Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra **Geometria Diferencial**

Duração: 45m **Teste 2** 12/04/07

Soluções

---

1. Sejam a, b, c três números reais não nulos. Considere a curva $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ definida por $\gamma(t) = (3at, 3bt^2, ct^3)$. Mostre que a equação do plano osculador, no ponto $\gamma(1)$, é igual a

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

Solução. Uma vez que $\gamma'(t) = (3a, 6bt, 3ct^2)$, a curva γ não está parametrizada por comprimento de arco pois $||\gamma'(t)|| = \sqrt{9a^2 + 36b^2t^2 + 9c^2t^4}$ não é igual a 1 para qualquer $t \in \mathbb{R}$. O plano osculador em $\gamma(1)$ é o plano $\mathcal{P}$ que passa pelo ponto $\gamma(1)$ e é ortogonal ao vector binormal $B(1)$. Como $B(1) = T(1) \wedge N(1)$, este vector é paralelo ao produto vectorial $\gamma'(1) \wedge \gamma''(1)$. Portanto

$$\mathcal{P} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \big((x, y, z) - \gamma(1) \mid \gamma'(1) \wedge \gamma''(1)\big) = 0\right\}.$$

Calculemo-lo:

$$\gamma'(1) \wedge \gamma''(1) = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 3a & 6b & 3c \\ 0 & 6b & 6c \end{vmatrix} = (18bc, -18ac, 18ab),$$

donde

$$\begin{aligned}
\mathcal{P} &= \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid ((x, y, z) - (3a, 3b, c) \mid (18bc, -18ac, 18ab)) = 0\right\} \\
&= \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid ((x - 3a, y - 3b, z - c) \mid (18bc, -18ac, 18ab)) = 0\right\} \\
&= \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 18(bcx - 3abc - acy + 3abc + abz - abc) = 0\right\} \\
&= \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x}{a} - \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1\right\}
\end{aligned}$$

pois $abc \neq 0$.

2. Seja $\beta : I \to \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada por comprimento de arco, tal que $\kappa_\beta > 0$ e seja $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ definida por $\alpha(t) = \beta'(t)$. Mostre que:

   (a) $\alpha''(t) = -\kappa_\beta(t)^2\, T_\beta(t) + \kappa'_\beta(t)\, N_\beta(t) + \kappa_\beta(t)\, \tau_\beta(t)\, B_\beta(t)$.

   (b) $\kappa_\alpha(t) = \sqrt{\left(\frac{\tau_\beta(t)}{\kappa_\beta(t)}\right)^2 + 1}$.

   (c) Se β é uma hélice generalizada então κ_α é constante.

Solução.

(a) Como $\alpha(t) = \beta'(t)$ e β está parametrizada por comprimento de arco, então $\alpha(t) = T_\beta(t)$. Consequentemente, $\alpha'(t) = \kappa_\beta(t)\, N_\beta(t)$ e

$$\begin{aligned}
\alpha''(t) &= \kappa'_\beta(t)\, N_\beta(t) + \kappa_\beta(t)\, (-\kappa_\beta(t)\, T_\beta(t) + \tau_\beta(t)\, B_\beta(t)) \\
&= -\kappa_\beta(t)^2\, T_\beta(t) + \kappa'_\beta(t)\, N_\beta(t) + \kappa_\beta(t)\, \tau_\beta(t)\, B_\beta(t).
\end{aligned}$$

(b) Uma vez que α não está parametrizada por comprimento de arco,

$$\kappa_\alpha(t) = \frac{\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3}.$$

Da alínea anterior segue

$$\begin{aligned} \alpha'(t) \wedge \alpha''(t) &= -\kappa_\beta(t)^3\,(N_\beta(t) \wedge T_\beta(t)) + 0 + \kappa_\beta(t)^2\,\tau_\beta(t)(N_\beta(t) \wedge B_\beta(t)) \\ &= \kappa_\beta(t)^2\,\tau_\beta(t)\,T_\beta(t) + \kappa_\beta(t)^3\,B_\beta(t). \end{aligned}$$

Portanto, $\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\| = \sqrt{\kappa_\beta(t)^4\,\tau_\beta(t)^2 + \kappa_\beta(t)^6}$ e $\|\alpha'(t)\| = \kappa_\beta(t)$. Em conclusão,

$$\kappa_\alpha(t) = \sqrt{\frac{\kappa_\beta(t)^4\,\tau_\beta(t)^2 + \kappa_\beta(t)^6}{\kappa_\beta(t)^6}} = \sqrt{\Big(\frac{\tau_\beta(t)}{\kappa_\beta(t)}\Big)^2 + 1}.$$

(c) É óbvio: se β é uma hélice generalizada então o quociente $\frac{\tau_\beta(t)}{\kappa_\beta(t)}$ é constante o que implica, pela alínea anterior, que κ_α seja constante.
