

## 7. O Teorema Egregium de Gauss

*Estamos agora em condições de provar um dos teoremas mais importantes do século XIX. Os matemáticos no final do século XVIII, como Euler e Monge, já usavam a curvatura Gaussiana, mas somente como produto das curvaturas principais da superfície. Como cada uma delas depende da segunda forma fundamental, ou seja, do modo particular como a superfície  $S$  está mergulhada em  $\mathbb{R}^3$ , não existe nenhuma razão aparente para supor que o produto das curvaturas principais é intrínseco a  $S$ . A descoberta de Gauss, publicada em 1827, de que o produto das curvaturas principais só depende da geometria intrínseca da superfície revolucionou a geometria diferencial.*

Ao longo desta secção, para tornar menos pesada a escrita das fórmulas, dada uma aplicação  $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  suave, usaremos as notações

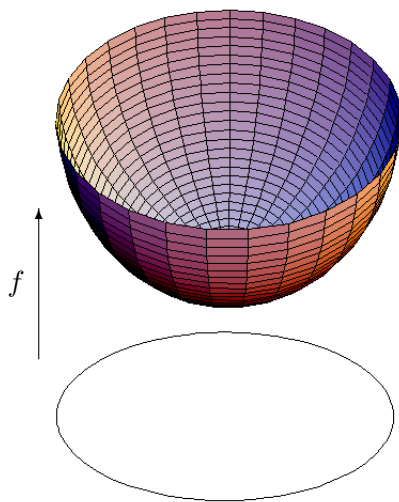
$$\sigma_x = \frac{\partial \sigma}{\partial x}, \sigma_y = \frac{\partial \sigma}{\partial y}, \sigma_{xx} = \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2}, \sigma_{xy} = \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x \partial y}, \text{ etc.}$$

**Exemplo 7.1.** Sejam

$$S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 < 1, z = 0\},$$

$$S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 < 1, z = x^2 + y^2\}$$

e  $f : S_1 \rightarrow S_2$  definida por  $f(x, y, 0) = (x, y, x^2 + y^2)$ .



Denotando o aberto  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$  de  $\mathbb{R}^2$  por  $U$ ,  $\sigma_1 : U \rightarrow S_1$ , definida por  $\sigma_1(x, y) = (x, y, 0)$ , é uma parametrização global de  $S_1$ , enquanto  $\sigma_2 = f \circ \sigma_1$  é uma parametrização global de  $S_2$ . Como

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_1}{\partial x}(x, y) &= (1, 0, 0), \quad \frac{\partial \sigma_1}{\partial y}(x, y) = (0, 1, 0), \\ \frac{\partial \sigma_2}{\partial x}(x, y) &= (1, 0, 2x), \quad \frac{\partial \sigma_2}{\partial y}(x, y) = (0, 1, 2y), \end{aligned}$$

então

$$\begin{aligned} E_1(x, y) &= 1, F_1(x, y) = 0, G_1(x, y) = 1, \\ E_2(x, y) &= 1 + 4x^2, F_2(x, y) = 4xy, G_2(x, y) = 1 + 4y^2, \end{aligned}$$

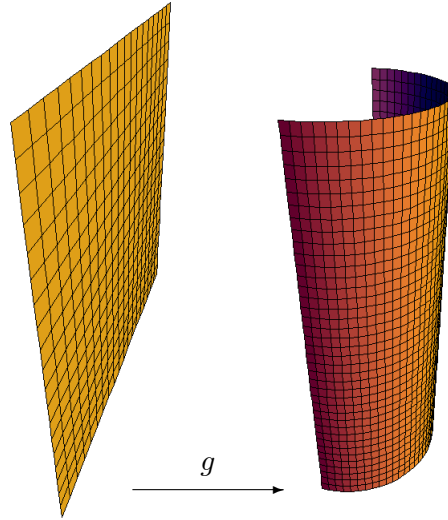
peço que  $f$  não é uma isometria.

**Exemplo 7.2.** Sejam agora

$$T_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 0, |x| < \pi/2\},$$

$$T_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1, y > 0\}$$

e  $g : T_1 \rightarrow T_2$  definida por  $g(x, 0, z) = (\sin x, \cos x, z)$ .



Tomando o aberto  $U = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < \pi/2\}$ , a parametrização global de  $T_1$ ,  $\sigma_1 : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ , dada por  $\sigma_1(x, z) = (x, 0, z)$ , e a correspondente parametrização global  $\sigma_2 = g \circ \sigma_1$  de  $T_2$ , temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_1}{\partial x}(x, z) &= (1, 0, 0), \quad \frac{\partial \sigma_1}{\partial z}(x, z) = (0, 0, 1), \\ \frac{\partial \sigma_2}{\partial x}(x, z) &= (\cos x, -\sin x, 0), \quad \frac{\partial \sigma_2}{\partial z}(x, z) = (0, 0, 1), \\ E_1(x, z) &= 1, F_1(x, z) = 0, G_1(x, z) = 1, \\ E_2(x, z) &= 1, F_2(x, z) = 0, G_2(x, z) = 1. \end{aligned}$$

Assim, neste caso,  $g$  é uma isometria.

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \sigma_1}{\partial x^2}(x, z) &= \frac{\partial^2 \sigma_1}{\partial x \partial z}(x, z) = \frac{\partial^2 \sigma_1}{\partial z^2}(x, z) = 0, \\ \frac{\partial^2 \sigma_2}{\partial x^2}(x, z) &= (-\sin x, -\cos x, 0), \quad \frac{\partial^2 \sigma_2}{\partial x \partial z}(x, z) = \frac{\partial^2 \sigma_2}{\partial z^2}(x, z) = 0, \end{aligned}$$

$$N_{\sigma_2}(x, y, z) = (-\sin x, -\cos x, 0),$$

donde

$$e_1(x, z) = f_1(x, z) = g_1(x, z) = 0$$

e

$$e_2(x, z) = -(N_{\sigma_2}(x, y, z) | \frac{\partial^2 \sigma_2}{\partial x^2}(x, z)) = -1 \neq 0.$$

Portanto,  $g$  não preserva a segunda forma fundamental apesar de ser uma isometria.

No Exemplo 7.2, temos uma folha de papel plana  $T_1$  que é transformada em metade de um cilindro  $T_2$ . A folha foi simplesmente arqueada, tendo-se somente modificado a sua relação com o espaço ambiente  $\mathbb{R}^3$ . Este facto é descrito pelo seguinte: a primeira forma fundamental não foi alterada; a segunda forma foi alterada.

Dizemos que a primeira forma fundamental de uma superfície  $S$  descreve a *geometria intrínseca* de  $S$  e que a segunda forma fundamental descreve a *geometria extrínseca* de  $S$ .

À aplicação  $d_S : S \times S \rightarrow \mathbb{R}$ , tomando para  $d_S(p_1, p_2)$  o ínfimo dos comprimentos das curvas  $\gamma : [0, 1] \rightarrow S$  tais que  $\gamma(0) = p_1$  e  $\gamma(1) = p_2$ , chama-se *distância intrínseca* da superfície  $S$ . Trata-se, de facto, de uma métrica em  $S$  (cf. [8], Prop. 413).

É evidente que uma isometria preserva sempre a distância intrínseca. Contudo poderá não preservar a distância “extrínseca”, como acontece no exemplo acima: sendo  $d$  a distância euclidiana de  $\mathbb{R}^3$ , dados  $p_1, p_2 \in T_1$ , não é verdade que  $d(g(p_1), g(p_2)) = d(p_1, p_2)$ . Por outro lado, a transformação  $f$  do Exemplo 7.1 (na qual a superfície  $S_1$  foi transformada em metade de uma esfera) altera a geometria intrínseca da superfície, ou seja, a sua primeira forma fundamental, como vimos. Note que neste caso existem pontos  $p_1, p_2 \in S_1$  tais que  $d_{S_2}(f(p_1), f(p_2)) > d_{S_1}(p_1, p_2)$ . O facto de  $g$  preservar a curvatura de Gauss não é acidental. O Teorema de Gauss, que provaremos em seguida, mostra que a curvatura de Gauss é invariante por isometria.

Para demonstrar este resultado clássico fundamental necessitamos de introduzir os chamados símbolos de Christoffel. Seja  $\sigma : U \rightarrow S$  uma parametrização de uma superfície regular  $S$ . Consideremos ainda o referencial

$$\left\{ \frac{\partial \sigma}{\partial x}(q), \frac{\partial \sigma}{\partial y}(q), N(p) \right\}$$

definido em cada ponto  $p = \sigma(q)$  da superfície  $S$ . Existem funções  $\Gamma_{jk}^i$ ,  $i, j, k = 1, 2$ ,  $L_1, L_2, \bar{L}_2, L_3, a_{ij}$ ,  $1 \leq i, j \leq 2$  tais que

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \Gamma_{11}^1 \sigma_x + \Gamma_{11}^2 \sigma_y + L_1 N \\ \sigma_{xy} &= \Gamma_{12}^1 \sigma_x + \Gamma_{12}^2 \sigma_y + L_2 N \\ \sigma_{yx} &= \Gamma_{21}^1 \sigma_x + \Gamma_{21}^2 \sigma_y + \bar{L}_2 N \\ \sigma_{yy} &= \Gamma_{22}^1 \sigma_x + \Gamma_{22}^2 \sigma_y + L_3 N \\ N_x &= a_{11} \sigma_x + a_{21} \sigma_y \\ N_y &= a_{12} \sigma_x + a_{22} \sigma_y. \end{aligned} \tag{7.2.1}$$

As funções  $\Gamma_{jk}^i$  dizem-se os *símbolos de Christoffel* de  $S$  relativamente à parametrização  $\sigma$ . Note que

$$\begin{aligned} L_1 &= (\sigma_{xx}|N) = e, \\ L_2 &= (\sigma_{xy}|N) = f, \\ \bar{L}_2 &= L_2 = f, \\ L_3 &= (\sigma_{yy}|N) = g. \end{aligned} \tag{7.2.2}$$

Como  $\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$  e  $\sigma_x, \sigma_y, N$  são linearmente independentes,

$$\Gamma_{12}^i = \Gamma_{21}^i, \quad i = 1, 2.$$

**Lema 7.3.** *Os símbolos de Christoffel de uma superfície  $S$  relativamente a uma parametrização  $\sigma$  estão relacionados com a primeira forma fundamental pelas seguintes igualdades:*

$$\begin{cases} \Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F = \frac{1}{2} E_x, \\ \Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G = F_x - \frac{1}{2} E_y, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Gamma_{12}^1 E + \Gamma_{12}^2 F = \frac{1}{2} E_y, \\ \Gamma_{12}^1 F + \Gamma_{12}^2 G = \frac{1}{2} G_x, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Gamma_{22}^1 E + \Gamma_{22}^2 F = F_y - \frac{1}{2} G_x, \\ \Gamma_{22}^1 F + \Gamma_{22}^2 G = \frac{1}{2} G_y, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2 = (\log \sqrt{EG - F^2})_x, \\ \Gamma_{12}^1 + \Gamma_{22}^2 = (\log \sqrt{EG - F^2})_y. \end{cases}$$

**Demonstração:** As primeiras seis são imediatas de (7.2.1):

- $\Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F = \Gamma_{11}^1(\sigma_x|\sigma_x) + \Gamma_{11}^2(\sigma_y|\sigma_x) = (\Gamma_{11}^1 \sigma_x + \Gamma_{11}^2 \sigma_y|\sigma_x) = (\sigma_{xx}|\sigma_x) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \|\sigma_x\|^2 = \frac{1}{2} E_x.$
- $\Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G = \Gamma_{11}^1(\sigma_x|\sigma_y) + \Gamma_{11}^2(\sigma_y|\sigma_y) = (\sigma_{xx}|\sigma_y) = \frac{\partial}{\partial x}(\sigma_x|\sigma_y) - (\sigma_x|\sigma_{xy}) = F_x - \frac{1}{2} E_y.$
- $\Gamma_{12}^1 E + \Gamma_{12}^2 F = \Gamma_{12}^1(\sigma_x|\sigma_x) + \Gamma_{12}^2(\sigma_y|\sigma_x) = (\sigma_{xy}|\sigma_x) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} \|\sigma_x\|^2 = \frac{1}{2} E_y.$
- $\Gamma_{12}^1 F + \Gamma_{12}^2 G = \Gamma_{12}^1(\sigma_x|\sigma_y) + \Gamma_{12}^2(\sigma_y|\sigma_y) = (\sigma_{xy}|\sigma_y) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \|\sigma_y\|^2 = \frac{1}{2} G_x.$
- $\Gamma_{22}^1 E + \Gamma_{22}^2 F = \Gamma_{22}^1(\sigma_x|\sigma_x) + \Gamma_{22}^2(\sigma_y|\sigma_x) = (\sigma_{yy}|\sigma_x) = \frac{\partial}{\partial y}(\sigma_y|\sigma_x) - (\sigma_y|\sigma_{yx}) = F_y - \frac{1}{2} G_x.$
- $\Gamma_{22}^1 F + \Gamma_{22}^2 G = \Gamma_{22}^1(\sigma_x|\sigma_y) + \Gamma_{22}^2(\sigma_y|\sigma_y) = (\sigma_{yy}|\sigma_y) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} \|\sigma_y\|^2 = \frac{1}{2} G_y.$

As duas últimas são consequência das anteriores; provemos a primeira delas (a outra pode provar-se de forma análoga):

$$\begin{aligned}
(EG - F^2)_x &= EG_x + E_xG - 2FF_x \\
&= 2E(\Gamma_{12}^1F + \Gamma_{12}^2G) + 2G(\Gamma_{11}^1E + \Gamma_{11}^2F) - 2F(\Gamma_{11}^1F + \Gamma_{11}^2G + \Gamma_{12}^1E + \Gamma_{12}^2F) \\
&= 2EG\Gamma_{12}^2 + 2EG\Gamma_{11}^1 - 2F^2(\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2) \\
&= 2(EG - F^2)(\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2).
\end{aligned}$$

Então

$$\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2 = \frac{(EG - F^2)_x}{2(EG - F^2)} = (\log \sqrt{EG - F^2})_x. \quad \blacksquare$$

Resolvendo cada um dos três primeiros sistemas do Lema 7.3, relativamente aos símbolos de Christoffel, obtemos:

$$\left\{ \begin{array}{ll}
\Gamma_{11}^1 = \frac{GE_x - 2FF_x + FE_y}{2(EG - F^2)}, & \Gamma_{11}^2 = \frac{2EF_x - EE_y - FE_x}{2(EG - F^2)}, \\
\Gamma_{12}^1 = \frac{GE_y - FG_x}{2(EG - F^2)}, & \Gamma_{12}^2 = \frac{EG_x - FE_y}{2(EG - F^2)}, \\
\Gamma_{22}^1 = \frac{2GF_y - GG_x - FG_y}{2(EG - F^2)}, & \Gamma_{22}^2 = \frac{EG_y - 2FE_y + FG_x}{2(EG - F^2)}, \\
\Gamma_{21}^1 = \Gamma_{12}^1, & \Gamma_{21}^2 = \Gamma_{12}^2.
\end{array} \right. \quad (7.3.1)$$

Isto mostra que os símbolos de Christoffel só dependem de  $E, F, G$  e das suas derivadas, pelo que são invariantes por isometria, pelo Teorema 5.2.

**Teorema 7.4.** [Teorema Egregium de Gauss] *A curvatura de Gauss é invariante por isometria.*

**Demonstração:** Decorre de (7.2.1) e da definição da matriz de Weingarten na página 123 (nomeadamente da igualdade  $N_y = a_{12}\sigma_x + a_{22}\sigma_y$ ) que

$$\begin{aligned}
\sigma_{xxy} &= (\Gamma_{11}^1\sigma_x + \Gamma_{11}^2\sigma_y + eN)_y \\
&= \Gamma_{11y}^1\sigma_x + \Gamma_{11y}^2\sigma_y + e_yN + \Gamma_{11}^1\sigma_{xy} + \Gamma_{11}^2\sigma_{yy} + eN_y \\
&= \Gamma_{11y}^1\sigma_x + \Gamma_{11y}^2\sigma_y + e_yN + \\
&\quad \Gamma_{11}^1(\Gamma_{12}^1\sigma_x + \Gamma_{12}^2\sigma_y + fN) + \\
&\quad \Gamma_{11}^2(\Gamma_{22}^1\sigma_x + \Gamma_{22}^2\sigma_y + gN) + \\
&\quad e(a_{12}\sigma_x + a_{22}\sigma_y) \\
&= (\Gamma_{11y}^1 + \Gamma_{11}^1\Gamma_{12}^1 + \Gamma_{11}^2\Gamma_{22}^1 + ea_{12})\sigma_x + \\
&\quad (\Gamma_{11y}^2 + \Gamma_{11}^1\Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^2\Gamma_{22}^2 + ea_{22})\sigma_y + \\
&\quad (e_y + \Gamma_{11}^1f + \Gamma_{11}^2g)N,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{xyx} &= (\Gamma_{12}^1 \sigma_x + \Gamma_{12}^2 \sigma_y + fN)_x \\
&= \Gamma_{12x}^1 \sigma_x + \Gamma_{12x}^2 \sigma_y + f_x N + \Gamma_{12}^1 \sigma_{xx} + \Gamma_{12}^2 \sigma_{yx} + f N_x \\
&= \Gamma_{12x}^1 \sigma_x + \Gamma_{12x}^2 \sigma_y + f_x N + \\
&\quad \Gamma_{12}^1 (\Gamma_{11}^1 \sigma_x + \Gamma_{11}^2 \sigma_y + eN) + \\
&\quad \Gamma_{12}^2 (\Gamma_{21}^1 \sigma_x + \Gamma_{21}^2 \sigma_y + fN) + \\
&\quad f(a_{11} \sigma_x + a_{21} \sigma_y) \\
&= (\Gamma_{12x}^1 + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{21}^1 + f a_{11}) \sigma_x + \\
&\quad (\Gamma_{12x}^2 + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{21}^2 + f a_{21}) \sigma_y + \\
&\quad (f_x + \Gamma_{12}^1 e + \Gamma_{12}^2 f) N.
\end{aligned}$$

Como  $\sigma_{xxy} = \sigma_{xyx}$  e  $\sigma_x, \sigma_y, N$  são linearmente independentes, podemos concluir que

$$(\Gamma_{11}^2)_y + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 + e a_{22} = (\Gamma_{12}^2)_x + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{21}^2 + f a_{21},$$

ou seja,

$$(\Gamma_{12}^2)_x - (\Gamma_{11}^2)_y + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{21}^2 - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 = a_{22} e - f a_{21}.$$

Consequentemente, da definição da matriz de Weingarten na página 123,

$$\begin{aligned}
(\Gamma_{12}^2)_x - (\Gamma_{11}^2)_y + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{21}^2 - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 &= -\frac{fF - gE}{EG - F^2} e + f \frac{eF - fE}{EG - F^2} \\
&= E \frac{eg - f^2}{EG - F^2} \\
&= EK.
\end{aligned}$$

De modo análogo, das igualdades  $\sigma_{yyx} = \sigma_{yxy}$  e  $N_{xy} = N_{yx}$ , é possível formular  $FK$  e  $GK$  em função dos símbolos de Christoffel e das suas derivadas, logo, por (7.3.1), em função de  $E, F, G$  e das suas derivadas. Como as funções  $E, F, G$  não se podem anular simultaneamente, podemos concluir que a curvatura de Gauss  $K$  de uma superfície regular só depende das funções  $E, F, G$  e das suas derivadas sendo, assim, invariante por isometria. ■

Como as definições de ponto elíptico e de ponto hiperbólico só dependem da curvatura de Gauss, uma isometria transforma pontos elípticos em pontos elípticos e pontos hiperbólicos em pontos hiperbólicos.

O mesmo não acontece com os pontos planares e parabólicos. Com efeito, as noções de ponto planar e ponto parabólico não são invariantes por isometria: dependem não só da primeira forma fundamental da superfície, mas também da segunda forma fundamental. Por exemplo, a isometria  $g$  do Exemplo 7.2 transforma pontos planares em pontos parabólicos (Exercício 7.2).

**Exemplos.** (1) A parametrização  $\sigma : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  do cilindro, definida por

$$\sigma(u, v) = (\cos(u/a), \sin(u/a), av),$$

pode ser vista como um difeomorfismo entre o plano e o cilindro. Como vimos na Secção 5, em ambas as superfícies  $E = G = 1$  e  $F = 0$  pelo que  $\sigma$  é uma isometria. Por outro lado,  $\sigma$  não preserva nem a segunda forma fundamental nem a curvatura média.

(2) Temos agora outra justificação para o facto observado na Secção 5 de que não existe nenhuma isometria entre uma esfera e um plano: a curvatura de Gauss de uma esfera é diferente de zero, enquanto a de um plano é nula. Aqui reside a razão fundamental pela qual qualquer mapa plano de qualquer região da Terra distorce sempre as distâncias.

(3) O helicóide (Exercício 3.9), parametrizado por

$$\text{helicóide}_{a,b}(x, y) = (ay \cos x, ay \sin x, bx),$$

é isométrico ao catenóide (Exercício 4.2), parametrizado por

$$\text{catenóide}_t c(x, y) = (c \cos x \cosh(y/c), c \sin x \cosh(y/c), y),$$

pois estas duas superfícies são o estado inicial e o estado final de uma deformação entre superfícies (minimais) isométricas. Com efeito, para cada  $t \in [0, \pi/2]$ , seja

$$\text{helparacat}_t(x, y) = \cos t(\sinh y \sin x, -\sinh y \cos x, x) + \sin t(\cosh y \cos x, \cosh y \sin x, y).$$

É óbvio que

$$\text{helparacat}_0(x, y) = \text{helicóide}_{1,1}(x - \pi/2, \sinh y),$$

$$\text{helparacat}_{\pi/2}(x, y) = \text{catenóide}_1(x, y).$$

É ainda fácil verificar que a primeira forma fundamental de  $\text{helparacat}_t$  é dada por

$$E_t(x, y) = G_t(x, y) = \cosh^2 y, F_t(x, y) = 0,$$

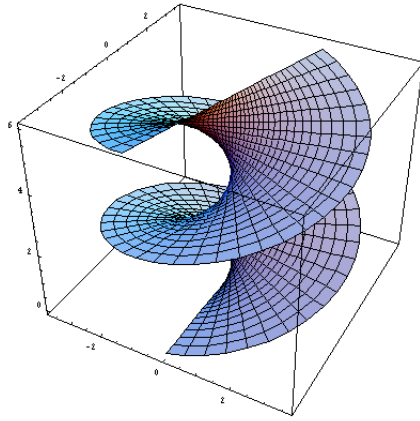
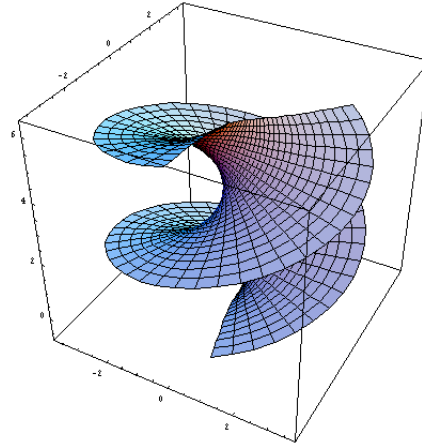
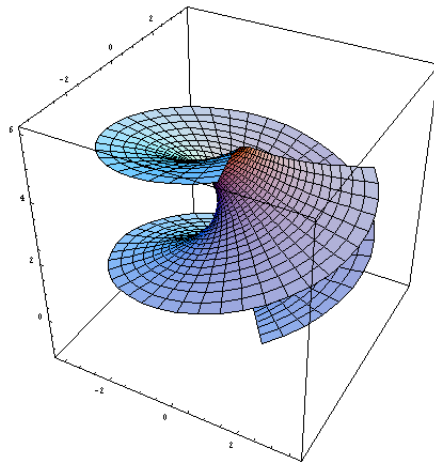
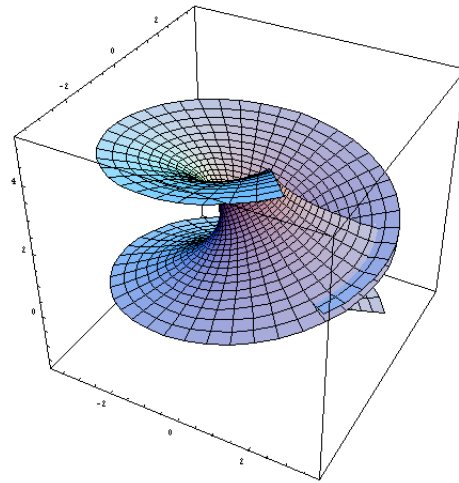
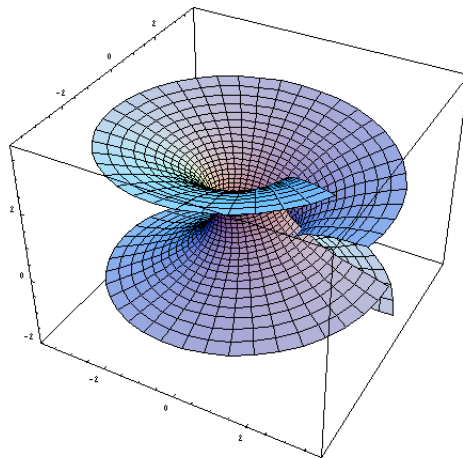
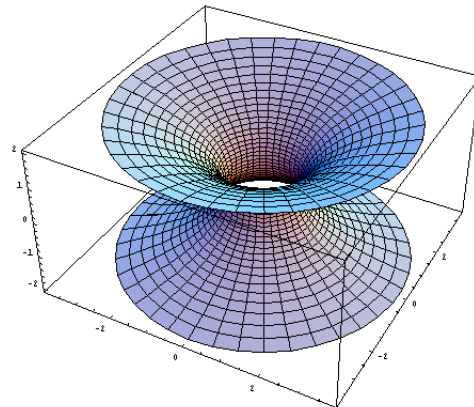
sendo pois uma função (de  $t$ ) constante. Isto mostra que a sequência de superfícies  $\text{helparacat}_t$ ,  $0 \leq t \leq \pi/2$ , é uma deformação do helicóide para o catenóide tal que  $\text{helparacat}_0$  é uma reparametrização de um helicóide,  $\text{helparacat}_{\pi/2}$  é um catenóide e cada  $\text{helparacat}_t$  é uma superfície isométrica a  $\text{helparacat}_0$ . Assim, em particular, o helicóide é isométrico ao catenóide.

Por outro lado, como a segunda forma fundamental, que é dada por

$$e_t(x, y) = -g_t(x, y) = \sin t, f_t(x, y) = \cos t,$$

não é função constante de  $t$ , a imersão de  $\text{helparacat}_t$  em  $\mathbb{R}^3$  depende de  $t$ .

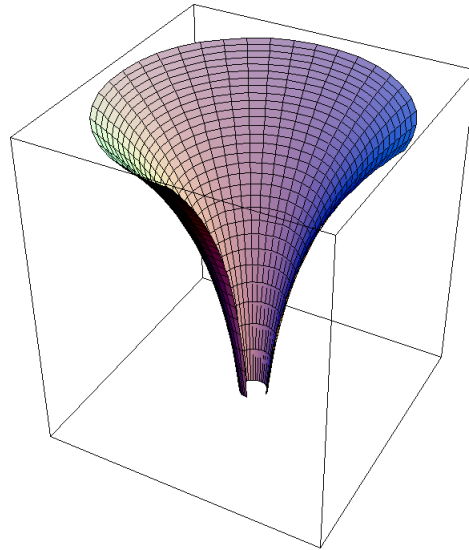
As figuras seguintes mostram sucessivos passos da deformação  $t \rightarrow \text{helparacat}_t$ .

*helicóide**heliparacat $_{\pi/10}$* *heliparacat $_{\pi/5}$* *heliparacat $_{3\pi/10}$* *heliparacat $_{2\pi/5}$* *catenóide*

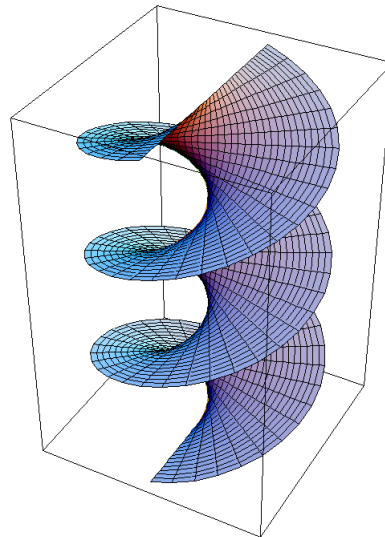
(4) O Teorema de Gauss estabelece que cada isometria preserva sempre a curvatura de Gauss. Existem, contudo, difeomorfismos que preservam a curvatura de Gauss mas não



são isometrias. Um exemplo clássico de um tal morfismo é a aplicação  $\Phi$ , definida por  $\Phi(ay \cos x, ay \sin x, b \log y) = (ay \cos x, ay \sin x, bx)$ , da superfície de um funil



parametrizada por  $(x, y) \rightarrow (ay \cos x, ay \sin x, b \log y)$ , para o helicóide



parametrizado por  $(x, y) \rightarrow (ay \cos x, ay \sin x, bx)$ .

Calculando a curvatura de Gauss de ambas as superfícies chegamos ao mesmo resultado

$$K(x, y) = \frac{-b^2}{b^2 + a^2 y^2}.$$

Portanto,  $\Phi$  é um difeomorfismo que preserva a curvatura de Gauss. Contudo,  $\Phi$  não é uma isometria, porque, no caso do funil,

$$E(x, y) = a^2 y^2, F(x, y) = 0, G(x, y) = a^2 + \frac{b^2}{y^2}$$

e, no caso do helicóide,

$$E(x, y) = b^2 + a^2 y^2, F(x, y) = 0, G(x, y) = a^2.$$

Isto mostra que o recíproco do Teorema de Gauss não é válido.

(5) Como observámos no Exemplo 6.4(6), qualquer rotação em torno do eixo  $OZ$  da sela de macaco preserva a curvatura de Gauss. Pode ser verificado que somente as rotações de um ângulo múltiplo de  $2\pi/3$  são isometrias. Este exemplo também mostra que o recíproco do Teorema de Gauss é falso.

### Exercícios

- 7.1 Seja  $\gamma(t) = (\varphi(t), 0, \psi(t))$ ,  $t \in I$ , uma curva regular. Suponhamos que  $\varphi(t) > 0$  para qualquer  $t \in I$ . Determine os símbolos de Christoffel da superfície de revolução gerada pela curva  $\gamma$ .
- 7.2 Mostre que a isometria  $g$  do Exemplo 7.2 transforma pontos planares em pontos parabólicos.
- 7.3 Mostre, usando o Teorema Egregium de Gauss, que as seguintes superfícies regulares não são localmente isométricas duas a duas:
  - (a) O plano.
  - (b) A esfera.
  - (c) A superfície  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2 - y^2\}$ .

