

5. Primeira forma fundamental

A primeira coisa que um habitante de uma superfície, com alguma curiosidade pela geometria, talvez queira saber é como medir a distância entre dois pontos da superfície. Evidentemente, esta distância será, em geral, diferente da distância medida por um habitante do espaço tridimensional pois o segmento de recta que dá o caminho mais curto entre dois pontos de \mathbb{R}^3 não está, em geral, contido na superfície.

Nesta secção estudaremos o instrumento que nos permite calcular comprimentos, ângulos e áreas numa superfície: a primeira forma fundamental da superfície.

Se $\gamma(t) = \sigma(x(t), y(t))$ define uma curva numa superfície S , totalmente descrita por um mapa σ , o comprimento do arco de γ desde $\gamma(t_0)$ até $\gamma(t_1)$ é dado por

$$s = \int_{t_0}^{t_1} \|\gamma'(t)\| dt.$$

Mas, pelo Teorema da Função Composta,

$$\gamma'(t) = x'(t) \frac{\partial \sigma}{\partial x}(x(t), y(t)) + y'(t) \frac{\partial \sigma}{\partial y}(x(t), y(t)),$$

pelo que

$$\begin{aligned} \|\gamma'(t)\|^2 &= \left(x'(t) \frac{\partial \sigma}{\partial x} + y'(t) \frac{\partial \sigma}{\partial y} \mid x'(t) \frac{\partial \sigma}{\partial x} + y'(t) \frac{\partial \sigma}{\partial y} \right) \\ &= x'(t)^2 \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} \mid \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right) + 2x'(t)y'(t) \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} \mid \frac{\partial \sigma}{\partial y} \right) + y'(t)^2 \left(\frac{\partial \sigma}{\partial y} \mid \frac{\partial \sigma}{\partial y} \right). \end{aligned}$$

Denotando

$$\left(\frac{\partial \sigma}{\partial x}(q) \mid \frac{\partial \sigma}{\partial x}(q) \right), \quad \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x}(q) \mid \frac{\partial \sigma}{\partial y}(q) \right) \quad \text{e} \quad \left(\frac{\partial \sigma}{\partial y}(q) \mid \frac{\partial \sigma}{\partial y}(q) \right)$$

por, respectivamente, $E(q)$, $F(q)$ e $G(q)$ (ou, abreviadamente, E , F e G), podemos escrever

$$s = \int_{t_0}^{t_1} \left(Ex'(t)^2 + 2Fx'(t)y'(t) + Gy'(t)^2 \right)^{\frac{1}{2}} dt.$$

A matriz

$$\mathcal{F}_I = \begin{bmatrix} E(q) & F(q) \\ F(q) & G(q) \end{bmatrix}$$

é a matriz da chamada *primeira forma fundamental* do mapa σ de S em $p = \sigma(q)$, ou seja, da forma bilinear simétrica

$$\begin{aligned} I_p : T_p S \times T_p S &\rightarrow \mathbb{R} \\ (v, w) &\mapsto (v \mid w). \end{aligned}$$

De facto, se

$$v = v_1 \frac{\partial \sigma}{\partial x}(q) + v_2 \frac{\partial \sigma}{\partial y}(q) \quad \text{e} \quad w = w_1 \frac{\partial \sigma}{\partial x}(q) + w_2 \frac{\partial \sigma}{\partial y}(q)$$

então

$$\begin{aligned}(v | w) &= v_1 w_1 E(q) + v_1 w_2 F(q) + v_2 w_1 F(q) + v_2 w_2 G(q) \\ &= \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E(q) & F(q) \\ F(q) & G(q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Daqui em diante cometeremos o abuso de linguagem de chamar primeira forma fundamental de σ em p aos escalares $E(q)$, $F(q)$ e $G(q)$.

Exemplos 5.1. (1) Para o plano parametrizado por $\sigma(x, y) = p + xu + yv$ (ou seja, o plano que passa por um dado ponto p e tem a direcção dos vectores u e v , unitários, ortogonais) $\frac{\partial \sigma}{\partial x}(x, y) = u$ e $\frac{\partial \sigma}{\partial y}(x, y) = v$. Assim, $E(x, y) = (u | u) = \|u\|^2 = 1$, $G(x, y) = \|v\|^2 = 1$ e $F(x, y) = (u | v) = 0$.

(2) O cilindro circular vertical, parametrizado por $\sigma(x, y) = (\cos x, \sin x, y)$, tem como primeira forma fundamental $E(x, y) = 1$, $F(x, y) = 0$ e $G(x, y) = 1$, tal como o plano.

(3) Para a parametrização da esfera em termos da latitude e longitude,

$$\sigma(\theta, \varphi) = (\cos \theta \cos \varphi, \cos \theta \sin \varphi, \sin \theta),$$

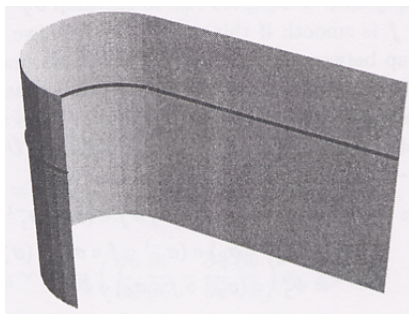
$\frac{\partial \sigma}{\partial \theta}(\theta, \varphi) = (-\sin \theta \cos \varphi, -\sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)$ e $\frac{\partial \sigma}{\partial \varphi}(\theta, \varphi) = (-\cos \theta \sin \varphi, \cos \theta \cos \varphi, 0)$. Portanto a primeira forma fundamental é $E(\theta, \varphi) = 1$, $F(\theta, \varphi) = 0$ e $G(\theta, \varphi) = \cos^2 \theta$. Isto quer dizer que o comprimento, de $\gamma(t_0)$ a $\gamma(t_1)$, de qualquer curva na esfera, dada por

$$\gamma(t) = \left(\cos u(t) \cos v(t), \cos u(t) \sin v(t), \sin u(t) \right),$$

é igual a

$$\int_{t_0}^{t_1} (u'(t)^2 + \cos^2 \theta v'(t)^2)^{\frac{1}{2}} dt.$$

Nos exemplos (1) e (2) acima, a primeira forma fundamental é a mesma. A justificação geométrica para isto é a seguinte: uma folha de papel plana pode ser enrolada num cilindro, de modo óbvio, sem deformação;



se traçarmos uma curva na folha plana, depois de enrolada torna-se uma curva no cilindro e, como não houve deformação, os comprimentos de ambas as curvas coincidem. O mesmo já não se passa com a esfera e o plano.

Este tipo de questão geométrica pode ser abordada com o auxílio do cálculo diferencial sobre uma superfície apresentado no final da Secção 2. Com efeito, a transformação geométrica do plano no cilindro que referimos acima é um difeomorfismo especial, como veremos em seguida.

Definição. Um difeomorfismo $f : S_1 \rightarrow S_2$ é uma *isometria* se, para cada curva γ em S_1 , a curva $f \circ \gamma$ em S_2 tem comprimento igual ao de γ . Se existir uma isometria $f : S_1 \rightarrow S_2$, diz-se que S_1 e S_2 são superfícies *isométricas*.

Teorema 5.2. *Um difeomorfismo $f : S_1 \rightarrow S_2$ é uma isometria se e só se, para cada mapa σ_1 de um atlas de S_1 , as primeiras formas fundamentais de σ_1 e $f \circ \sigma_1$ são idênticas.*

Demonstração: Como o comprimento de uma curva em S pode ser calculado como a soma dos comprimentos dos arcos de curva em que cada um é descrito por um único mapa do atlas de S , podemos supor que S_1 e S_2 estão descritos por uma parametrização global.

Sejam então $\sigma_1 : U \rightarrow S_1$ um mapa global de S_1 , $\sigma_2 = f \circ \sigma_1 : U \rightarrow S_2$ o correspondente mapa de S_2 e E_1, F_1, G_1 e E_2, F_2, G_2 as primeiras formas fundamentais de σ_1 e σ_2 , respectivamente.

“ \Leftarrow ”: Se $E_1 = E_2, F_1 = F_2$ e $G_1 = G_2$ e $\gamma(t) = \sigma_1(u(t), v(t))$ define uma curva arbitrária em S_1 , o comprimento de γ de $\gamma(t_0)$ a $\gamma(t_1)$, isto é, o integral

$$\int_{t_0}^{t_1} (E_1 u'(t)^2 + 2F_1 u'(t)v'(t) + G_1 v'(t)^2)^{\frac{1}{2}} dt$$

é evidentemente igual ao comprimento da curva $\sigma_2(u(t), v(t)) = f \circ \sigma_1(u(t), v(t)) = f \circ \gamma(t)$, de $f(\gamma(t_0))$ a $f(\gamma(t_1))$.

“ \Rightarrow ”: Reciprocamente, se f é uma isometria então, qualquer que seja a curva $\gamma(t) = \sigma_1(u(t), v(t))$ em S_1 de domínio $I = (\alpha, \beta)$, a curva $f \circ \gamma(t) = \sigma_2(u(t), v(t))$ tem o mesmo comprimento. Portanto, para quaisquer $t_0, t_1 \in I$,

$$\int_{t_0}^{t_1} (E_1 u'(t)^2 + 2F_1 u'(t)v'(t) + G_1 v'(t)^2)^{\frac{1}{2}} dt = \int_{t_0}^{t_1} (E_2 u'(t)^2 + 2F_2 u'(t)v'(t) + G_2 v'(t)^2)^{\frac{1}{2}} dt$$

Isto implica que

$$E_1 u'(t)^2 + 2F_1 u'(t)v'(t) + G_1 v'(t)^2 = E_2 u'(t)^2 + 2F_2 u'(t)v'(t) + G_2 v'(t)^2 \quad (5.2.1)$$

para qualquer $t \in I$. Fixemos $t_0 \in I$ e sejam $u_0 = u(t_0)$ e $v_0 = v(t_0)$. Então:

- É evidente que existe um sub-intervalo J de I contendo t_0 tal que, para cada $t \in J$, $(u_0 + t - t_0, v_0) \in U$. Logo $\gamma_1(t) = \sigma_1(u_0 + t - t_0, v_0)$ define uma curva $\gamma_1 : J \rightarrow S_1$. Para esta curva particular, a igualdade (5.2.1) diz-nos que $E_1 = E_2$, pois neste caso $u'(t) = 1$ e $v'(t) = 0$.

- Analogamente, podemos considerar a curva γ_2 definida por $\gamma_2(t) = \sigma_1(u_0, v_0 + t - t_0)$. Neste caso $u'(t) = 0$ e $v'(t) = 1$ pelo que, por (5.2.1), $G_1 = G_2$.
- Finalmente, considerando a curva γ_3 dada por $\gamma_3(t) = (u_0 + t - t_0, v_0 + t - t_0)$, podemos concluir que $E_1 + 2F_1 + G_1 = E_2 + 2F_2 + G_2$, donde $F_1 = F_2$. ■

Exemplo. Seja S_1 a fita infinita no plano OYZ dada por $0 < y < 2\pi$ e seja S_2 o cilindro circular vertical dado por $x^2 + y^2 = 1$, com excepção dos pontos da recta $x = 1, y = 0$. Então, S_1 é coberto pela parametrização global $\sigma_1(u, v) = (0, u, v)$, e S_2 por $\sigma_2(u, v) = (\cos u, \sin u, v)$, com $(u, v) \in (0, 2\pi) \times \mathbb{R}$ em ambos os casos. A função $f : S_1 \rightarrow S_2$ que aplica $\sigma_1(u, v)$ em $\sigma_2(u, v)$ é uma isometria pois, como vimos nos Exemplos 5.1, σ_1 e σ_2 têm a mesma primeira forma fundamental.

Um argumento análogo também mostra que uma parte do cone circular é isométrica a parte do plano. Isto tudo generaliza-se de forma óbvia a cilindros e cones generalizados.

Vejam agora a questão da medição de ângulos numa superfície.

Sejam γ_1 e γ_2 duas curvas, numa superfície S , que se intersectam num dado ponto $p = \gamma_1(t_1) = \gamma_2(t_2)$. Então $\gamma_1(t) = \sigma(u_1(t), v_1(t))$ e $\gamma_2(t) = \sigma(u_2(t), v_2(t))$. O ângulo de intersecção, no ponto p , das curvas γ_1 e γ_2 é definido como sendo o ângulo θ formado pelos vectores $\gamma_1'(t_1)$ e $\gamma_2'(t_2)$. Portanto

$$\cos \theta = \frac{(\gamma_1'(t_1) | \gamma_2'(t_2))}{\|\gamma_1'(t_1)\| \|\gamma_2'(t_2)\|}.$$

Mas

$$\gamma_1'(t_1) = u_1'(t_1) \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u_1(t_1), v_1(t_1)) + v_1'(t_1) \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u_1(t_1), v_1(t_1))$$

e

$$\gamma_2'(t_2) = u_2'(t_2) \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u_2(t_2), v_2(t_2)) + v_2'(t_2) \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u_2(t_2), v_2(t_2)),$$

pelo que $(\gamma_1'(t_1) | \gamma_2'(t_2)) = Eu_1'(t_1)u_2'(t_2) + F(u_1'(t_1)v_2'(t_2) + v_1'(t_1)u_2'(t_2)) + Gv_1'(t_1)v_2'(t_2)$ e, conseqüentemente,

$$\cos \theta = \frac{Eu_1'(t_1)u_2'(t_2) + F(u_1'(t_1)v_2'(t_2) + v_1'(t_1)u_2'(t_2)) + Gv_1'(t_1)v_2'(t_2)}{(Eu_1'(t_1)^2 + 2Fu_1'(t_1)v_1'(t_1) + Gv_1'(t_1)^2)^{\frac{1}{2}}(Eu_2'(t_2)^2 + 2Fu_2'(t_2)v_2'(t_2) + Gv_2'(t_2)^2)^{\frac{1}{2}}}$$

ou, abreviadamente,

$$\cos \theta = \frac{Eu_1'u_2' + F(u_1'v_2' + v_1'u_2') + Gv_1'v_2'}{(Eu_1'^2 + 2Fu_1'v_1' + Gv_1'^2)^{\frac{1}{2}}(Eu_2'^2 + 2Fu_2'v_2' + Gv_2'^2)^{\frac{1}{2}}}. \quad (5.2.2)$$

Exemplo. Dada uma parametrização $\sigma : U \rightarrow S$ duma superfície S , $\gamma_1(t) = \sigma(a, t)$ e $\gamma_2(t) = \sigma(t, b)$ (a e b constantes adequadas) definem duas curvas em S , chamadas *curvas paramétricas*. Estas curvas intersectam-se no ponto $\sigma(a, b)$ da superfície. Então, pela fórmula (5.2.2), o ângulo de intersecção θ é igual a

$$\arccos \frac{F}{\sqrt{EG}}.$$

Portanto, θ é igual a $\pi/2$ (diz-se neste caso que a parametrização é *ortogonal*) exactamente quando $F = 0$.

Definição. Um difeomorfismo $f : S_1 \rightarrow S_2$ diz-se *conformal* se, para quaisquer curvas γ_1 e γ_2 em S_1 que se intersectam, o ângulo de intersecção das curvas $f \circ \gamma_1$ e $f \circ \gamma_2$ em S_2 é igual ao ângulo de intersecção de γ_1 e γ_2 .

Teorema 5.3. *Um difeomorfismo $f : S_1 \rightarrow S_2$ é conformal se e só se, para cada mapa σ_1 dum atlas de S_1 , as primeiras formas fundamentais de σ_1 e $f \circ \sigma_1$ são proporcionais, ou seja, $E_2 = \lambda E_1, F_2 = \lambda F_1$ e $G_2 = \lambda G_1$ para alguma função suave $\lambda : U \rightarrow \mathbb{R}^+$.*

Demonstração: É, em termos gerais, análoga à demonstração do teorema anterior mas mais longa e exigente no cálculo. Por estas razões omitimo-la. ■

Exemplos. (1) Toda a isometria é conformal. O recíproco não é verdadeiro, como veremos já de seguida.

(2) Consideremos a esfera unitária definida por $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ e recordemos a projecção estereográfica

$$\begin{aligned} \sigma_N^{-1} : S^2 \setminus \{(0, 0, 1)\} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) &\longmapsto \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z} \right). \end{aligned}$$

Provemos que, vista como uma aplicação de $S^2 \setminus \{(0, 0, 1)\}$ no plano horizontal $z = 0$, ou seja, como

$$\begin{aligned} f : S^2 \setminus \{(0, 0, 1)\} &\longrightarrow \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\} \\ (x, y, z) &\longmapsto \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}, 0 \right) \end{aligned}$$

é conformal. Para isso consideremos a parametrização global

$$\sigma_N(x, y) = \left(\frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1} \right) \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2)$$

de $S^2 \setminus \{(0, 0, 1)\}$. Os coeficientes da respectiva primeira forma fundamental são

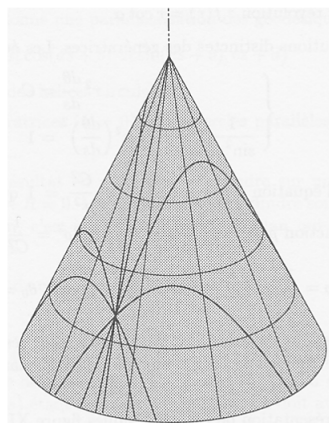
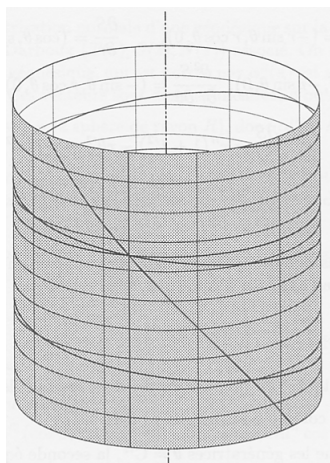
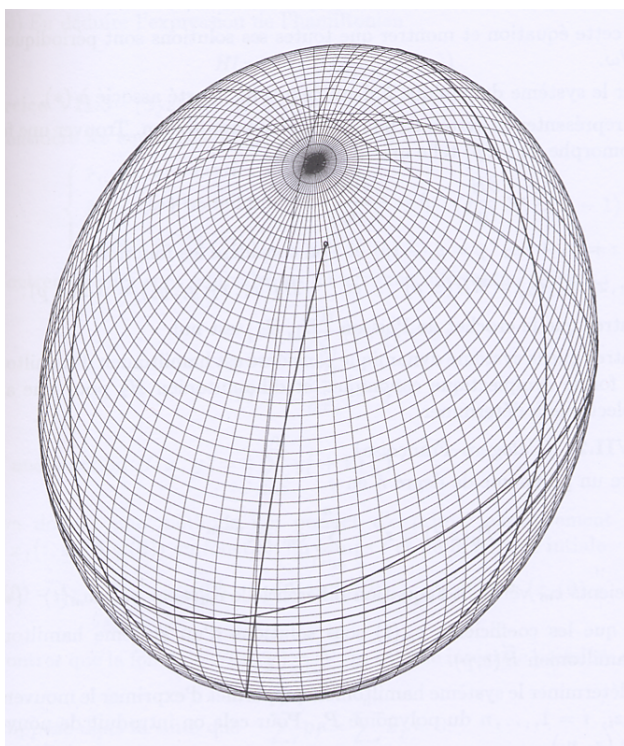
$$E_1(x, y) = \frac{4}{(x^2 + y^2 + 1)^2}, \quad F_1(x, y) = 0 \quad \text{e} \quad G_1(x, y) = \frac{4}{(x^2 + y^2 + 1)^2}.$$

Por outro lado, como a primeira forma fundamental do mapa $f \circ \sigma_N(x, y) = (x, y, 0)$ do plano horizontal é $E_2(x, y) = 1, F_2(x, y) = 0$ e $G_2(x, y) = 1$, podemos concluir que

$$E_1(x, y) = \lambda(x, y)E_2(x, y), \quad F_1(x, y) = \lambda(x, y)F_2(x, y) \quad \text{e} \quad G_1(x, y) = \lambda(x, y)G_2(x, y)$$

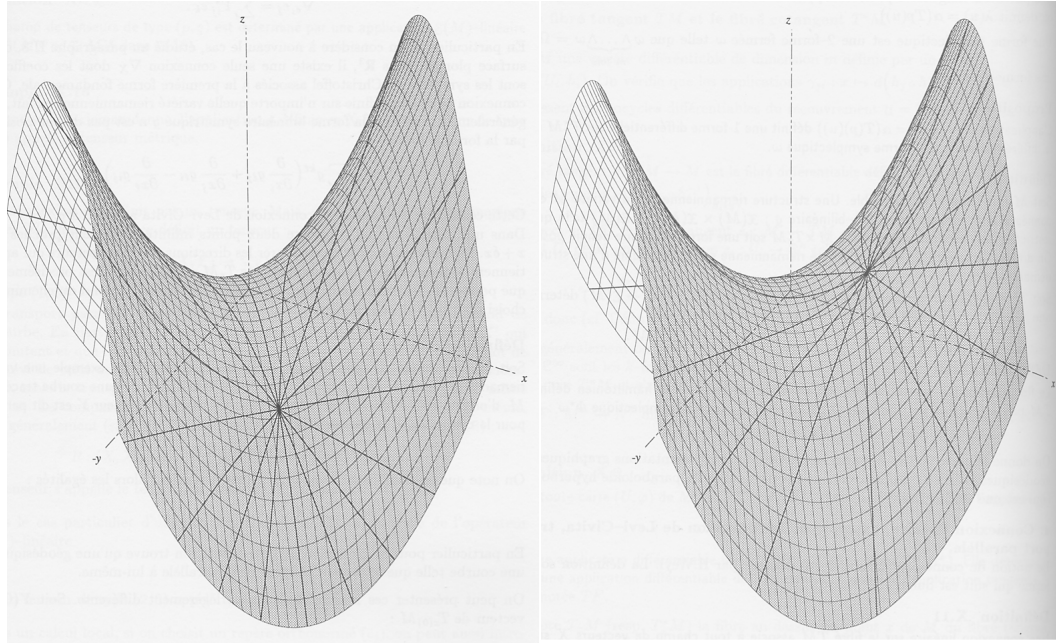
para $\lambda(x, y) = 4/(x^2 + y^2 + 1)^2$. Logo f é conformal. É pois um exemplo duma aplicação conformal que não é uma isometria.

Fixados dois pontos A, B sobre uma superfície S , chama-se *arco geodésico* de extremos A, B sobre S a uma curva em S , desde A até B , que tenha comprimento mínimo em relação a qualquer outra nas mesmas condições. Dá-se o nome de *geodésica* de S a toda a curva γ nesta superfície que contenha um arco geodésico para cada par de pontos de γ (cf. Exercício 4.11). Por exemplo, no plano as geodésicas são evidentemente as rectas, enquanto na esfera as geodésicas são circunferências de círculo máximo. Noutras superfícies, a determinação das geodésicas é mais complicada. Por exemplo, as figuras seguintes mostram uma geodésica do elipsóide $(1/5)x^2 + (2/5)y^2 + z^2 = 1$, a partir do ponto de coordenadas $x = 3/5, y = 1/5$ (utilizamos um traço mais fino quando a geodésica passa pela parte de trás do elipsóide) e geodésicas sobre um cilindro e um cone de revolução:



A figura seguinte mostra algumas geodésicas do parabolóide hiperbólico $z = xy$ a

partir, respectivamente, do ponto $(5, -5, -25)$ e do ponto $(5, 2, 10)$ (observe que, entre elas, em cada caso, se encontram duas rectas):



As geodésicas e os mapas conformais têm obviamente um grande interesse em cartografia e navegação. Por exemplo, numa viagem marítima é natural que se procure seguir o caminho mais curto, ou seja, o arco *geodésico*, para não se perder tempo inutilmente (tal é o objectivo da chamada navegação *ortodrómica*). Todavia, este objectivo nunca pode, por diversas razões, ser totalmente atingido na prática. Frequentemente há conveniência em que o rumo se mantenha constante, isto é, que o eixo do barco forme sempre um mesmo ângulo com a linha Norte-Sul; nesta situação, o barco irá descrevendo sobre o mar uma curva que corta os meridianos segundo um ângulo constante (os mapas conformais têm assim um grande interesse); mas sucede que esta curva — chamada *loxodromia* — não é uma geodésica (por exemplo, se o barco se deslocar na direcção Este-Oeste, a linha descrita será um paralelo, que não é em geral um arco de círculo máximo). A navegação loxodrómica pode contudo ser utilizada em trajectos curtos porque então a loxodromia não se afasta muito da geodésica. Para trajectos mais longos, convirá usar uma curva composta de arcos de loxodromia, inscrita no arco geodésico.

Consideremos de novo a projecção estereográfica da esfera sobre o plano. Trata-se, como vimos, duma representação planar conformal da esfera; as imagens dos meridianos serão rectas que passam pelo centro C da esfera e as imagens dos paralelos serão circunferências de centro C ; uma loxodromia irá pois projectar-se numa curva *isógona* (isto é, que mantém o mesmo ângulo) relativamente às rectas que passam por C , ou seja, uma espiral logarítmica. Todavia, para a navegação, o ideal será encontrar um mapa conformal da esfera no qual as imagens dos meridianos sejam rectas paralelas entre si, pois que, nesse caso, a imagem da loxodromia será manifestamente uma recta. Isto foi primeiramente observado e estudado pelo matemático português Pedro Nunes

(1502-1578). Um tal mapa foi depois concebido em 1569 por Mercator. A projecção de Mercator (veja os Exercícios 3.7 e 3.8) é utilizada em muitos mapas terrestres e apresenta apenas o inconveniente de, sendo os pólos afastados para distância infinita do equador, as regiões próximas dos pólos aparecerem excessivamente dilatadas e deformadas.

O interesse das aplicações conformais não se limita de maneira nenhuma à cartografia. Trata-se de um dos assuntos mais importantes da Análise moderna.

É também possível deduzir uma fórmula que permite calcular a área $\mathcal{A}(\mathcal{R})$ duma região $\mathcal{R} \subseteq S$, contida num mapa $\sigma : U \rightarrow W \subseteq S$, a partir da primeira forma fundamental. Com efeito, pode provar-se que

$$\mathcal{A}(\mathcal{R}) = \int \int_{\sigma^{-1}(\mathcal{R})} \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial x}(x, y) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial y}(x, y) \right\| dx dy$$

e, como

$$\left\| \frac{\partial \sigma}{\partial x} \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial y} \right\|^2 = \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial y} \mid \frac{\partial \sigma}{\partial x} \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial y} \right) = \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} \mid \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \sigma}{\partial y} \mid \frac{\partial \sigma}{\partial y} \right) - \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} \mid \frac{\partial \sigma}{\partial y} \right)^2 = EG - F^2,$$

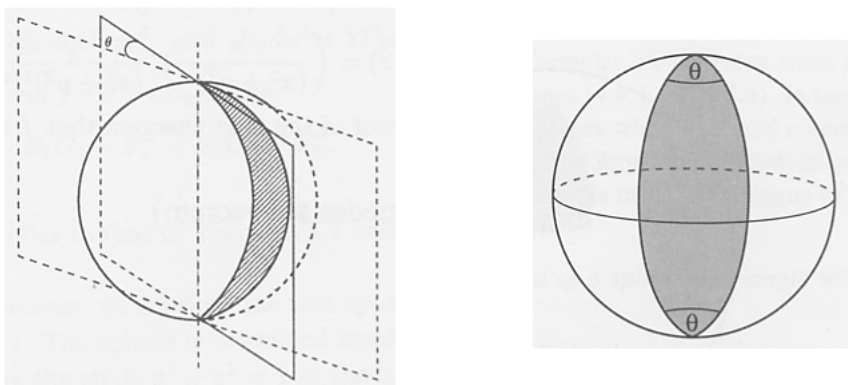
$$\mathcal{A}(\mathcal{R}) = \int \int_{\sigma^{-1}(\mathcal{R})} \sqrt{EG - F^2} dx dy.$$

Note que, por σ ser regular,

$$EG - F^2 > 0 \tag{5.3.1}$$

em qualquer ponto.

Exemplo 5.4. Determinemos a área dum *fuso* numa esfera de raio r , isto é, a região compreendida entre dois arcos de círculo máximo com ângulo de intersecção θ :



É claro que podemos assumir que as circunferências de círculo máximo se intersectam nos pólos (são pois meridianos), porque podemos sempre por uma rotação da esfera — o que não altera as áreas, pois a aplicação dum movimento rígido a uma superfície não altera a primeira forma fundamental — chegar a esta situação.

Para calcular a área observemos (recorde o Exemplo 5.1(3)) que, para o mapa

$$\sigma(u, v) = (r \cos u \cos v, r \cos u \sin v, r \sin u),$$

$EG - F^2 = r^4 \cos^2 u$. Então a área do fuso é igual a

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^\theta r^2 \cos u \, du \, dv = 2\theta r^2.$$

Em particular, para $\theta = 2\pi$ obtemos o valor da área da esfera, ou seja, $4\pi r^2$.

Definição. Um difeomorfismo $f : S_1 \rightarrow S_2$ diz-se *equiareal* se aplica cada região de S_1 numa região de S_2 com igual área.

Teorema 5.5. *Um difeomorfismo $f : S_1 \rightarrow S_2$ é equiareal se e só se, para cada mapa σ_1 dum atlas de S_1 , as primeiras formas fundamentais de σ_1 e de $f \circ \sigma_1$ satisfazem*

$$E_1 G_1 - F_1^2 = E_2 G_2 - F_2^2.$$

Demonstração: Como a área duma região em S pode ser calculada como soma de áreas de sub-regiões em que cada sub-região é descrita por um único mapa do atlas de S , podemos supor que S_1 e S_2 estão descritas por uma parametrização global.

Sejam então $\sigma_1 : U \rightarrow S_1$ um mapa global de S_1 , $\sigma_2 = f \circ \sigma_1 : U \rightarrow S_2$ o correspondente mapa de S_2 e E_1, F_1, G_1 e E_2, F_2, G_2 as primeiras formas fundamentais de σ_1 e σ_2 , respectivamente. Um difeomorfismo $f : S_1 \rightarrow S_2$ é equiareal se e só se, para cada região \mathcal{R} de S_1 ,

$$\int \int_{\sigma_1^{-1}(\mathcal{R})} \sqrt{E_1 G_1 - F_1^2} \, dx \, dy = \int \int_{(f \circ \sigma_1)^{-1}(f(\mathcal{R}))} \sqrt{E_2 G_2 - F_2^2} \, dx \, dy,$$

ou seja,

$$\int \int_{\sigma_1^{-1}(\mathcal{R})} \sqrt{E_1 G_1 - F_1^2} \, dx \, dy = \int \int_{\sigma_1^{-1}(\mathcal{R})} \sqrt{E_2 G_2 - F_2^2} \, dx \, dy.$$

Isto equivale a dizer que

$$\sqrt{E_1 G_1 - F_1^2} = \sqrt{E_2 G_2 - F_2^2},$$

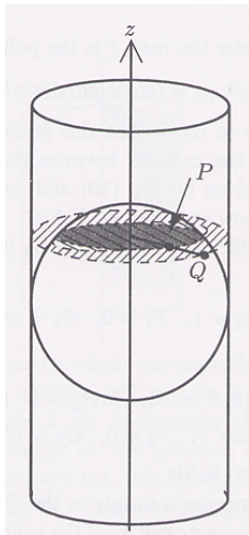
isto é,

$$E_1 G_1 - F_1^2 = E_2 G_2 - F_2^2,$$

pois $E_1 G_1 - F_1^2, E_2 G_2 - F_2^2 > 0$. ■

Exemplos. (1) Toda a isometria é equiareal. O recíproco não é verdadeiro, como veremos no exemplo seguinte.

(2) Consideremos a *projecção de Arquimedes* $f : P \mapsto Q$, da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ (menos os pólos norte e sul) no cilindro $x^2 + y^2 = 1$, definida do seguinte modo: para cada ponto $P \neq (0, 0, \pm 1)$ na esfera, existe uma única recta horizontal que passa por P e pelo eixo OZ ; esta recta intersecta o cilindro em dois pontos, um dos quais (que denotamos por Q) está mais perto de P .



Para determinarmos uma fórmula para f , sejam (x, y, z) as coordenadas cartesianas de P e (X, Y, Z) as de Q . Como o segmento PQ é paralelo ao plano XOY , temos $Z = z$ e $(X, Y) = \lambda(x, y)$ para algum escalar λ . Mas (X, Y, Z) está no cilindro logo $1 = X^2 + Y^2 = \lambda^2(x^2 + y^2)$ e, conseqüentemente, $\lambda = \pm(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$. Tomando o sinal + obtemos o ponto Q logo

$$f(x, y, z) = \left(\frac{x}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}}, \frac{y}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}}, z \right).$$

Teorema 5.6. [Teorema de Arquimedes] *A aplicação f é equiareal.*

Demonstração: Seja S_1 a esfera menos os pólos norte e sul, com o atlas consistindo nas duas parametrizações definidas por $\sigma_1(\theta, \varphi) = (\cos \theta \cos \varphi, \cos \theta \sin \varphi, \sin \theta)$ nos abertos $\{-\pi/2 < \theta < \pi/2, 0 < \varphi < 2\pi\}$ e $\{-\pi/2 < \theta < \pi/2, -\pi < \varphi < \pi\}$. A imagem de $\sigma_1(\theta, \varphi)$ por f é o ponto

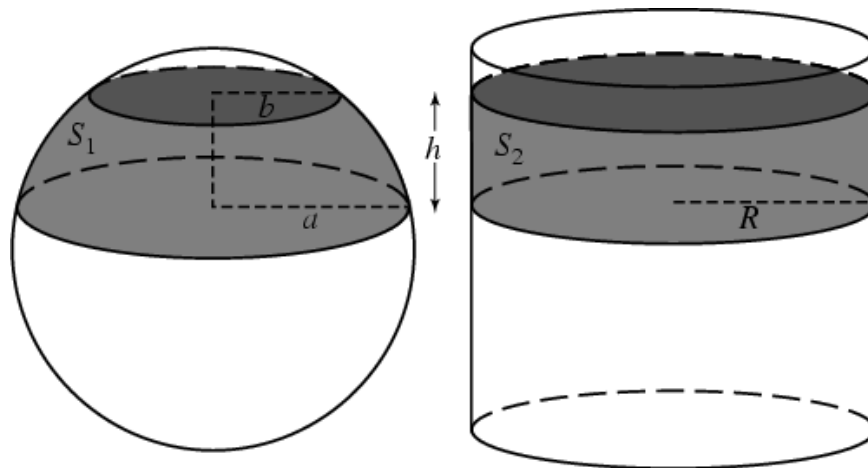
$$\sigma_2(\theta, \varphi) = (\cos \varphi, \sin \varphi, \sin \theta) \quad (5.6.1)$$

do cilindro. É fácil verificar que isto dá um atlas da superfície S_2 (parte do cilindro entre os planos $z = 1$ e $z = -1$) consistindo em duas parametrizações, ambas dadas pela equação (5.6.1) e definidas nos mesmos abertos do atlas de S_1 . Como $\sigma_2^{-1} \circ f \circ \sigma_1 = id$, é imediato que f é um difeomorfismo.

Por outro lado, calculámos no Exemplo 5.1(3) a primeira forma fundamental de σ_1 : $E_1 = 1, F_1 = 0, G_1 = \cos^2 \theta$. Para σ_2 obtemos, de forma similar, $E_2 = \cos^2 \theta, F_2 = 0, G_2 = 1$. Em conclusão, $E_1 G_1 - F_1^2 = E_2 G_2 - F_2^2$ e f é equiareal. ■

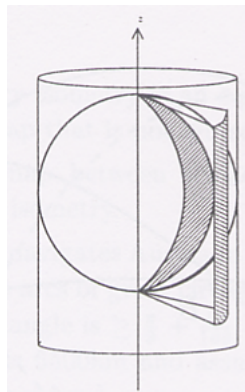
Este resultado foi provado por Arquimedes, que se orgulhava tanto dele que pediu que fosse gravado no seu túmulo. Segundo a lenda, tal foi feito pelo general romano Marcellus, que liderou a conquista de Siracusa na qual Arquimedes foi morto, em 212 A.C. Evidentemente, como Arquimedes não tinha o Cálculo Diferencial à sua disposição, a sua demonstração era muito diferente da que apresentámos aqui. Concretamente o que Arquimedes provou foi que se colocarmos uma esfera dentro dum cilindro com o

mesmo raio R , a área S_1 da superfície esférica da figura é igual à correspondente área S_2 da superfície cilíndrica (definida pelos mesmos planos horizontais) e igual a $2\pi Rh$.



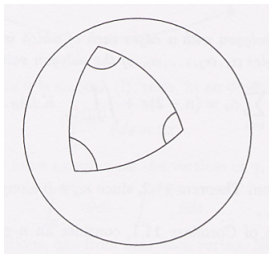
Os cartógrafos chamam ao processo de projectar uma esfera num cilindro seguido do desenrolar do cilindro no plano, *projecção cilíndrica equiareal*. O Teorema de Arquimedes mostra que esta projecção nos dá uma representação precisa das áreas, embora distorça a forma pois não existe nenhuma projecção que represente com precisão a área e a forma simultaneamente, como veremos mais adiante.

(3) O Teorema de Arquimedes pode ser usado para calcular de forma muito rápida a área do fuso determinada no Exemplo 5.4. Se θ é o ângulo de amplitude do fuso, a imagem do fuso pela aplicação f é um rectângulo curvo no cilindro de largura $r\theta$ e altura $2r$:



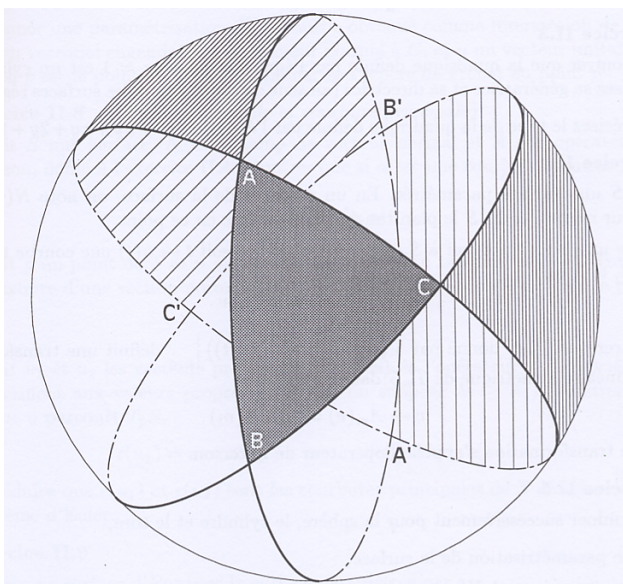
Se aplicarmos em seguida a isometria do cilindro no plano, este rectângulo curvo é transformado num rectângulo no plano, de largura $r\theta$ e altura $2r$. Pelo Teorema de Arquimedes o fuso tem a mesma área do rectângulo curvo e, como qualquer isometria é equiareal, tem a mesma área que o rectângulo plano, ou seja, $2\theta r^2$.

Do conhecimento da área dum fuso qualquer, podemos deduzir imediatamente uma fórmula para a área dum triângulo esférico. Um *triângulo esférico* é um triângulo numa esfera, cujos lados são arcos de círculo máximo:



Teorema 5.7. (Fórmula de Girard). *A área dum triângulo esférico com ângulos α, β e γ , numa esfera de raio r , é igual a $r^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi)$.*

Demonstração: Sejam A, B e C os vértices do triângulo correspondentes aos ângulos α, β e γ , respectivamente. As três circunferências de círculo máximo dividem a esfera em seis fusos, dois deles de amplitude α com pólos em A e A' (ponto antípoda de A), dois de amplitude β com pólos em B e B' (ponto antípoda de B) e dois de amplitude γ com pólos em C e C' (ponto antípoda de C):



Um dos fusos de amplitude α contém o triângulo ABC e o outro fuso contém o triângulo $A'B'C'$. Denotemos a região reunião destes dois fusos por AA' . O mesmo se passa com os dois fusos de amplitude β (denotemos a sua reunião por BB') e os dois de amplitude γ (denotemos a sua reunião por CC'). Então

$$AA' \cap BB' = AA' \cap CC' = BB' \cap CC' = ABC \cup A'B'C'$$

e como

$$S^2 = AA' \cup BB' \cup CC'$$

temos

$$\mathcal{A}(S^2) = \mathcal{A}(AA') + \mathcal{A}(BB') + \mathcal{A}(CC') - 2(\mathcal{A}(ABC) + \mathcal{A}(A'B'C')).$$

Mas $\mathcal{A}(ABC) = \mathcal{A}(A'B'C')$, pois a aplicação que leva cada ponto P da esfera no seu antípoda P' é claramente uma isometria, logo equiareal. Consequentemente,

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(ABC) &= \frac{1}{4} \left(\mathcal{A}(AA') + \mathcal{A}(BB') + \mathcal{A}(CC') - \mathcal{A}(S^2) \right) \\ &= \frac{1}{4} (4\alpha r^2 + 4\beta r^2 + 4\gamma r^2 - 4\pi r^2) \\ &= r^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi).\end{aligned}$$

■

Isto significa que, diferentemente do que se passa na geometria euclidiana plana, na geometria esférica a soma dos ângulos internos dum triângulo é sempre superior a π . Este resultado tem muitas consequências interessantes. Por exemplo:

(1) Não existe nenhuma isometria entre a esfera e o plano (ou mesmo entre uma parte da esfera e uma parte do plano). Em termos cartográficos, isto significa que é impossível termos um mapa (plano) duma porção da superfície terrestre que represente distâncias com total precisão. Porquê? Porque tal isometria teria que preservar distâncias e ângulos, e teria que aplicar circunferências de círculo máximo (que são as geodésicas na esfera) em rectas (que são as geodésicas no plano). Portanto a soma dos ângulos internos dum triângulo esférico teria que coincidir com a soma dos ângulos internos do correspondente triângulo plano, que é π , e isto implicaria que o triângulo esférico tivesse área nula.

(2) Não existe nenhum conceito de *semelhança* na geometria esférica. Dois triângulos semelhantes na geometria euclidiana têm os mesmos ângulos mas são de tamanhos diferentes. Contudo, na geometria esférica os ângulos dum triângulo determinam a sua área e portanto o seu tamanho e forma.

(3) A fórmula de Girard pode ser estendida a qualquer *polígono esférico convexo* (definido pela intersecção de n circunferências de círculo máximo): se $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ são os ângulos internos do polígono, a sua área é igual a

$$r^2 \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i - (n-2)\pi \right). \quad (5.7.1)$$

(Esta fórmula pode ser facilmente provada dividindo o polígono em triângulos e usando a fórmula de Girard.)

Suponhamos agora que dividimos a superfície da esfera em polígonos esféricos convexos. Se denotarmos por V o número de vértices, por A o números de arestas e por F o número de faces (polígonos), qual é a soma dos ângulos de todos os polígonos? Por um lado, é evidente que cada vértice contribui com 2π para o total, pelo que essa soma é $2\pi V$. Por outro lado, se utilizarmos a fórmula (5.7.1) em cada polígono, obtemos

$$r^2 \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \right) = r^2 \pi (n-2) + \mathcal{A}(\text{polígono}).$$

Fazendo a soma sobre todos os polígonos obtemos, no primeiro membro, a soma total dos ângulos multiplicada por r^2 e, no segundo membro, a área total da esfera, $4\pi r^2$, mais

$$r^2\pi(n_1 - 2 + n_2 - 2 + \cdots + n_F - 2),$$

onde n_1, n_2, \dots, n_F denotam o número de lados (arestas) dos F polígonos. Observando que cada aresta é uma aresta simultânea de dois polígonos, $n_1 - 2 + n_2 - 2 + \cdots + n_F - 2$ é igual a $2A - 2F$. Concluimos então que a soma total dos ângulos é igual a

$$4\pi + 2\pi A - 2\pi F.$$

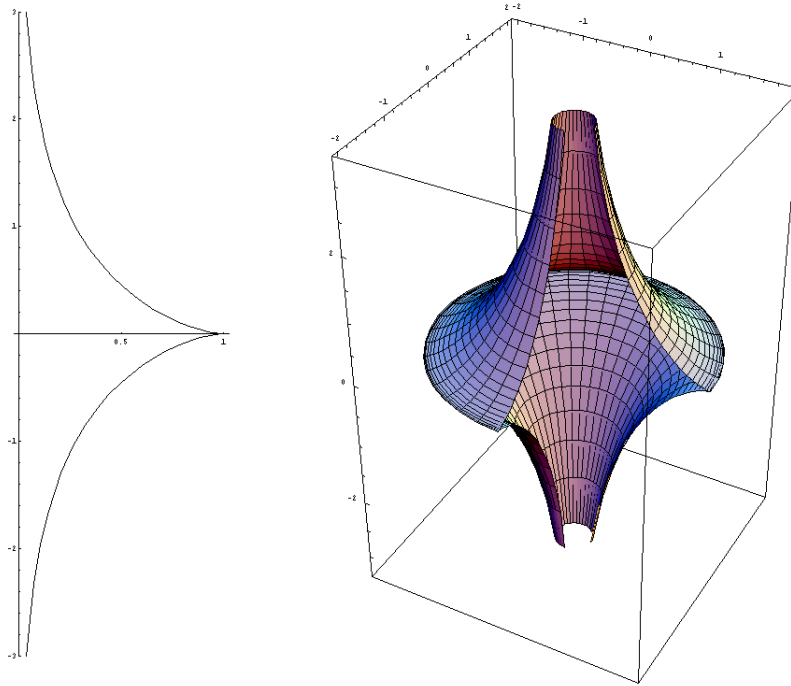
Igualando isto a $2\pi V$ e dividindo por 2π , deduzimos a famosa fórmula de Euler

$$V - A + F = 2.$$

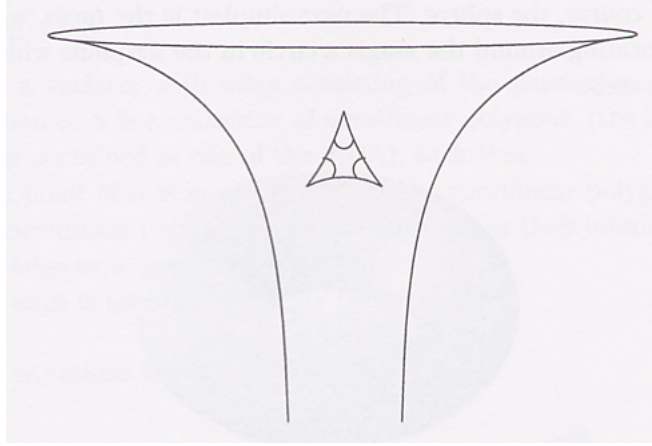
Observação. A fórmula (5.7.1) pode ainda ser generalizada a uma superfície arbitrária (*fórmula de Gauss-Bonnet*), mas não o faremos aqui por falta de tempo. Por exemplo, consideremos a *pseudo-esfera*, isto é, a superfície de revolução definida pela curva geratriz

$$\gamma(u) = \left(e^u, 0, \sqrt{1 - e^{2u}} - \cosh^{-1}\left(\frac{1}{e^u}\right) \right) \quad (u \in (-\infty, 0])$$

chamada *tractrix*:



Neste caso, a área de um triângulo de ângulos internos α, β, γ , é igual a $\pi - \alpha - \beta - \gamma$, o que significa que na geometria da pseudo-esfera a soma dos ângulos internos dum triângulo é sempre inferior a π (é mais um exemplo de *geometria não euclidiana*).



Exercícios

5.1 Calcule a primeira forma fundamental dos seguintes mapas:

(a) $\sigma(u, v) = (u - v, u + v, u^2 + v^2)$;

(b) $\sigma(u, v) = (\cosh u, \sinh u, v)$;

(c) $\sigma(u, v) = (u, v, u^2 + v^2)$.

5.2 Seja $\tilde{\sigma} = \sigma \circ \Phi : \tilde{U} \rightarrow S$ uma reparametrização de um mapa $\sigma : U \rightarrow S$ da superfície S . Prove que

$$\begin{bmatrix} \tilde{E} & \tilde{F} \\ \tilde{F} & \tilde{G} \end{bmatrix} = J^T \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} J$$

onde J é a matriz jacobiana da mudança de coordenadas Φ , e $\tilde{E}, \tilde{F}, \tilde{G}$ e E, F, G são, respectivamente, os coeficientes da primeira forma fundamental de $\tilde{\sigma}$ e σ .

5.3 O cone circular parametrizado por $\sigma(u, v) = (u \cos v, u \sin v, u)$, $u > 0$, $0 < v < 2\pi$, pode ser “desenrolado”, pelo que é isométrico a parte de um plano (XOY , por exemplo). Verifique que esta isometria é dada por

$$f : \sigma(u, v) \mapsto \tilde{\sigma}(u, v) = \left(u\sqrt{2} \cos \frac{v}{\sqrt{2}}, u\sqrt{2} \sin \frac{v}{\sqrt{2}}, 0 \right)$$

e descreva que parte do plano XOY é isométrica ao cone. Mostre que a aplicação f é de facto uma isometria.

5.4 A aplicação da metade do cone circular $x^2 + y^2 = z^2$, $z > 0$, no plano OXY , dada por $(x, y, z) \mapsto (x, y, 0)$, é uma isometria?

5.5 Um mapa global $\sigma : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ de uma superfície S diz-se *conformal* se a projecção

$$\begin{aligned} f : S &\rightarrow \Pi \\ (x, y, z) &\mapsto (\sigma^{-1}(x, y, z), 0), \end{aligned}$$

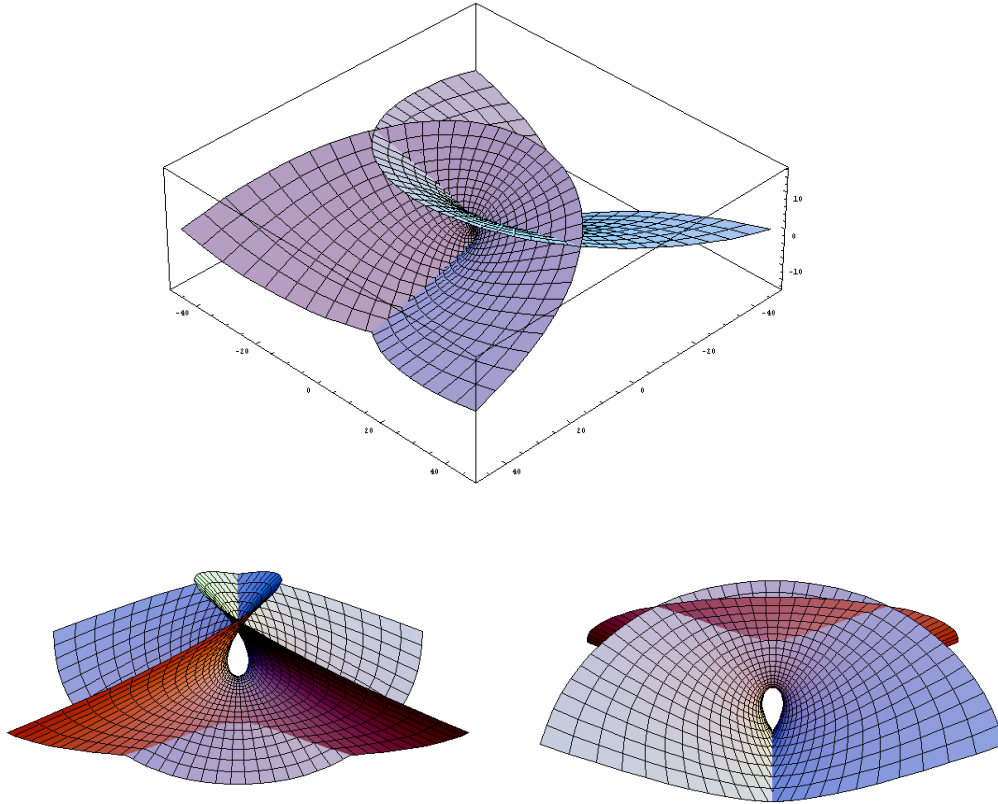
na superfície plana $\Pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in U, z = 0\}$, é conformal. Mostre que:

(a) O mapa σ é conformal se e só se $E = G$ e $F = 0$.

(b) O mapa

$$\sigma(x, y) = \left(x - \frac{x^3}{3} + xy^2, y - \frac{y^3}{3} + x^2y, x^2 - y^2 \right)$$

da *superfície de Enneper*



é conformal.

5.6 Prove que o mapa de Mercator da esfera (Exercício 3.7) é conformal.

5.7 (a) Prove que qualquer isometria é uma aplicação conformal. Mostre que a projecção estereográfica é um exemplo de uma aplicação conformal que não é uma isometria.

(b) Prove que qualquer isometria é uma aplicação equiareal.

Considere a *projecção de Arquimedes* $f : P \mapsto f(P) = Q$, da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ (menos os pólos norte e sul) no cilindro $x^2 + y^2 = 1$, definida do seguinte modo: para cada ponto $P \neq (0, 0, \pm 1)$ na esfera, existe uma única recta horizontal que passa por P e pelo eixo OZ ; esta recta intersecta o cilindro em dois pontos, um dos quais (que denotamos por Q) está mais perto de P . Mostre que se trata de um exemplo de uma aplicação equiareal que não é uma isometria.

5.8 Prove que qualquer aplicação conformal e equiareal é uma isometria.

5.9 Considere as superfícies

$$S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 0, |x| < \pi/2\}$$

e

$$S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1, y > 0\}$$

e seja $g : S_1 \rightarrow S_2$ definida por

$$g(x, 0, z) = (\sin x, \cos x, z).$$

- (a) Prove que g é uma isometria.
- (b) Sabendo que o caminho mais curto em S_2 entre os pontos $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -3)$ e $(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 4)$ define uma curva (regular) determine:
- o comprimento desse caminho;
 - esse caminho.
- (c) Determine a área do triângulo em S_2 de vértices $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$, $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$ e $(0, 1, 2)$.
- 5.10 Uma *circunferência máxima* numa esfera é uma circunferência obtida intersectando a esfera com um plano passando pelo seu centro.
- Prove que o caminho mais curto entre dois pontos numa esfera é um arco de circunferência máxima.
 - O que diz a fórmula de Girard sobre a área de um triângulo esférico?
 - Um velejador pretende circum-navegar a Austrália, seguindo a rota triangular mais curta possível. Prove que um dos ângulos do triângulo mede, pelo menos, $\frac{\pi}{3} + \frac{1}{16}$ radianos. (Assuma que a terra é uma esfera de raio $6400Km$ e que a área da Austrália mede $7680000Km^2$.)
- 5.11 Suponha a esfera unitária coberta por F triângulos cujos lados são arcos de circunferência máxima, e tais que a intersecção de quaisquer dois triângulos é vazia ou é um vértice ou uma aresta comum aos dois triângulos. Denote por E o número total de arestas nessa cobertura e por V o número de vértices.
- Mostre que $3F = 2E$.
 - Deduza, usando a Fórmula de Girard, que $2V - F = 4$.
 - Conclua que $V - E + F = 2$ (a chamada *Fórmula de Euler*).