

## 6. A aplicação de Gauss e a segunda forma fundamental

Nesta secção estudaremos a chamada aplicação de Gauss e introduziremos diversas maneiras de medir a “curvatura” de uma superfície. Todas elas se baseiam na chamada segunda forma fundamental de um mapa da superfície.

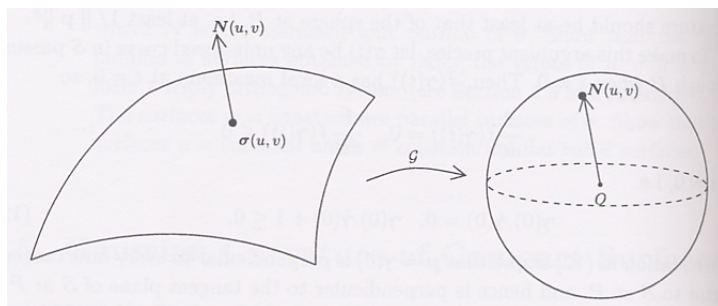
Decorrerá daqui que um mapa de uma superfície fica determinado, a menos de um movimento rígido de  $\mathbb{R}^3$ , pelas suas primeira e segunda formas fundamentais, exactamente do mesmo modo que uma curva parametrizada por comprimento de arco é determinada, a menos de um movimento rígido, pela sua curvatura e torsão.

Da mesma maneira que, como vimos na Proposição I.4.1, a curvatura com sinal duma curva plana parametrizada por comprimento de arco é medida pela mudança de direcção do vector tangente, será de esperar que numa superfície  $S$  a mudança de “direcção” do plano tangente (relativamente a um mapa  $\sigma : U \rightarrow W \subseteq S$ ) ou, o que é o mesmo, da normal unitária standard  $N$ , meça a curvatura da superfície  $S$  na região  $W$ .

Para formalizar esta ideia notemos que  $N(p)$ , em cada ponto  $p$  de  $W$ , é um ponto da esfera unitária

$$S^2 = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid \|v\| = 1\}.$$

Então podemos considerar a aplicação  $W \rightarrow S^2$  que a cada ponto  $p = \sigma(u, v)$  faz corresponder o ponto  $N(p)$  de  $S^2$ .



Mais geralmente, esta aplicação pode ser definida para qualquer superfície orientável  $S$ , pois estas superfícies possuem, como vimos, uma normal unitária  $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$  bem definida em todo o ponto, dada localmente em cada mapa  $\sigma$  de uma orientação de  $S$  por

$$N(p) = \frac{\frac{\partial \sigma}{\partial x}(q) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial y}(q)}{\left\| \frac{\partial \sigma}{\partial x}(q) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial y}(q) \right\|}.$$

Chamamos *aplicação de Gauss* à aplicação

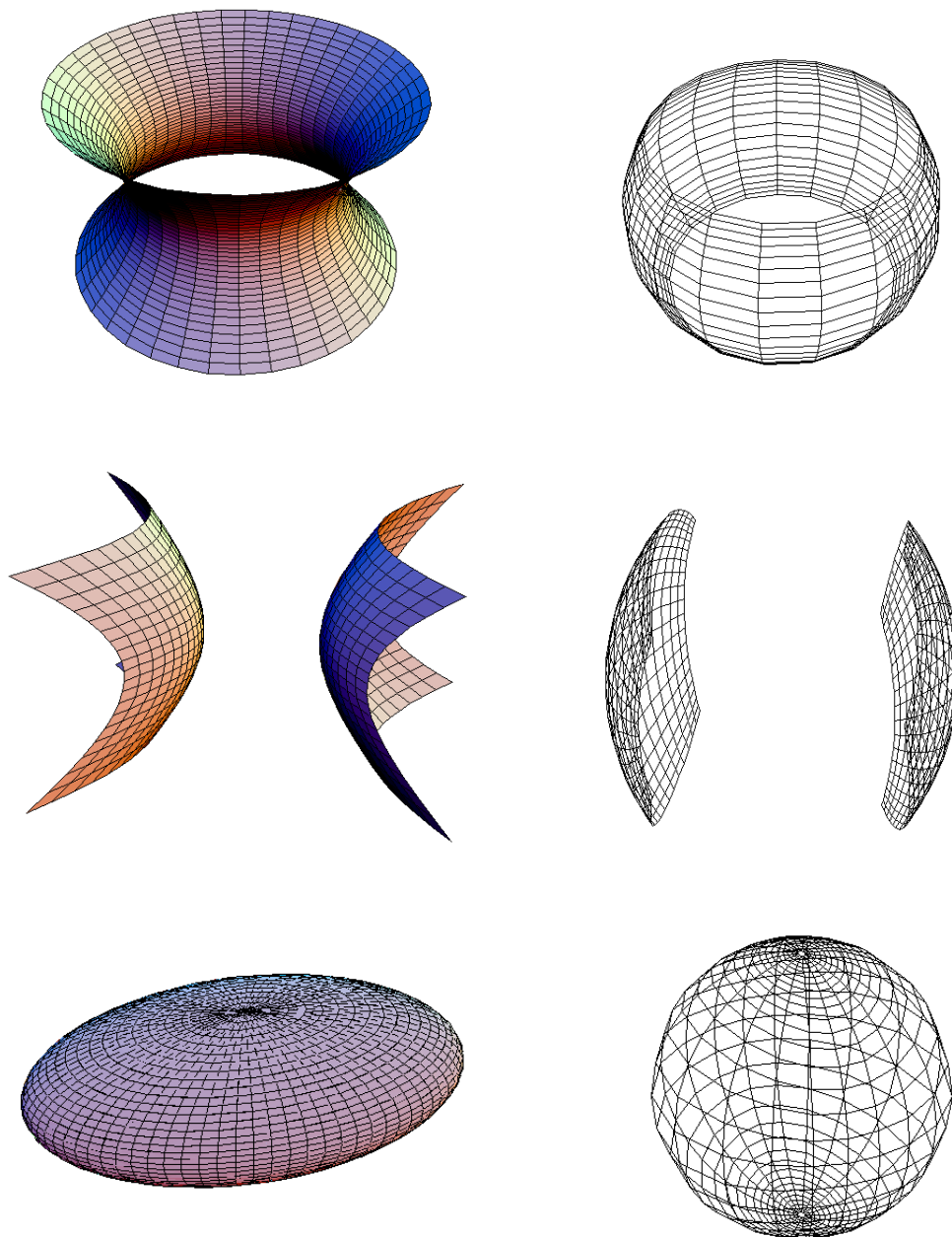
$$\begin{aligned} \mathcal{G} : S &\rightarrow S^2 \\ p &\mapsto N(p). \end{aligned}$$

**Observação.** É claro que como  $N$  não é única, a aplicação de Gauss está definida a menos de sinal, dependendo da orientação escolhida, ou seja, do campo de vectores  $N$  escolhido.

**Exemplos.** Nas figuras seguintes podemos ver, respectivamente, a região equatorial do hiperbolóide de uma folha  $x^2 + y^2 - z^2 = 1$  e a sua imagem pela aplicação de Gauss, a região equatorial do hiperbolóide de duas folhas  $x^2 - y^2 - z^2 = 1$  e a sua imagem pela aplicação de Gauss, o elipsóide

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + z^2 = 1$$

e a sua imagem pela aplicação de Gauss:



A partir da aplicação de Gauss vamos construir vários invariantes. Para já necessitamos do seguinte resultado geral para funções suaves  $f : S_1 \rightarrow S_2$  entre superfícies:

**Proposição 6.1.** *Sejam  $S_1$  e  $S_2$  superfícies e  $f : S_1 \rightarrow S_2$  uma função suave. Para cada  $p \in S_1$ , a correspondência  $\gamma'(t_0) \mapsto (f \circ \gamma)'(t_0)$  define uma aplicação linear*

$$f_{*p} : T_p S_1 \rightarrow T_{f(p)} S_2.$$

Vamos chamar à aplicação  $f_{*p}$  a *derivada* (ou *diferencial*) de  $f$  no ponto  $p$ .

**Demonstração:** Sejam  $\sigma_1 : U_1 \rightarrow W_1 \subseteq S_1$  um mapa de uma região  $W_1$  de  $S_1$  contendo  $p$ ,  $\sigma_1(q) = p$ ,  $\sigma_2 : U_2 \rightarrow W_2 \subseteq S_2$  um mapa de  $S_2$  contendo  $f(p)$ ,  $\sigma_2(r) = f(p)$ , tais que  $f(W_1) \subseteq W_2$ . Consideremos ainda uma curva  $\gamma : I \rightarrow W_1$  em  $S_1$  tal que  $\gamma(t_0) = p$  e a composição

$$I \xrightarrow{\gamma} W_1 \xrightarrow{\sigma_1^{-1}} U_1 \xrightarrow{\sigma_1} W_1 \xrightarrow{f} W_2 \xrightarrow{\sigma_2^{-1}} U_2.$$

Denotando o vector  $\gamma'(t_0)$  por  $v$  e o vector  $(f \circ \gamma)'(t_0)$  por  $w$ , sabemos da demonstração da Proposição 3.1 que

$$v = \bar{\gamma}'_1(t_0) \frac{\partial \sigma_1}{\partial x}(q) + \bar{\gamma}'_2(t_0) \frac{\partial \sigma_1}{\partial y}(q)$$

e, analogamente,

$$w = G'_1(t_0) \frac{\partial \sigma_2}{\partial x}(r) + G'_2(t_0) \frac{\partial \sigma_2}{\partial y}(r)$$

onde  $\bar{\gamma}$  denota a composição  $\sigma_1^{-1} \circ \gamma$  e  $G$  denota a composição  $\sigma_2^{-1} \circ f \circ \gamma = \sigma_2^{-1} \circ f \circ \sigma_1 \circ \bar{\gamma}$ . Para abreviar, chamaremos  $F$  à composição  $\sigma_2^{-1} \circ f \circ \sigma_1$ . Portanto  $G = F \circ \bar{\gamma}$ .

Se  $\delta$  for outra curva em  $S_1$  tal que  $\delta(t_1) = p$  e  $\delta'(t_1) = v$  e definirmos, analogamente,  $\tilde{w} = (f \circ \delta)'(t_1)$  e  $\tilde{G} = F \circ \bar{\delta}$ , teremos

$$v = \bar{\delta}'_1(t_1) \frac{\partial \sigma_1}{\partial x}(q) + \bar{\delta}'_2(t_1) \frac{\partial \sigma_1}{\partial y}(q)$$

e

$$\tilde{w} = \tilde{G}'_1(t_1) \frac{\partial \sigma_2}{\partial x}(r) + \tilde{G}'_2(t_1) \frac{\partial \sigma_2}{\partial y}(r).$$

Em particular,  $\bar{\gamma}'_1(t_0) = \bar{\delta}'_1(t_1)$  e  $\bar{\gamma}'_2(t_0) = \bar{\delta}'_2(t_1)$ . Daqui decorre que

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} G'_1(t_0) \\ G'_2(t_0) \end{bmatrix} &= J_G(t_0) = J_F(q) \cdot J_{\bar{\gamma}}(t_0) = J_F(q) \begin{bmatrix} \bar{\gamma}'_1(t_0) \\ \bar{\gamma}'_2(t_0) \end{bmatrix} = \\ &= J_F(q) \begin{bmatrix} \bar{\delta}'_1(t_1) \\ \bar{\delta}'_2(t_1) \end{bmatrix} = J_F(q) \cdot J_{\bar{\delta}}(t_1) = J_{\tilde{G}}(t_1) = \begin{bmatrix} \tilde{G}'_1(t_1) \\ \tilde{G}'_2(t_1) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Portanto  $\tilde{w} = w$ , o que assegura que o vector  $w$  não depende da escolha da curva  $\gamma$  e que  $f_{*p}$  está bem definida.

Isto também mostra que, para qualquer vector  $v \in T_p S_1$  de coordenadas  $v_1$  e  $v_2$  na base  $(\frac{\partial \sigma_1}{\partial x}(q), \frac{\partial \sigma_1}{\partial y}(q))$ , a sua imagem por  $f_{*p}$  é dada por

$$f_{*p}(v) = J_F(q) \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}.$$

Portanto  $f_{*p}$  não é mais que a aplicação linear de  $T_p S_1$  em  $T_{f(p)} S_2$  cuja matriz, relativamente às bases  $(\frac{\partial \sigma_1}{\partial x}(q), \frac{\partial \sigma_1}{\partial y}(q))$  e  $(\frac{\partial \sigma_2}{\partial x}(r), \frac{\partial \sigma_2}{\partial y}(r))$ , é  $J_F(q)$ . ■

Agora, sendo  $\mathcal{G}$  uma aplicação suave de  $S$  em  $S^2$ , podemos aplicar 6.1 e concluir que a derivada de  $\mathcal{G}$  no ponto  $p$  é uma aplicação linear definida em  $T_p S$  com valores em  $T_{N(p)} S^2$ . Mas  $T_{N(p)} S^2 = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid (v \mid N(p)) = 0\} = T_p S$ , portanto

$$\mathcal{G}_{*p} : T_p S \rightarrow T_p S.$$

**Observação.** Uma vez que  $\mathcal{G}$  está definida a menos de sinal, a sua derivada  $\mathcal{G}_{*p}$  também fica definida a menos de sinal, dependendo da orientação escolhida.

Seja  $E$  um espaço euclidiano. Uma aplicação linear  $f : E \rightarrow E$  diz-se *simétrica* se  $(f(v_1) \mid v_2) = (v_1 \mid f(v_2))$  para quaisquer  $v_1, v_2 \in E$ .

**Proposição 6.2.** Para cada  $p \in S$ ,  $\mathcal{G}_{*p}$  é uma aplicação simétrica.

**Demonstração:** Como  $\mathcal{G}_{*p}$  é linear, bastará verificarmos a igualdade

$$\left( \mathcal{G}_{*p}(v_1) \mid v_2 \right) = \left( v_1 \mid \mathcal{G}_{*p}(v_2) \right)$$

para os vectores da base  $(\frac{\partial \sigma}{\partial x}(q), \frac{\partial \sigma}{\partial y}(q))$  de  $T_p S$ , sendo  $\sigma : U \rightarrow W \subseteq S$  um mapa de  $S$  contendo  $p = \sigma(q)$ .

Em primeiro lugar observemos que, para  $v = \gamma'(t_0) \in T_p S$ ,  $\mathcal{G}_{*p}(v) = (\mathcal{G} \circ \gamma)'(t_0)$  e  $J_{\mathcal{G} \circ \gamma}(t_0) = J_{\mathcal{G} \circ \sigma \circ \sigma^{-1} \circ \gamma}(t_0) = J_{\mathcal{G} \circ \sigma}(q) \cdot J_{\gamma}(t_0)$ . Em particular, para  $v = \frac{\partial \sigma}{\partial x}(q)$ ,

$$J_{\gamma}(t_0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

pelo que  $J_{\mathcal{G} \circ \gamma}(t_0) = J_{\mathcal{G} \circ \sigma}(q) \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  e conseqüentemente

$$\mathcal{G}_{*p}\left(\frac{\partial \sigma}{\partial x}(q)\right) = \frac{\partial(\mathcal{G} \circ \sigma)}{\partial x}(q).$$

Analogamente

$$\mathcal{G}_{*p}\left(\frac{\partial \sigma}{\partial y}(q)\right) = \frac{\partial(\mathcal{G} \circ \sigma)}{\partial y}(q).$$

Provemos então que

$$\left( \frac{\partial(\mathcal{G} \circ \sigma)}{\partial x}(q) \mid \frac{\partial \sigma}{\partial y}(q) \right) = \left( \frac{\partial \sigma}{\partial x}(q) \mid \frac{\partial(\mathcal{G} \circ \sigma)}{\partial y}(q) \right).$$

Para qualquer  $(x, y) \in U$  temos

$$\left( (\mathcal{G} \circ \sigma)(x, y) \mid \frac{\partial \sigma}{\partial x}(x, y) \right) = 0 \tag{6.2.1}$$

e

$$\left( (\mathcal{G} \circ \sigma)(x, y) \mid \frac{\partial \sigma}{\partial y}(x, y) \right) = 0. \tag{6.2.2}$$

Derivando (6.2.1) obtemos

$$\left( \frac{\partial(\mathcal{G} \circ \sigma)}{\partial y}(x, y) \mid \frac{\partial \sigma}{\partial x}(x, y) \right) + \left( (\mathcal{G} \circ \sigma)(x, y) \mid \frac{\partial^2 \sigma}{\partial y \partial x}(x, y) \right) = 0 \quad (6.2.3)$$

e derivando (6.2.2) obtemos

$$\left( \frac{\partial(\mathcal{G} \circ \sigma)}{\partial x}(x, y) \mid \frac{\partial \sigma}{\partial y}(x, y) \right) + \left( (\mathcal{G} \circ \sigma)(x, y) \mid \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x \partial y}(x, y) \right) = 0.$$

Em particular, para  $(x, y) = q$  obtemos a igualdade pretendida:

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial(\mathcal{G} \circ \sigma)}{\partial y}(q) \mid \frac{\partial \sigma}{\partial x}(q) \right) &= - \left( (\mathcal{G} \circ \sigma)(q) \mid \frac{\partial^2 \sigma}{\partial y \partial x}(q) \right) \\ &= - \left( (\mathcal{G} \circ \sigma)(q) \mid \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x \partial y}(q) \right) \\ &= \left( \frac{\partial(\mathcal{G} \circ \sigma)}{\partial x}(q) \mid \frac{\partial \sigma}{\partial y}(q) \right). \end{aligned}$$

■

Recordemos agora os seguintes resultados da Álgebra Linear:

- *Existindo uma aplicação linear simétrica  $f : E \rightarrow E$ , então  $E$  possui uma base ortonormada formada por vectores próprios de  $f$ .*
- *Todos os valores próprios de uma matriz simétrica são reais e o seu determinante é igual ao produto desses valores próprios.*

Podemos assim concluir que existe uma base ortonormada  $(e_1, e_2)$  de  $T_p S$  tal que  $\mathcal{G}_{*p}(e_1) = \kappa_1 e_1$  e  $\mathcal{G}_{*p}(e_2) = \kappa_2 e_2$  sendo  $\kappa_2 \leq \kappa_1$ . Aos números  $\kappa_1$  e  $\kappa_2$ , que são os valores próprios de  $\mathcal{G}_{*p}$ , chama-se *curvaturas principais* de  $S$  em  $p$ . Portanto a matriz de  $\mathcal{G}_{*p}$  na base  $(e_1, e_2)$  é igual a

$$\begin{bmatrix} \kappa_1 & 0 \\ 0 & \kappa_2 \end{bmatrix}.$$

Os vectores próprios  $e_1$  e  $e_2$  dizem-se os *vectores principais* de  $S$  em  $p$ .

**Observação.** As curvaturas principais também estão definidas apenas a menos de sinal.

Definiremos ainda mais duas medidas da curvatura de uma superfície. Chama-se *curvatura gaussiana* de  $S$  no ponto  $p$  ao determinante de  $\mathcal{G}_{*p}$ :

$$K(p) = \kappa_1 \kappa_2.$$

Chama-se *curvatura média* de  $S$  no ponto  $p$  a metade do traço de  $\mathcal{G}_{*p}$ :

$$H(p) = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}.$$

O ponto  $p$  diz-se

- *elíptico*, se  $K(p) > 0$ .
- *hiperbólico*, se  $K(p) < 0$ .
- *parabólico*, se  $K(p) = 0$  e  $H(p) \neq 0$ .
- *planar*, se  $K(p) = 0$  e  $H(p) = 0$ .

Estas designações serão justificadas no final desta secção. Antes disso, vejamos como podemos calcular  $K(p)$  e  $H(p)$  a partir do conhecimento de um mapa  $\sigma : U \rightarrow W \subseteq S$  contendo  $p = \sigma(q)$ .

**Observação.** Note que a única definição que depende da escolha de  $N$  é a de curvatura média (mantendo-se igual ou mudando de sinal quando consideramos outra orientação), conforme se poderá facilmente verificar. Assim, a natureza dos pontos de  $S$  não depende da escolha de  $N$ .

Chamamos à forma bilinear

$$\begin{aligned} II_p : T_p S \times T_p S &\rightarrow \mathbb{R} \\ (v_1, v_2) &\mapsto (\mathcal{G}_{*p}(v_1) | v_2) \end{aligned}$$

a *segunda forma fundamental* de  $S$  no ponto  $p$ . Esta aplicação, dependendo da escolha de  $N$ , só está definida a menos de sinal.

Vejamos que o conhecimento das primeira e segunda formas fundamentais de  $S$  em  $p$  é suficiente para determinarmos a natureza desse ponto.

**Método para determinar  $K(p)$  e  $H(p)$  a partir de  $\sigma : U \rightarrow S$**

1. Determinar a matriz da primeira forma fundamental:

$$\mathcal{F}_I = \begin{bmatrix} E(q) & F(q) \\ F(q) & G(q) \end{bmatrix}$$

onde

$$E(q) = \left( \frac{\partial \sigma}{\partial x}(q) \mid \frac{\partial \sigma}{\partial x}(q) \right), \quad F(q) = \left( \frac{\partial \sigma}{\partial x}(q) \mid \frac{\partial \sigma}{\partial y}(q) \right) \quad \text{e} \quad G(q) = \left( \frac{\partial \sigma}{\partial y}(q) \mid \frac{\partial \sigma}{\partial y}(q) \right).$$

2. Determinar o campo de vectores normais unitários induzido por  $\sigma$ :

$$N(p) = \frac{\frac{\partial \sigma}{\partial x}(q) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial y}(q)}{\left\| \frac{\partial \sigma}{\partial x}(q) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial y}(q) \right\|}.$$

3. Determinar a matriz da segunda forma fundamental:

$$\mathcal{F}_{II} = \begin{bmatrix} e(q) & f(q) \\ f(q) & g(q) \end{bmatrix}$$

onde

$$e(q) = \left( \frac{\partial \sigma}{\partial x}(q) \mid \mathcal{G}_{*p} \left( \frac{\partial \sigma}{\partial x}(q) \right) \right) = \left( \frac{\partial \sigma}{\partial x}(q) \mid \frac{\partial(\mathcal{G} \circ \sigma)}{\partial x}(q) \right),$$

$$f(q) = \left( \frac{\partial \sigma}{\partial x}(q) \mid \mathcal{G}_{*p} \left( \frac{\partial \sigma}{\partial y}(q) \right) \right) = \left( \frac{\partial \sigma}{\partial x}(q) \mid \frac{\partial(\mathcal{G} \circ \sigma)}{\partial y}(q) \right)$$

e

$$g(q) = \left( \frac{\partial \sigma}{\partial y}(q) \mid \mathcal{G}_{*p} \left( \frac{\partial \sigma}{\partial y}(q) \right) \right) = \left( \frac{\partial \sigma}{\partial y}(q) \mid \frac{\partial(\mathcal{G} \circ \sigma)}{\partial y}(q) \right).$$

As seguintes fórmulas alternativas de cálculo são mais úteis na prática (pois não envolvem as derivadas de  $\mathcal{G} \circ \sigma$ ) e obtêm-se de (6.2.1) e (6.2.2) por derivação, analogamente ao modo como obtivemos (6.2.3):

$$e(q) = -\left( \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2}(q) \mid N(p) \right), \quad f(q) = -\left( \frac{\partial^2 \sigma}{\partial y \partial x}(q) \mid N(p) \right) \quad \text{e} \quad g(q) = -\left( \frac{\partial^2 \sigma}{\partial y^2}(q) \mid N(p) \right).$$

4. Utilizar o seguinte resultado:

**Teorema 6.3.** *Para cada  $p \in S$ , temos*

$$K(p) = \frac{e(q)g(q) - f(q)^2}{E(q)G(q) - F(q)^2}, \quad H(p) = \frac{e(q)G(q) - 2f(q)F(q) + g(q)E(q)}{2(E(q)G(q) - F(q)^2)},$$

$$k_1(p) = H(p) + \sqrt{H(p)^2 - K(p)}, \quad k_2(p) = H(p) - \sqrt{H(p)^2 - K(p)}.$$

(Note que  $EG - F^2 > 0$  por (5.4.1).)

**Demonstração:** Com vista a simplificar as notações, omitimos por vezes  $p$  e  $q$  nas fórmulas que se seguem.

Designemos por

$$\mathcal{W} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

a matriz de  $\mathcal{G}_{*p}$  relativamente à base  $(\frac{\partial \sigma}{\partial x}(q), \frac{\partial \sigma}{\partial y}(q))$ . Então

$$e(q) = \left( \frac{\partial \sigma}{\partial x}(q) \mid \mathcal{G}_{*p} \left( \frac{\partial \sigma}{\partial x}(q) \right) \right) = a_{11}E(q) + a_{21}F(q),$$

$$f(q) = \left( \frac{\partial \sigma}{\partial x}(q) \mid \mathcal{G}_{*p} \left( \frac{\partial \sigma}{\partial y}(q) \right) \right) = a_{12}E(q) + a_{22}F(q),$$

$$f(q) = \left( \frac{\partial \sigma}{\partial y}(q) \mid \mathcal{G}_{*p} \left( \frac{\partial \sigma}{\partial x}(q) \right) \right) = a_{11}F(q) + a_{21}G(q)$$

e

$$g(q) = \left( \frac{\partial \sigma}{\partial y}(q) \mid \mathcal{G}_{*p} \left( \frac{\partial \sigma}{\partial y}(q) \right) \right) = a_{12}F(q) + a_{22}G(q).$$

Em termos matriciais isto significa que  $\mathcal{F}_{II} = \mathcal{F}_I \mathcal{W}$ , donde

$$\begin{aligned}
\mathcal{W} &= \mathcal{F}_I^{-1} \mathcal{F}_{II} \\
&= \frac{1}{EG - F^2} \begin{bmatrix} G & -F \\ -F & E \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e & f \\ f & g \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{EG - F^2} \begin{bmatrix} eG - fF & fG - gF \\ fE - eF & gE - fF \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Consequentemente,

$$H = \frac{1}{2} \operatorname{tr}(\mathcal{W}) = \frac{eG - 2fF + gE}{2(EG - F^2)}$$

e

$$K = \det(\mathcal{W}) = \left( \frac{1}{EG - F^2} \right)^2 \begin{vmatrix} G & -F \\ -F & E \end{vmatrix} \begin{vmatrix} e & f \\ f & g \end{vmatrix} = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}.$$

Por outro lado,

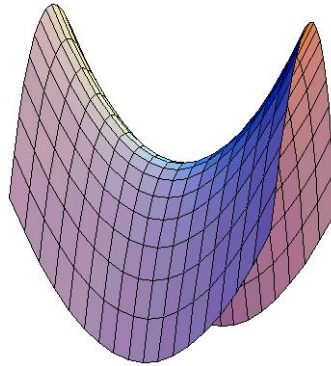
$$\begin{cases} \kappa_1 \kappa_2 = K \\ \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2) = H. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema e sabendo que  $\kappa_1 \geq \kappa_2$  obtemos  $\kappa_2 = H - \sqrt{H^2 - K}$  e  $\kappa_1 = H + \sqrt{H^2 - K}$ . ■

Desta demonstração decorre também que a matriz da aplicação  $\mathcal{G}_{*p} : T_p S \rightarrow T_p S$  relativamente à base  $(\frac{\partial \sigma}{\partial x}(q), \frac{\partial \sigma}{\partial y}(q))$ , chamada *matriz de Weingarten* do mapa  $\sigma$  de  $S$ , é a matriz

$$\mathcal{W} = \mathcal{F}_I^{-1} \mathcal{F}_{II} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{bmatrix} eG - fF & fG - gF \\ fE - eF & gE - fF \end{bmatrix}.$$

**Exemplos 6.4.** (1) Consideremos o parabolóide hiperbólico dado por  $z = x^2 - y^2$ ,



parametrizado globalmente por  $\sigma(x, y) = (x, y, x^2 - y^2)$ ,  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Como

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x}(x, y) = (1, 0, 2x) \quad \text{e} \quad \frac{\partial \sigma}{\partial y}(x, y) = (0, 1, -2y),$$

temos

$$E(x, y, z) = 1 + 4x^2, \quad F(x, y, z) = -4xy \quad \text{e} \quad G(x, y, z) = 1 + 4y^2.$$



Por outro lado,

$$N(x, y, z) = \frac{(-2x, 2y, 1)}{\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}}.$$

Então, como

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2}(x, y) = (0, 0, 2), \quad \frac{\partial^2 \sigma}{\partial y^2}(x, y) = (0, 0, -2) \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x \partial y}(x, y) = (0, 0, 0),$$

temos

$$e(x, y, z) = -\frac{2}{\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}} \quad f(x, y, z) = 0 \quad \text{e} \quad g(x, y, z) = \frac{2}{\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}}.$$

Isto implica que

$$K(x, y, z) = \frac{-4}{(1 + 4x^2 + 4y^2)^2} < 0,$$

o que significa que todo o ponto do parabolóide hiperbólico é hiperbólico.

Em particular, no ponto  $p = (0, 0, 0)$  a matriz de  $\mathcal{G}_{*p}$  na base  $(\frac{\partial \sigma}{\partial x}(0, 0), \frac{\partial \sigma}{\partial y}(0, 0))$  é igual a

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Portanto a matriz de  $\mathcal{G}_{*p}$  nesta base já é diagonal, pelo que  $\kappa_1(p) = 2$ ,  $\kappa_2(p) = -2$  e os vectores principais são  $e_1 = \frac{\partial \sigma}{\partial x}(0, 0) = (1, 0, 0)$  e  $e_2 = \frac{\partial \sigma}{\partial y}(0, 0) = (0, 1, 0)$ .

(2) No caso do plano, vimos no Exemplo 5.1(1) que para a parametrização  $\sigma(u, v) = p + ux + vy$ ,  $E = 1$ ,  $F = 0$  e  $G = 1$ . Como  $\partial^2 \sigma / \partial u^2 = \partial^2 \sigma / \partial v^2 = 0$ , temos  $e = f = g = 0$ . Portanto  $K = H = 0$  e todo o ponto é planar, como seria de esperar.

(3) É intuitivamente claro que uma esfera curva sempre em qualquer direcção e em qualquer ponto da mesma maneira. Esperamos pois que as curvaturas principais da esfera sejam iguais em todo o ponto, e constantes ao longo da esfera. Para confirmarmos isto, utilizemos a parametrização em termos da latitude  $\theta$  e longitude  $\varphi$ , usada no Exemplo 5.1(3). Vimos aí que  $E = 1$ ,  $F = 0$  e  $G = \cos^2 \theta$ . Como  $e = 1$ ,  $f = 0$  e  $g = \cos^2 \theta$  (verifique) temos neste caso  $K = H = 1$  e  $\kappa_1 = \kappa_2 = 1$ . Logo todo o ponto da esfera é elíptico e qualquer vector tangente é um vector principal.

Mais geralmente, quando a esfera tem raio  $r > 0$ ,  $K = 1/r^2$  e  $\kappa_1 = \kappa_2 = 1/r$ .

(4) Exemplos de pontos parabólicos são os pontos do cilindro definido por  $x^2 + y^2 = r^2$ .

(5) Já vimos exemplos de superfícies com curvatura gaussiana constante, nula — caso do plano — e positiva — caso da esfera. Um exemplo de superfície com curvatura gaussiana constante negativa é a pseudo-esfera (recorde a última observação da secção 5). De facto, pelo Exercício 6.1, a curvatura gaussiana de uma superfície de revolução  $\sigma(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u))$  é dada por

$$K(\sigma(u, v)) = -\frac{f''(u)}{f(u)}.$$

No caso da pseudo-esfera

$$\gamma(u) = (f(u), 0, g(u)) = \left( e^u, 0, \sqrt{1 - e^{2u}} - \cosh^{-1}\left(\frac{1}{e^u}\right) \right)$$

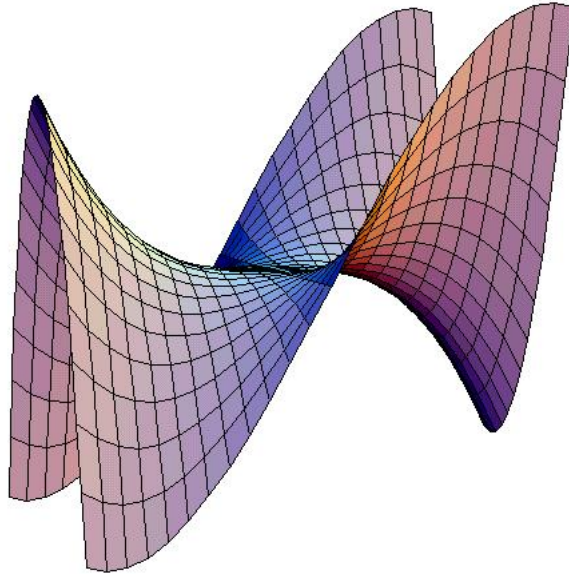
é uma parametrização da geratriz logo

$$K = -\frac{e^u}{e^u} = -1$$

e todo o ponto é hiperbólico.

A geometria numa pseudo-esfera é um exemplo de geometria não euclidiana. Muitos dos resultados da geometria euclidiana plana têm análogos para a pseudo-esfera mas existem diferenças significativas, como observámos no final da secção anterior. É o facto da curvatura gaussiana na pseudo-esfera ser constante igual a  $-1$  que está na base do resultado que estabelece que a soma dos ângulos internos dum triângulo pseudo-esférico é sempre inferior a  $\pi$  (do mesmo modo que é o facto da curvatura gaussiana na esfera ser constante igual a  $1$  que está na base da fórmula de Girard).

(6) Por causa da sua forma, um parabolóide hiperbólico é muitas vezes chamado de *sela*. Uma pessoa pode sentar-se confortavelmente num parabolóide hiperbólico. No entanto, um macaco teria dificuldades pois não existe espaço para a cauda. A *sela de macaco*, por outro lado, já é adequada para um macaco; é a superfície parametrizada globalmente por  $\sigma(u, v) = (u, v, u^3 - 3uv^2)$ ,  $u, v \in \mathbb{R}$ :



Podemos determinar facilmente os coeficientes das primeira e segunda formas fundamentais:

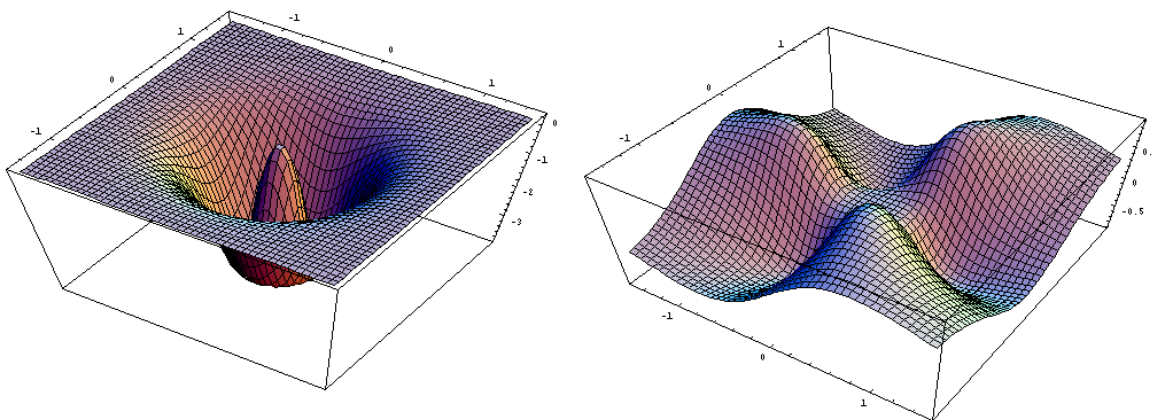
$$E = 1 + (3u^2 - 3v^2)^2, \quad F = -6uv(3u^2 - 3v^2), \quad G = 1 + 36u^2v^2,$$

$$e = \frac{6u}{\sqrt{1 + 9u^4 + 18u^2v^2 + 9v^4}}, \quad f = \frac{-6v}{\sqrt{1 + 9u^4 + 18u^2v^2 + 9v^4}}, \quad g = \frac{-6u}{\sqrt{1 + 9u^4 + 18u^2v^2 + 9v^4}}.$$

Então,

$$K = \frac{-36(u^2 + v^2)}{(1 + 9u^4 + 18u^2v^2 + 9v^4)^2} \quad \text{e} \quad H = \frac{-27u^5 + 54u^3v^2 + 81uv^4}{(1 + 9u^4 + 18u^2v^2 + 9v^4)^{\frac{3}{2}}}.$$

Na figura seguinte podemos ver os gráficos destas funções para  $u, v \in [-1.5, 1.5]$  (à esquerda, o da curvatura gaussiana, e à direita, o da curvatura média).



Isto mostra que  $(0, 0, 0)$  é planar e todos os outros pontos são hiperbólicos. Além disso, a curvatura de Gauss é invariante por rotações em torno do eixo  $OZ$ , embora a superfície em si não tenha esta propriedade.

(7) Consideremos agora o toro (pág. ?? e Exercício 2.10) parametrizado por

$$\sigma(u, v) = \left( (a + r \cos v) \cos u, (a + r \cos v) \sin u, b \sin v \right).$$

Neste caso temos

$$E = (a + r \cos v)^2, \quad F = 0, \quad G = r^2, \\ e = -\cos v(a + r \cos v), \quad f = 0, \quad g = -r.$$

Portanto

$$K = \frac{\cos v}{r(a + r \cos v)}, \quad H = \frac{(a + 2r \cos v)}{2r(a + r \cos v)}, \\ \kappa_1 = -\frac{\cos v}{a + r \cos v}, \quad \kappa_2 = -\frac{1}{r}.$$

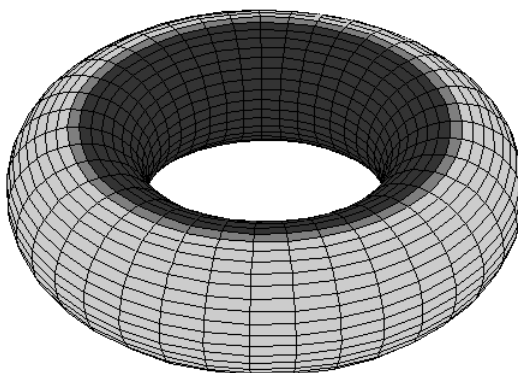
Então a curvatura gaussiana anula-se ao longo das curvas dadas por  $v = \pm\pi/2$ . Estes são os pontos parabólicos do toro. O conjunto dos pontos hiperbólicos é

$$\{\sigma(u, v) \mid \pi/2 < v < 3\pi/2\},$$

e o conjunto dos pontos elípticos é

$$\{\sigma(u, v) \mid -\pi/2 < v < \pi/2\}.$$

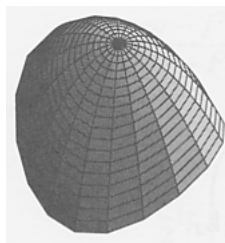
Estes pontos estão marcados na figura seguinte (os pontos elípticos, marcados a cinzento claro, os pontos hiperbólicos, a negro, e os pontos parabólicos, a cinzento escuro).



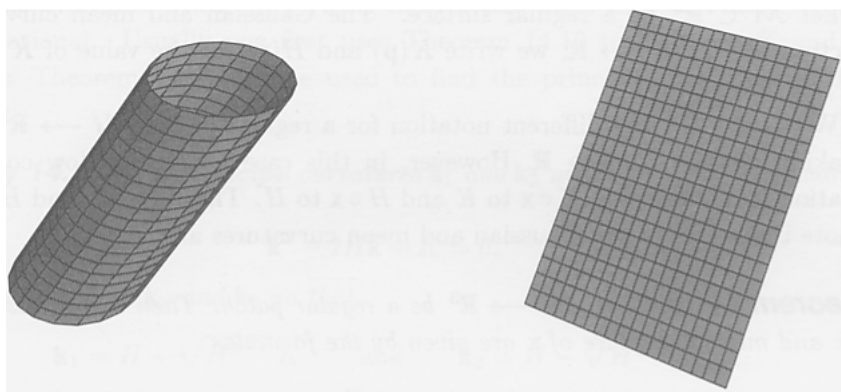
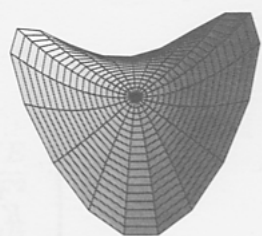
Existem duas circunferências ao longo dos quais os pontos são elípticos. Na figura só se vê uma dessas circunferências ( $v = \pi/2$ ).

Na maior parte dos casos é possível, olhando para a superfície, reconhecer quais pontos são elípticos, hiperbólicos, parabólicos ou planares (isso será claro mais adiante). A figura seguinte mostra exemplos de superfícies constituídas na sua totalidade por cada um dos quatro tipos de pontos.

*Elípticos*



*Hiperbólicos*



*Parabólicos*

*Planares*

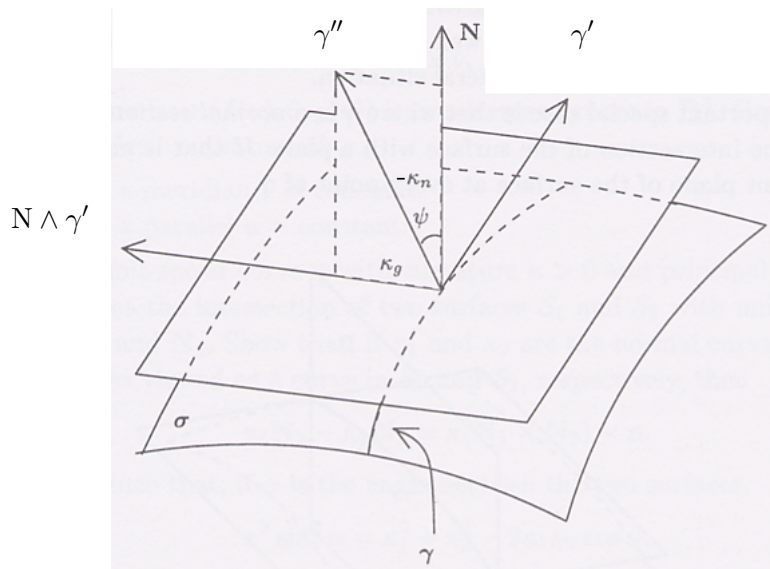
Já sabemos como calcular  $K(p)$  e  $H(p)$  e concluir da natureza do ponto  $p \in S$ . Vamos agora ver que o valor relativo das curvaturas principais nos diz muito sobre a forma de uma superfície na vizinhança de  $p$ .

Se  $\gamma(t) = \sigma(u(t), v(t))$  define uma curva parametrizada por comprimento de arco num mapa de uma superfície  $S$  então  $\gamma'(t)$  é um vector unitário em  $T_{\gamma(t)}S$ . Assim  $\gamma'(t)$

é perpendicular a  $N(\gamma(t))$  e então  $\gamma'(t), N(\gamma(t))$  e  $N(\gamma(t)) \wedge \gamma'(t)$  formam uma base ortonormada de  $\mathbb{R}^3$ . Mais uma vez porque  $\gamma$  está parametrizada por comprimento de arco,  $\gamma''(t)$  é perpendicular a  $\gamma'(t)$  e é portanto uma combinação linear de  $N(\gamma(t))$  e  $N(\gamma(t)) \wedge \gamma'(t)$ :

$$\gamma''(t) = \alpha(t)N(\gamma(t)) + \beta(t)(N(\gamma(t)) \wedge \gamma'(t)).$$

Os escalares  $\kappa_n(\gamma, t) = -\alpha(t)$  e  $\kappa_g(\gamma, t) = \beta(t)$  são chamados respectivamente *curvatura normal* e *curvatura geodésica* de  $\gamma$  em  $t$ .



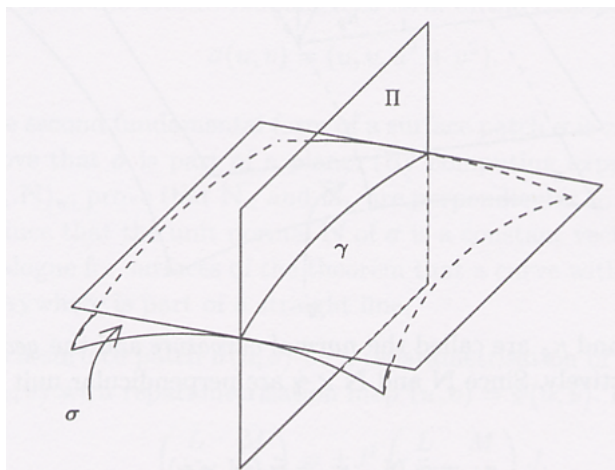
Portanto

$$\kappa_n(\gamma, t) = -\left(\gamma''(t) \mid N(\gamma(t))\right), \quad \kappa_g(\gamma, t) = \left(\gamma''(t) \mid N(\gamma(t)) \wedge \gamma'(t)\right)$$

e  $\|\gamma''(t)\|^2 = (\kappa_n(\gamma, t))^2 + \kappa_g(\gamma, t)^2$ . Logo, a curvatura  $\kappa_\gamma(t) = \|\gamma''(t)\|$  de  $\gamma$  é dada por

$$(\kappa_\gamma(t))^2 = (\kappa_n(\gamma, t))^2 + (\kappa_g(\gamma, t))^2.$$

Um caso particular importante ocorre quando  $\gamma$  é uma *secção normal* da superfície, isto é,  $\gamma$  é a intersecção de  $S$  com um plano  $\Pi$  que é perpendicular ao plano tangente da superfície em todo o ponto de  $\gamma$ .



**Exemplos.** (1) Dado um vector unitário  $v$ , tangente a  $S$  em  $p$ , a intersecção de  $S$  com o plano  $\Pi$  determinado por  $v$  e pela normal  $N(p)$ , é uma secção normal de  $S$ , chamada *secção normal de  $S$  na direcção de  $v$* .

(2) As secções normais de um plano são rectas tendo pois curvatura nula.

(3) As secções normais de uma esfera de raio  $r$  são circunferências de círculo máximo, cuja curvatura é igual a  $1/r$ .

Como os pontos de  $\gamma$  pertencem a  $\Pi$ ,  $\gamma$  é plana,  $\Pi$  é o plano osculador de  $\gamma$  e  $N_\gamma(t)$  é paralelo a  $\Pi$ . Como  $\Pi$  é perpendicular ao plano tangente,  $N(\gamma(t))$  também é paralelo a  $\Pi$ . Mas  $N_\gamma(t)$  e  $N(\gamma(t))$  são ambos perpendiculares a  $\gamma'(t)$  e  $\gamma'(t)$  é paralelo a  $\Pi$ , logo  $N_\gamma(t)$  e  $N(\gamma(t))$  têm que ser paralelos, isto é,  $N_\gamma(t) = \pm N(\gamma(t))$ . Então  $\kappa_n(\gamma, t) = \pm \kappa_\gamma(t)$  e  $\kappa_g(\gamma, t) = 0$  para uma secção normal.

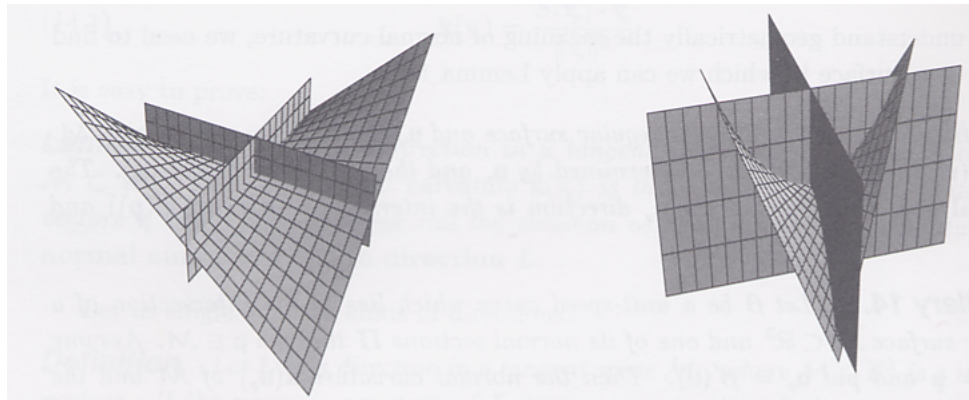
Em conclusão,

*as curvaturas normais das secções normais de  $S$  são, a menos de sinal, iguais às suas curvaturas.*

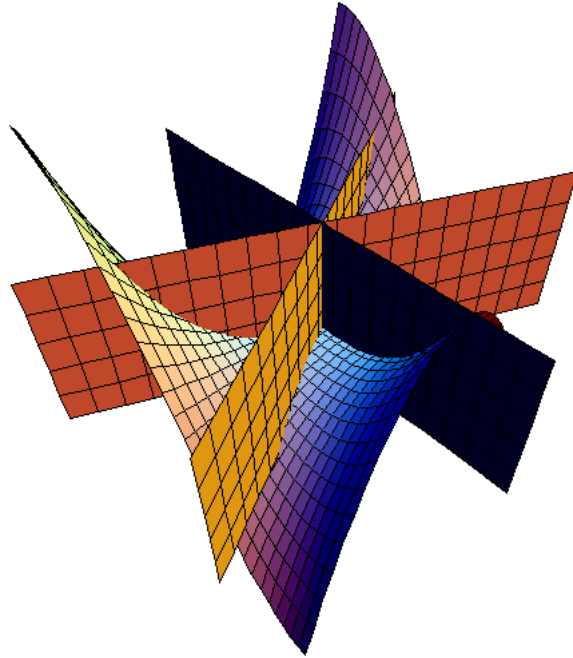
(Terão o mesmo sinal quando  $N(\gamma(t))$  e  $N_\gamma(t)$  têm o mesmo sentido e terão sinal oposto caso contrário.)

**Observação.** Pode provar-se que uma curva  $\gamma$  em  $S$  é uma geodésica (pág. 86) se e só se a sua curvatura geodésica é nula em qualquer ponto. Portanto qualquer secção normal é uma geodésica.

À medida que o vector tangente muda de direcção, a superfície pode “curvar” de maneira muito diferente. Um bom exemplo disto acontece no ponto central dum parabolóide hiperbólico. Na seguinte figura, à esquerda, ambas as secções normais intersectam a superfície em rectas; portanto a curvatura normal determinada por cada uma destas secções é nula. Contrastando com isto, na figura da direita, que mostra as secções normais definidas pelos vectores principais, a curvatura normal determinada por uma das secções é positiva enquanto que a outra é negativa.



As secções normais no centro de uma sela de macaco são similares a estas do parabolóide hiperbólico, mas mais complicadas:



Vejam os como a curvatura normal está relacionada com a segunda forma fundamental.

**Lema 6.5. (Lema de Meusnier)**

- (a) *Seja  $\gamma : I \rightarrow W \subseteq S$  uma curva parametrizada por comprimento de arco tal que  $\gamma(t_0) = p$ . Então  $\kappa_n(\gamma, t_0) = II_p(\gamma'(t_0), \gamma'(t_0))$ .*
- (b) *Se  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  são curvas em  $S$  parametrizadas por comprimento de arco tais que  $\gamma_1(t_1) = \gamma_2(t_2) = p$  e  $\gamma_1'(t_1) = \gamma_2'(t_2)$  então  $\kappa_n(\gamma_1, t_1) = \kappa_n(\gamma_2, t_2)$ .*

**Demonstração:** (a) Para cada  $t \in I$ ,  $(\gamma'(t) | N(\gamma(t))) = 0$  pois  $\gamma'(t) \in T_{\gamma(t)}S$  e  $N(\gamma(t))$  é ortogonal a  $T_{\gamma(t)}S$ . Derivando obtemos

$$(\gamma''(t) | N(\gamma(t))) + (\gamma'(t) | (N \circ \gamma)'(t)) = 0.$$

Em particular,  $(\gamma'(t_0) | (N \circ \gamma)'(t_0)) = -(\gamma''(t_0) | N(\gamma(t_0)))$ , donde

$$\kappa_n(\gamma, t_0) = (\gamma'(t_0) | (N \circ \gamma)'(t_0)) = (\gamma'(t_0) | \mathcal{G}_{*p}(\gamma'(t_0))) = II_p(\gamma'(t_0), \gamma'(t_0)).$$

(b) Consequência imediata de (a). ■

**Proposição 6.6.** *Seja  $p$  um ponto de  $S$ . Então*

$$\left\{ \kappa_n(\gamma, t_0) \mid \gamma : I \rightarrow S, t_0 \in I, \gamma(t_0) = p \right\} = [\kappa_2(p), \kappa_1(p)].$$

**Demonstração:** Seja  $(e_1, e_2)$  a tal base ortonormada de  $T_p S$  formada por vectores próprios de  $\mathcal{G}_{*p}$ . Denotando por  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  as coordenadas de  $\gamma'(t_0)$  nesta base,  $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 = \|\gamma'(t_0)\|^2 = 1$ . Então

$$\begin{aligned}\kappa_n(\gamma, t_0) &= \left( \gamma'(t_0) \mid \mathcal{G}_{*p}(\gamma'(t_0)) \right) \\ &= (\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 \mid \mathcal{G}_{*p}(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2)) \\ &= (\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 \mid \alpha_1 \kappa_1 e_1 + \alpha_2 \kappa_2 e_2) \\ &= \kappa_1 \alpha_1^2 + \kappa_2 \alpha_2^2,\end{aligned}$$

donde

$$\kappa_2 = \kappa_2 \alpha_1^2 + \kappa_2 \alpha_2^2 \leq \kappa_n(\gamma, t_0) \leq \kappa_1 \alpha_1^2 + \kappa_1 \alpha_2^2 = \kappa_1.$$

Isto mostra que  $\{\kappa_n(\gamma, t_0) \mid \gamma : I \rightarrow S, t_0 \in I, \gamma(t_0) = p\} \subseteq [\kappa_2(p), \kappa_1(p)]$ .

Reciprocamente, dado  $a \in [\kappa_2(p), \kappa_1(p)]$ , consideremos o vector  $v = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$  de coordenadas

$$\alpha_1 = \sqrt{\frac{a - \kappa_2}{\kappa_1 - \kappa_2}} \quad \text{e} \quad \alpha_2 = \sqrt{\frac{a - \kappa_1}{\kappa_2 - \kappa_1}}.$$

Como  $v \in T_p S$ , existe uma curva  $\gamma : I \rightarrow S$  em  $S$  tal que  $\gamma(t_0) = p$  e  $\gamma'(t_0) = v$ . Evidentemente

$$\kappa_n(\gamma, t_0) = \kappa_1 \alpha_1^2 + \kappa_2 \alpha_2^2 = \kappa_1 \frac{a - \kappa_2}{\kappa_1 - \kappa_2} + \kappa_2 \frac{a - \kappa_1}{\kappa_2 - \kappa_1} = a.$$

■

E mais: quando  $\kappa_2 < \kappa_1$ ,  $\kappa_n(\gamma, t_0) = \kappa_1 \alpha_1^2 + \kappa_2 \alpha_2^2$  atinge o valor máximo  $\kappa_1$  se e só se

$$\kappa_1 + \alpha_2^2(\kappa_2 - \kappa_1) = \kappa_1 \Leftrightarrow \alpha_2 = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 = \pm 1,$$

ou seja, quando  $\gamma'(t_0) = \pm e_1$ . Analogamente,  $\kappa_n(\gamma, t_0)$  atinge o valor mínimo  $\kappa_2$  para  $\gamma'(t_0) = \pm e_2$ .

Em conclusão:

*As curvaturas principais num ponto  $p \in S$  são o máximo e o mínimo valores das curvaturas normais de todas as curvas em  $S$  que passam por  $p$ . As direcções principais são os vectores tangentes das curvas dando esses valores máximo e mínimo.*

A Proposição 6.6 permite-nos tirar alguma informação geométrica do conhecimento da natureza de um ponto  $p \in S$ :

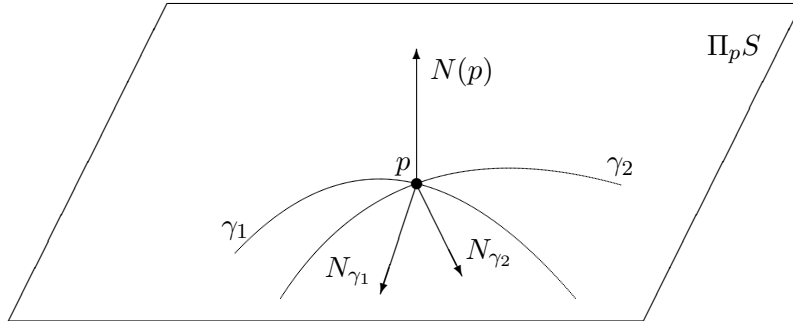
**Caso 1:**  *$p$  é elíptico.*

Isto significa que  $\kappa_1 \neq 0$  e  $\kappa_2 \neq 0$  têm o mesmo sinal. Então, para qualquer par de curvas  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  em  $S$  tais que  $\gamma_1(t_1) = \gamma_2(t_2) = p$ , temos

$$\kappa_2 \leq \kappa_n(\gamma_i, t_i) = -\|\gamma_i''(t_i)\|(N_{\gamma_i}(t_i) \mid N(p)) \leq \kappa_1 \quad (i = 1, 2).$$



Consequentemente  $(N_{\gamma_1}(t_1) \mid N(p))$  e  $(N_{\gamma_2}(t_2) \mid N(p))$  têm o mesmo sinal pelo que  $N_{\gamma_1}(t_1)$  e  $N_{\gamma_2}(t_2)$  “apontam” para o mesmo lado de  $\Pi_p S$ :

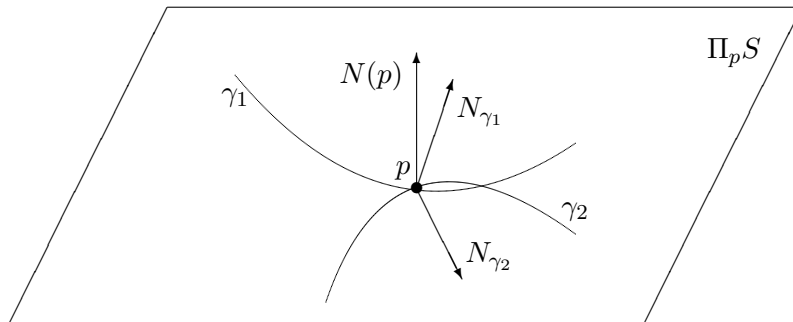


Em conclusão:

*Numa vizinhança de  $p$ , as curvas em  $S$  que passam por  $p$  “apontam” todas para o mesmo lado de  $\Pi_p S$ .*

**Caso 2:**  *$p$  é hiperbólico.*

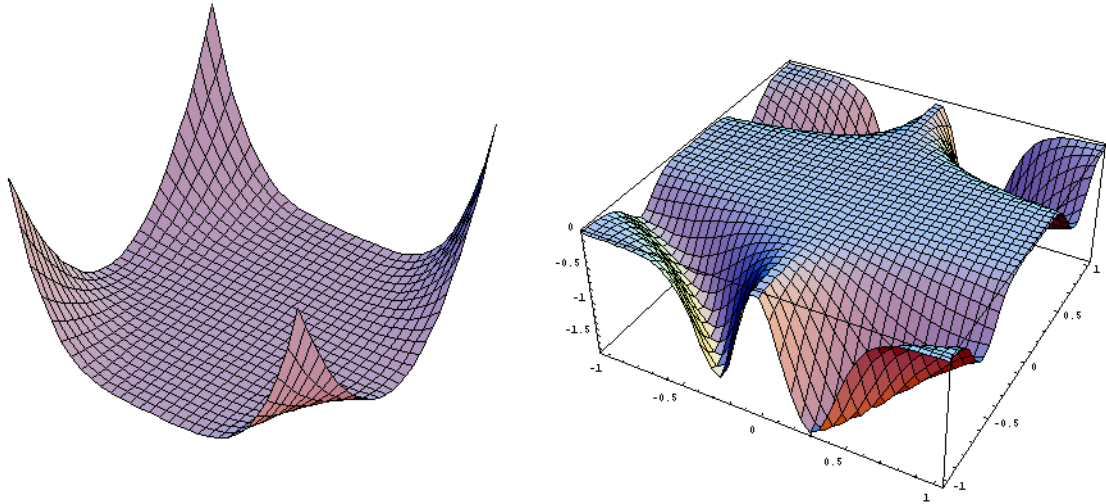
Neste caso, como  $\kappa_1$  e  $\kappa_2$  têm sinais contrários, existem curvas  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  em  $S$  com  $\gamma_1(t_1) = \gamma_2(t_2) = p$  tais que  $N_{\gamma_1}(t_1)$  e  $N_{\gamma_2}(t_2)$  “apontam” para lados opostos de  $\Pi_p S$ :



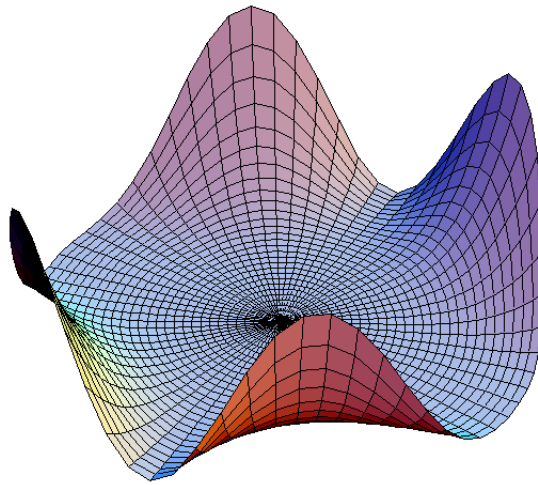
Em conclusão:

*Numa vizinhança de  $p$ , existem curvas em  $S$  que passam por  $p$  que “apontam” para lados opostos de  $\Pi_p S$ .*

**Exemplo.** Consideremos a superfície definida pela equação  $z = x^2 y^4$ , cujo gráfico (para  $x \in [-1, 1], y \in [-1, 1]$ ) pode ver-se na figura seguinte, à esquerda.



O gráfico da direita representa a respectiva curvatura gaussiana e mostra que esta nunca é positiva. Portanto não há pontos elípticos. Todavia, o gráfico da superfície não mostra claramente isso. Redesenhando o gráfico de outro modo, é possível observar-se a olho nu que todos os pontos são hiperbólicos ou planares:



Podemos obter ainda mais informação geométrica das curvaturas principais. Em primeiro lugar, comecemos por observar que, aplicando um movimento rígido de  $\mathbb{R}^3$  e uma mudança de coordenadas a  $\sigma$  (o que não altera evidentemente a forma da superfície), podemos sempre supor que

- $p = (0, 0, 0)$  e  $\sigma(0, 0) = p$ ;
- o plano tangente a  $S$  em  $p$  definido por  $\sigma$  é o plano  $XOY$ ;
- os vectores paralelos aos eixos  $OX$  e  $OY$  são vectores principais em  $p$ , correspondendo às curvaturas principais  $\kappa_1$  e  $\kappa_2$ .

Então os vectores principais unitários podem ser expressos em termos de  $\frac{\partial \sigma}{\partial x}(0, 0)$  e  $\frac{\partial \sigma}{\partial y}(0, 0)$ :

$$(1, 0, 0) = \alpha_1 \frac{\partial \sigma}{\partial x}(0, 0) + \beta_1 \frac{\partial \sigma}{\partial y}(0, 0), \quad (0, 1, 0) = \alpha_2 \frac{\partial \sigma}{\partial x}(0, 0) + \beta_2 \frac{\partial \sigma}{\partial y}(0, 0).$$

Assim qualquer ponto  $(x, y, 0)$  no plano tangente  $\Pi_p S$  é igual a

$$x \left( \alpha_1 \frac{\partial \sigma}{\partial x}(0, 0) + \beta_1 \frac{\partial \sigma}{\partial y}(0, 0) \right) + y \left( \alpha_2 \frac{\partial \sigma}{\partial x}(0, 0) + \beta_2 \frac{\partial \sigma}{\partial y}(0, 0) \right) = s \frac{\partial \sigma}{\partial x}(0, 0) + t \frac{\partial \sigma}{\partial y}(0, 0),$$

denotando  $x\alpha_1 + y\alpha_2$  por  $s$  e  $x\beta_1 + y\beta_2$  por  $t$ . Usando a fórmula de Taylor podemos escrever

$$\begin{aligned} \sigma(s, t) &= \sigma(0, 0) + s \frac{\partial \sigma}{\partial x} + t \frac{\partial \sigma}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( s^2 \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} + 2st \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x \partial y} + t^2 \frac{\partial^2 \sigma}{\partial y^2} \right) + R(s, t) \\ &= (0, 0, 0) + (x, y, 0) + \frac{1}{2} \left( s^2 \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} + 2st \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x \partial y} + t^2 \frac{\partial^2 \sigma}{\partial y^2} \right) + R(s, t) \end{aligned}$$

onde

$$\lim_{(s,t) \rightarrow (0,0)} \frac{R(s,t)}{s^2 + t^2} = 0$$

e todas as derivadas são calculadas na origem  $(0, 0)$ . Como  $\Pi_p S = XOY$ , então  $N(p) = (0, 0, 1)$  e para qualquer  $(x, y, z) = \sigma(s, t) \in S$ ,

$$\begin{aligned} z &= \left( \sigma(s, t) \mid N(p) \right) \\ &= \left( \frac{1}{2} \left( s^2 \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2}(0, 0) + 2st \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x \partial y}(0, 0) + t^2 \frac{\partial^2 \sigma}{\partial y^2}(0, 0) \right) + R(s, t) \mid N(p) \right). \end{aligned}$$

Logo, para qualquer ponto  $(x, y, z) = \sigma(s, t) \in S$  suficientemente próximo de  $p$  podemos desprezar os termos de ordem superior a dois e concluir que

$$\begin{aligned} z &= -\frac{1}{2}(s^2 e + 2stf + t^2 g) \\ &= -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} s & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e & f \\ f & g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Denotando a matriz da segunda forma fundamental por  $\mathcal{F}_{II}$  e como

$$\begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{bmatrix}$$

podemos concluir que

$$\begin{aligned} z &= -\frac{1}{2} \left( x^2 \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \end{bmatrix} \mathcal{F}_{II} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{bmatrix} + \right. \\ &\quad \left. + xy \left( \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \end{bmatrix} \mathcal{F}_{II} \begin{bmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \end{bmatrix} \mathcal{F}_{II} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{bmatrix} \right) + \right. \\ &\quad \left. + y^2 \begin{bmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \end{bmatrix} \mathcal{F}_{II} \begin{bmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \right) \\ &= -\frac{1}{2} \left( x^2 II_p(e_1, e_1) + 2xy II_p(e_1, e_2) + y^2 II_p(e_2, e_2) \right) \\ &= -\frac{1}{2} (\kappa_1 x^2 + \kappa_2 y^2). \end{aligned}$$

Em conclusão:

Numa vizinhança de  $p$ , se desprezarmos os termos de ordem superior a dois, a superfície coincide com a superfície quádrlica

$$z = -\frac{1}{2}(\kappa_1 x^2 + \kappa_2 y^2). \quad (6.6.1)$$

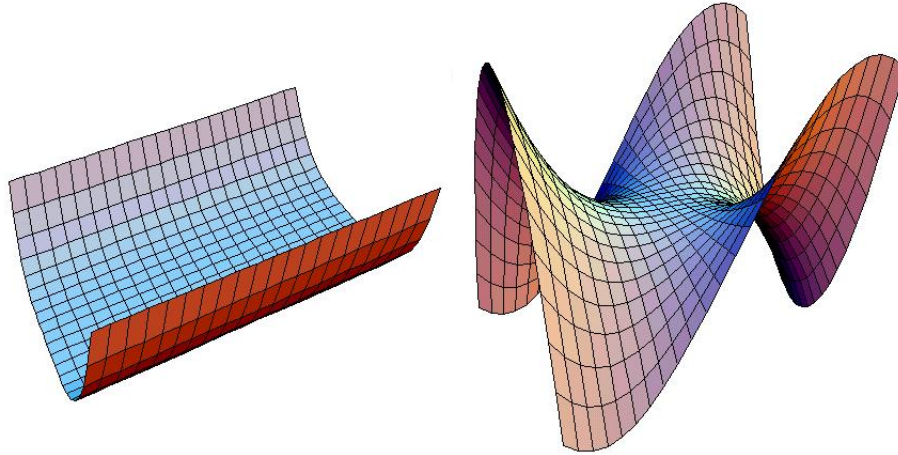
Temos quatro casos a distinguir:

**Caso 1:**  $\kappa_1 > 0$  e  $\kappa_2 > 0$  ou  $\kappa_1 < 0$  e  $\kappa_2 < 0$ . Então (6.6.1) é a equação de um parabolóide elíptico (recorde o Teorema 4.1) e  $p$  é um ponto elíptico.

**Caso 2:**  $\kappa_1 > 0$  e  $\kappa_2 < 0$ . Então (6.6.1) é a equação de um parabolóide hiperbólico e  $p$  é um ponto hiperbólico.

**Caso 3:**  $\kappa_1 = 0$  e  $\kappa_2 < 0$  ou  $\kappa_1 > 0$  e  $\kappa_2 = 0$ . Então (6.6.1) é a equação de um cilindro parabólico e  $p$  é um ponto parabólico.

**Caso 4:**  $\kappa_1 = \kappa_2 = 0$ . Então (6.6.1) é a equação de um plano e  $p$  é um ponto planar. Neste caso, não podemos determinar a forma da superfície na vizinhança de  $p$  sem examinar as derivadas de ordem superior a dois (no caso não planar, estes termos são pequenos comparados com  $\kappa_1 x^2 + \kappa_2 y^2$  quando  $x$  e  $y$  são pequenos). Por exemplo, nas superfícies seguintes ( $z = y^4$ , à esquerda, e a sela do macaco, à direita) a origem é um ponto planar, mas têm formas muito diferentes.



(Note que esta classificação é independente do mapa  $\sigma$ , uma vez que mudar de orientação deixa as curvaturas principais inalteradas ou muda-as, a ambas, de sinal.)

## Exercícios

6.1 Considere a superfície de revolução parametrizada por

$$\sigma(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u)),$$

onde  $v \in (0, 2\pi)$ ,  $u \in I$  e  $f$  é uma função positiva. Se a geratriz  $\gamma(u) = (f(u), 0, g(u))$  está parametrizada por comprimento de arco, mostre que

$$K(u, v) = -f''(u)/f(u).$$

6.2 Seja  $S = G_f$ , onde  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  é suave e  $U$  é um aberto de  $\mathbb{R}^2$ . Mostre que

$$K(x, y) = \frac{\det H(x, y)}{(1 + f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y))^2},$$

onde  $H(x, y)$  é a matriz hessiana de  $f$  em  $(x, y)$ .

- 6.3 (a) Prove que todos os pontos de  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2 + y^2\}$  são elípticos.  
 (b) Prove que todos os pontos de  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2 - y^2\}$  são hiperbólicos.  
 (c) Prove que  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^3 + y^3\}$  contém pontos de qualquer um dos quatro tipos, determinando-os.

6.4 Sendo  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  duas funções de classe  $C^\infty$ , considere a função

$$\begin{aligned} h : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto f(x) + g(y). \end{aligned}$$

Calcule as duas formas fundamentais e classifique os pontos do gráfico de  $h$  relacionando, quando possível, a sua natureza com o sentido da concavidade das funções  $f$  e  $g$ .

6.5 Uma *superfície minimal* é uma superfície cuja curvatura média  $H$  é nula em qualquer ponto.

- (a) Seja  $\sigma : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  um mapa conformal (veja o Exercício 5.5) duma superfície  $S$ . Prove que  $S$  é minimal se e só se o laplaciano  $\frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 \sigma}{\partial y^2}(x, y)$  é sempre nulo.  
 (b) Mostre que a superfície de Enneper (Exercício 5.5) é minimal.

6.6 Considere o toro  $T$  com o mapa

$$\sigma(u, v) = \left( (2 + \cos v) \cos u, (2 + \cos v) \sin u, \sin v \right), \quad (u, v) \in (0, 2\pi) \times (0, 2\pi).$$

- (a) Mostre que a curvatura gaussiana e média no ponto  $p = \sigma(u, v)$  são dadas por, respectivamente,

$$K(p) = \frac{\cos v}{2 + \cos v} \text{ e } H(p) = \frac{1 + \cos v}{2 + \cos v}.$$

- (b) Prove que  $T$  não contém pontos planares e determine os seus pontos elípticos, hiperbólicos e parabólicos. Identifique-os na figura da página ??.  
 (c) Diz-se que um ponto  $p$  de uma superfície é *umbilical* se as curvaturas principais  $k_1(p)$  e  $k_2(p)$  são iguais. O toro  $T$  possui pontos umbilicais?

6.7 Seja  $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma curva regular, parametrizada por comprimento de arco, cuja curvatura nunca se anula, e considere a superfície  $S$  parametrizada por

$$\begin{aligned} \sigma : (0, 1) \times (0, 1) &\longrightarrow S \\ (s, u) &\longmapsto f(s) + uT_f(s). \end{aligned}$$

- (a) Prove que, para cada  $s_0 \in (0, 1)$ , todos os pontos  $\sigma(s_0, u)$ , com  $u \in (0, 1)$ , admitem o mesmo plano tangente.  
 (b) Seja  $p = \sigma(s, u)$  um ponto arbitrário de  $S$ . Mostre que

$$K(p) = 0 \text{ e } H(p) = \frac{\tau_f(s)}{2u\kappa_f(s)}.$$

Classifique os pontos de  $S$ .

6.8 Sendo  $p(x, y) = ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f$  ( $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ ) um polinómio arbitrário de grau 2 nas duas variáveis  $x$  e  $y$ , considere

$$S_p = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = p(x, y)\}.$$

- (a) Mostre que  $S_p$  é uma superfície.  
 (b) Prove que, para cada  $p$ , todos os pontos de  $S_p$  são elípticos ou todos os pontos de  $S_p$  são hiperbólicos ou todos os pontos de  $S_p$  são planares ou parabólicos.  
 Para que polinómios  $p$  é que os pontos de  $S_p$  são todos elípticos? E hiperbólicos?

6.9 Prove que:

- (a) Todo o ponto umbilical (Exercício 6.6) é planar ou elíptico.  
 (b) Se a superfície é minimal (Exercício 6.5) então todo o ponto umbilical é planar.  
 (c) Todo o ponto da esfera  $S^2$  é umbilical.

6.10 Seja  $\sigma : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  um mapa de uma superfície  $S$  e  $p = \sigma(q)$  um ponto de  $S$ . Denote por  $\mathcal{F}_I$  e  $\mathcal{F}_{II}$ , respectivamente, as matrizes da primeira e da segunda formas fundamentais de  $\sigma$  em  $p$ . Prove que:

(a)

$$\frac{\partial(\mathcal{G} \circ \sigma)}{\partial x}(q) = a \frac{\partial \sigma}{\partial x}(q) + b \frac{\partial \sigma}{\partial y}(q) \text{ e } \frac{\partial(\mathcal{G} \circ \sigma)}{\partial y}(q) = c \frac{\partial \sigma}{\partial x}(q) + d \frac{\partial \sigma}{\partial y}(q)$$

onde

$$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$$

é a matriz de Weingarten  $\mathcal{W} = \mathcal{F}_I^{-1} \mathcal{F}_{II}$  do mapa  $\sigma$ .

(b) Se  $p$  é umbilical, ou seja,  $\kappa_1(p) = \kappa_2(p) = \kappa$ , então:

(i)  $\mathcal{F}_{II} = \kappa \mathcal{F}_I$  e, portanto, todo o vector tangente a  $S$  em  $p$  é um vector principal;

(ii)

$$\frac{\partial(\mathcal{G} \circ \sigma)}{\partial x}(q) = \kappa \frac{\partial \sigma}{\partial x}(q) \text{ e } \frac{\partial(\mathcal{G} \circ \sigma)}{\partial y}(q) = \kappa \frac{\partial \sigma}{\partial y}(q).$$

(c) Se  $S$  é uma superfície (conexa) na qual todo o ponto é umbilical e  $\kappa(q)$  denota o valor comum das curvaturas principais em cada  $p = \sigma(q)$  então:

(i)

$$\frac{\partial \kappa}{\partial y}(q) \frac{\partial \sigma}{\partial x}(q) = \frac{\partial \kappa}{\partial x}(q) \frac{\partial \sigma}{\partial y}(q);$$

(ii)  $\kappa$  é constante;

(iii)  $S$  é parte de um plano ou de uma esfera.