por outro lado, $h(1)=2$.

(2) <u>A implicação $P(k) \rightarrow P(k+1)$ é V para qualquer $k \geq 1$</u>: Suponhamos que $P(k)$ é V, ou seja,

$$\sum_{i=1}^{k} i(i+1) = h(k).$$

Então,

$$\sum_{i=1}^{k+1} i(i+1) = \sum_{i=1}^{k} i(i+1) + (k+1)(k+2) = h(k) + (k+1)(k+2).$$

Mas, pela defininição de h, como $k+1 \geq 2$ quando $k \geq 1$, temos $h(k+1) = (k+1)(k+2)+h(k)$, pelo que

$$\sum_{i=1}^{k+1} i(i+1) = h(k+1).$$

Portanto, $P(k+1)$ também é uma proposição V.

(b) Seja $P(n)$ a identidade

$$h(n) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

Queremos mostrar que $P(n)$ é V para qualquer $n \in \mathbb{N}$. Pelo método de indução matemática teremos que mostrar duas coisas:

(1) <u>$P(1)$ é V</u>: É evidente, pois $\frac{1\times2\times3}{3} = 2$ e, por outro lado, $h(1) = 2$.

(2) <u>A implicação $P(k) \rightarrow P(k+1)$ é V para qualquer $k \geq 1$</u>: Suponhamos que $P(k)$ é V, ou seja,

$$h(k) = \frac{k(k+1)(k+2)}{3}.$$

Então, pela definição de h, como $k+1 \geq 2$, temos

$$\begin{aligned} h(k+1) &= (k+1)(k+2) + h(k) = (k+1)(k+2) + \frac{k(k+1)(k+2)}{3} \\ &= \frac{3(k+1)(k+2) + k(k+1)(k+2)}{3} = \frac{(k+1)(k+2)(3+k)}{3}, \end{aligned}$$

o que mostra que $P(k+1)$ também é uma proposição V.

6. (a) Pelo exercício anterior sabemos que

$$\sum_{i=1}^{n} i(i+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} \quad (*).$$

Portanto, $\displaystyle\sum_{i=1}^{300} i(i+1) = \frac{300 \times 301 \times 302}{3} = 30100 \times 302 = 9090200.$

(b) Em particular, a fórmula $(*)$ dada pelo exercício anterior, diz-nos que

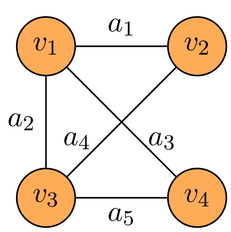
$$\sum_{i=1}^{n} (i^2 + i) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} i^2 &= \frac{n(n+1)(n+2)}{3} - \sum_{i=1}^{n} i = \\
&= \frac{n(n+1)(n+2)}{3} - \frac{n(n+1)}{2} \\
&= \frac{2n(n+1)(n+2) - 3n(n+1)}{6} \\
&= \frac{n(n+1)[2(n+2)-3]}{6} \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.
\end{aligned}$$

7. (a) $g(v_1) = 3$, $g(v_2) = 2$, $g(v_3) = 3$, $g(v_4) = 2$ (soma dos elementos em cada linha de B).

(b) Uma vez que G é o grafo



então

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(c) Por um teorema estudado nas aulas, o elemento α_{31} de A^2 conta o número de caminhos de comprimento dois (isto é, com duas arestas) que ligam v_3 a v_1 em G. Calculemo-lo:

$$\alpha_{31} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 + 1 = 2.$$

(d) G não é euleriano uma vez que tem vértices de grau ímpar. É semi-euleriano, pois tem precisamente dois vértices de grau ímpar, v_1 e v_3. Portanto, existe um caminho semi-euriano que liga v_1 a v_3: