A ÁLGEBRA DAS TRANÇAS

DOMINGOS LOPES E JORGE PICADO*

Resumo. Neste artigo apresentamos de forma elementar e auto-contida a demonstração, devida a Jay Goldman e Louis Kauffman [5], da elegante relação, descoberta por John H. Conway, entre as tranças racionais e as fracções continuadas (*Teorema de Conway das tranças racionais*). Pelo caminho aproveitamos para introduzir o leitor nos conceitos básicos da teoria dos nós e, em particular, das tranças. Por fim, ilustramos o Teorema de Conway com a ajuda de um jogo.

1. Introdução

≪Um nó!≫ disse Alice, sempre pronta a ajudar, e olhando ansiosamente.
≪Oh, deixem-me ajudar a desatá-lo!≫
— em **As Aventuras de Alice no País das Maravilhas**, de Lewis Carroll

Reza a lenda[1] que Alexandre Magno, um homem mais de acção do que paciência, desfez o célebre "nó górdio"a golpes de espada. Hoje em dia, os matemáticos preocupam-se também com o problema de desatar nós, embora as suas motivações e técnicas sejam bastante diferentes das de Alexandre.

Convirá começarmos por referir que, para os matemáticos, um nó, não é bem o mesmo que um nó usual. Considere um pedaço de fio (idealmente sem espessura, sendo a sua secção um ponto). Dê um nó nele — ou vários, se quiser. Agora, cole as duas pontas do fio, de modo a formar um laço com um nó, sem extremidades. É isto um *nó*, no sentido matemático: uma *curva fechada simples* em $\mathbb{R}^3$ (ou seja, sem pontos múltiplos, isto é, a curva não pode tornar a passar segunda vez por nenhum ponto). A curva pode ter cruzamentos: passa por baixo ou por cima dela própria.

O nó mais simples de todos é o *nó trivial* (Figura 1), consistindo num simples círculo de fio, sem nenhum nó nele. Corresponde, na linguagem corrente, a ter um fio desatado, sem qualquer nó. O nó seguinte mais simples é o chamado nó *trifólio* ou *trevo* (Figura 1), no qual se dá um nó cego no fio antes de coladas as pontas. Com nós cada vez mais complicados, podemos gerar uma infinidade de diferentes nós.

Um outro exemplo: o nó de cadeira (Figura 2), muito utilizado pelos velejadores, para fazer um laço ou olho de qualquer tamanho que não escorregue, corresponde, coladas as pontas, ao nó que os matemáticos designam por *nó* 6_3 (Figuras 3 e 6). O nó de oito (Figura 1), obtido fazendo um oito no fio, é também muito utilizado pelos velejadores, como nó de travagem.

*Trabalho realizado no âmbito do programa *Novos Talentos em Matemática* da Fundação Calouste Gulbenkian.

[1] *A Lenda do Nó Górdio*: Quem conseguisse desatar o nó (um pedaço comprido de corda forte, apertadamente amarrada em volta de um eixo de um carro de bois) estava destinado a reinar a Ásia (naquele tempo, o império Persa).

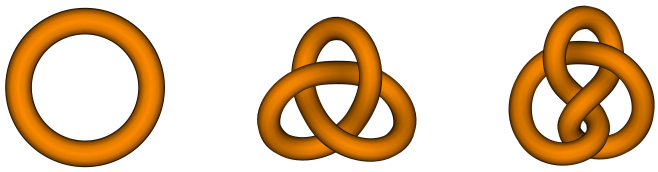


FIGURA 1. Os nós mais simples: nó trivial, trifólio e nó de oito.

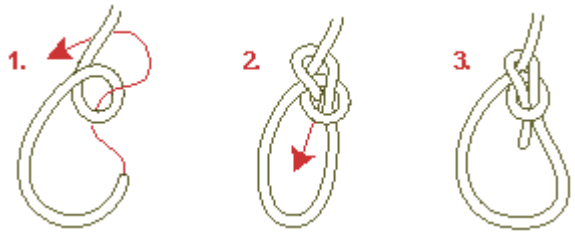


FIGURA 2. O nó de cadeira (*Bowline*), muito fácil de fixar: "*o coelho sai da sua toca (1), dá uma volta à árvore (2) e volta para a toca (3)*".

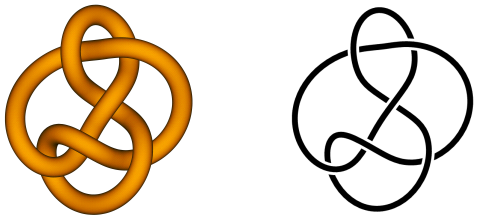


FIGURA 3. O nó 6_3.

É útil modelar os nós com corda ou fio e, como é muito difícil desenhar figuras a 3 dimensões, representá-los por diagramas mostrando as suas projecções num plano, como exemplifica a Figura 3. Tal diagrama pode ser traçado marcando o caminho da corda que se deixou cair no chão; os pontos onde a curva está partida chamam-se *cruzamentos*. É claro que as projecções de um mesmo nó em planos diferentes podem parecer muito diferentes. Portanto, o número de cruzamentos depende do modo como se deixa cair a corda e pode ser um número muito grande — mas cada nó tem um diagrama com um número mínimo de cruzamentos, chamado *número de cruzamento* do nó. Os matemáticos construíram tabelas de nós dispostos de acordo com este número, como a da Figura 4. (Nenhum nó pode ter menos de três cruzamentos com excepção do trivial, que não tem nenhum.)

A primeira vez que os nós foram compilados numa tabela deste género[2] foi no final do século XIX, pelo físico Peter Guthrie Tait[3], como parte de um esforço sistemático para classificar os nós. Até hoje só se conseguiu tabelar todos os nós até 16 cruzamentos: em 1998 duas equipas de matemáticos conseguiram determinar todos os nós com 16 ou menos cruzamentos [10]; são

[2]Na página do Projecto Atractor (`www.atractor.pt/nos`) pode ver uma tabela dos nós até 9 cruzamentos, construídos como objectos tridimensionais.

[3]P. Tait, On knots I, II, III, *Scientific Papers*, Vol. I, Cambridge University Press, 1898, pp. 273-437.

FIGURA 4. Lista de nós com número de cruzamento inferior a 10. A notação n_m de Tait indica o m-ésimo nó com número de cruzamento n.

exactamente 1 701 936 nós, o que dá uma ideia da complexidade da questão. O grande problema subjacente à elaboração destas tabelas é garantir que os nós apresentados são todos distintos. Por exemplo, durante muitos anos pensou-se que os nós tabelados como 10_{161} e 10_{162} (Figura 5) eram distintos, o que só veio a ser refutado por Perko, em 1974.[4]

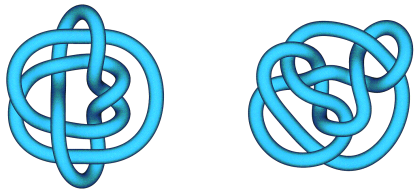


FIGURA 5. O par de Perko.

2. NÓS

> (...) uma confusa história de nós que se dão no céu
> e que por mais voltas que se lhes dê não há maneira,
> nenhuma maneira, de os desatar aqui na terra.
>
> — em **Aqueles tempos com Gabo**,
> de PLINIO APULEYO MENDOZA

[4]K. Perko, On the classification of knots, *Proc. Amer. Math. Soc.* 45 (1974) 262-266.

Manipulando um nó sem batota (ao contrário de Alexandre Magno), isto é, sem cortar o fio, mas sim usando deformações contínuas (em rigor, transformações contínuas da curva fechada associada ao nó), é claro que a sua projecção num plano pode tomar diversas formas; diremos que são todas formas (*isotopicamente*) *equivalentes* do mesmo nó. Por exemplo, o nó de cadeira 6_3 pode tomar as formas equivalentes da Figura 6.

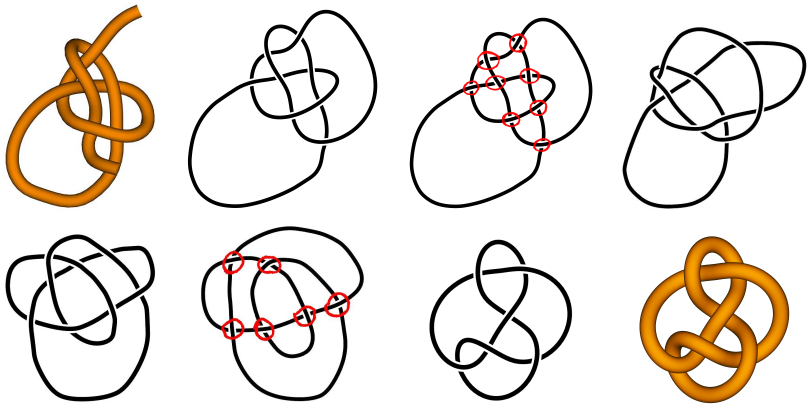


FIGURA 6. O nó de cadeira com vários "disfarces", cada vez mais simples: começa com 8 cruzamentos e termina com 6.

Evidentemente, se for possível manipular um nó de modo a que a sua projecção no plano não tenha pontos de intersecção, o nó será equivalente ao nó trivial. Isso corresponde, na linguagem corrente, a dizer que o nó se desata. Portanto, saber se um nó se desata ou não, equivale a saber se o nó é equivalente ao nó trivial ou não. Por exemplo, o *monstro de Kauffman* [13], na Figura 7, é um nó que se desata (v. Figura 8).

FIGURA 7. O "monstro"de Kauffman.

Como já observámos, se dermos um nó cego numa corda, como mostra a Figura 9.1, e juntarmos as pontas, obtemos um trifólio (Figura 1). Imagine agora que passamos a ponta A pelo laço, por baixo (Figura 9.2). É claro que o nó se dissolve. Suponha agora que a ponta passa pelo laço duas vezes como mostra a Figura 9.3. Será que o nó se dissolve se puxarmos agora as pontas? Muitos dirão que se formará um novo nó, mas não é verdade: o nó dissolve-se.

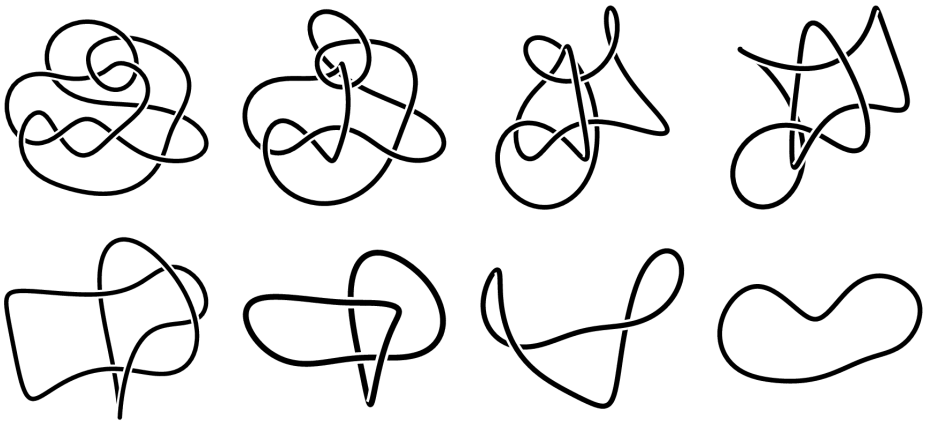


FIGURA 8. Simplificação do monstro de Kauffman.

A ponta terá que passar três vezes pelo laço para que não se dissolva. Se tentar fazer isso, verá que obtém um trifólio (Figura 9.4) diferente do original: é a sua imagem no espelho (este chama-se *trifólio direito* enquanto o primeiro se chama *trifólio esquerdo*). O trifólio é o nó mais simples que não é equivalente à sua imagem no espelho (a um nó equivalente à sua imagem no espelho chama-se *reflexível* ou *anfiquiral* [14]).

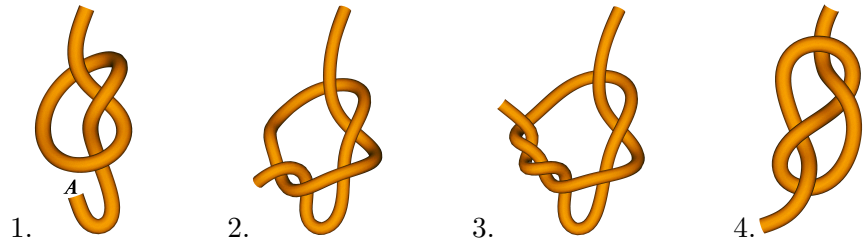


FIGURA 9. O trifólio e a sua imagem ao espelho.

O nó anfiquiral mais simples, diferente do trivial, é o nó de oito (Figura 10): movendo, na Figura 10.1, o arco que está à direita completamente para a esquerda (Figura 10.2), basta depois rearranjar os arcos, para obtermos a imagem no espelho do nó de oito (Figura 10.3).

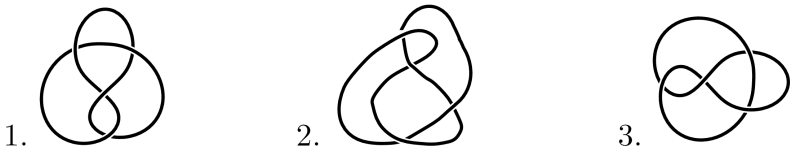


FIGURA 10. O nó de oito é auto-dual.

Note que na tabela da Figura 4 não aparece a imagem no espelho dos nós que não são anfiquirais. Portanto, nessa lista, quando um nó não é anfiquiral, representa dois nós distintos: ele próprio e a sua imagem. Isto quer dizer que o número de nós distintos até 16 cruzamentos é na realidade maior do que 1 701 936, sendo precisamente igual a 1 701 936 mais o número dos que não são anfiquirais (este número também está calculado em [10]).

O estudo dos nós (a chamada *teoria dos nós*) é hoje um dos ramos mais excitantes e activos da topologia (cf. por exemplo, [1], [2] e [6]), que lida com álgebra, geometria, teoria dos grupos e teoria dos números entre outras áreas da matemática. Um dos problemas mais importantes da teoria dos nós é o de decidir quando um nó é equivalente a outro — em particular, quando é que um dado nó é equivalente ao trivial. Parece um problema, à primeira vista, simples. No entanto, não o é: existem infinitas maneiras de deformar um nó, e aparentemente terão todas que ser verificadas antes de decidirmos se dois nós são de facto diferentes ou não. Isto torna a teoria dos nós complicada. Por exemplo, mágicos e ilusionistas mostram-nos muitas vezes o que parece ser uma corda com um nó, mas depois puxam pelas suas extremidades e o nó simplesmente desfaz-se! A corda não estava realmente atada, mas simplesmente entrançada.

Um dos primeiros resultados fundamentais da teoria dos nós deve-se ao matemático alemão Kurt Reidemeister que, em 1926, provou que todas as diferentes deformações de um nó podem ser atingidas simplesmente com uma sequência de três movimentos básicos (Figura 11). Com estes movimentos podemos remover, inserir ou mudar cruzamentos de três modos diferentes:

(1) Remover (ou inserir) uma pequena volta (*loop*).
(2) Remover (ou inserir) cruzamentos gémeos.
(3) Passar um terceiro pedaço por cima de um cruzamento.

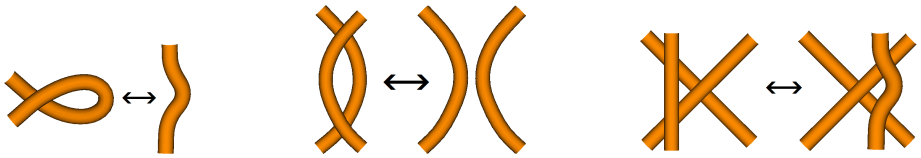


FIGURA 11. Os três tipos de movimentos de Reidemeister.

Portanto, qualquer deformação de um nó pode ser alcançada por uma sequência finita destes três tipos de movimento. Reduzimos assim um processo complicado a uma sequência de passos simples. Isto torna o problema topológico de classificação dos nós num problema de índole combinatória. No entanto, não resolve automaticamente o problema de saber se um determinado nó se deforma noutro, uma vez que não existem regras que especifiquem a ordem segundo a qual os movimentos se deverão aplicar.

Por exemplo, poder-se-ia pensar que se um nó se pode deformar até ao nó trivial, a deformação pode ser feita sem nunca aumentar o número de cruzamentos, o que não é verdade: para alguns nós, como o da Figura 12, o número de cruzamentos terá que subir antes de chegar a zero.

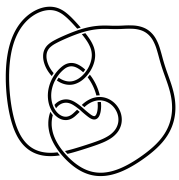


FIGURA 12. Um nó trivial que só pode ser desatado começando por aumentar o seu número de cruzamentos.

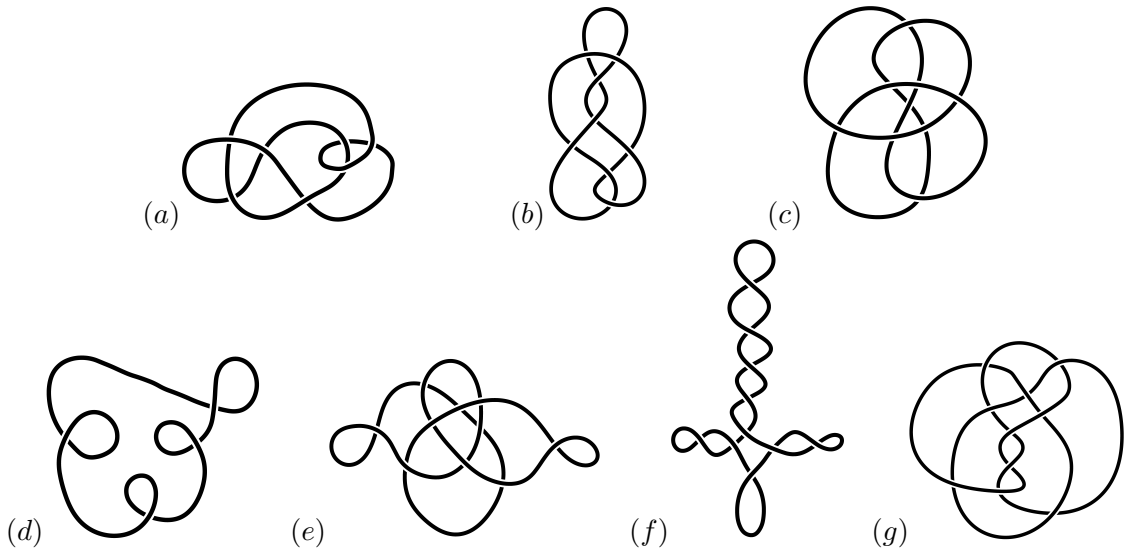


FIGURA 13. Alguns nós.

Convidamos agora o leitor a desatar os nós (a)-(g) da Figura 13.

Esperamos que tenha tido sucesso com os nós (a)-(f), o que provará que todos eles são equivalentes ao nó trivial. No entanto, a sua incapacidade para desatar o nó (g), deverá ser meramente um indicador de que provavelmente este nó não pode ser desatado, não chegando para provar que o nó não pode ser desatado. Como poderemos provar que um dado nó não pode ser desatado? Ou, mais geralmente, que dois determinados nós não são equivalentes?

Para provar que um determinado processo ou construção é impossível de ser concretizado, os matemáticos usam frequentemente a ideia de *invariante*. A cada estado do objecto em consideração (neste caso, a cada diagrama de um nó) associam um número (ou expressão algébrica, como o polinómio $x^4 - x + 1$, ou mesmo algum bicho mais esquisito da fauna matemática) que se mantém inalterável ao longo do processo (neste caso, por equivalência de diagramas). Tal número chama-se *invariante*. É claro que convirá conhecerem um método simples de extrair este invariante de cada nó. Então o invariante é calculado para o estado inicial e para o estado desejado do objecto. Se derem resultados diferentes, significa que não será possível passar de um estado para o outro, e teremos a certeza que os dois nós não são o mesmo.

Contudo, se esses números forem iguais o problema continuará por resolver: se dois nós tiverem o mesmo invariante isso não significa que sejam equivalentes. Isso só acontecerá se tivermos a certeza que o invariante é aquilo que os matemáticos designam por *invariante completo*. No entanto, o problema de encontrar tal invariante é muito difícil. Com efeito, até hoje, infelizmente, ninguém conseguiu descobrir nenhum invariante completo para os nós. Conhecem-se simplesmente alguns tipos de invariantes: o número de cruzamento, acima referido, o *número de desenlace*, o *número de coloração* e o *número de ponte* (veja as definições em [1] ou [15]), todos eles muito simples de definir mas computacionalmente incalculáveis, pelo que pouco úteis na

prática [5], os *polinómios de Alexander*, *Conway*, *Jones* ou *HOMFLY* [6] [1] e, mais recentemente, a família de *invariantes de Vassiliev* [14]. Para todos eles, com excepção do último, existem (infinitos) pares de nós equivalentes que o invariante não distingue. Quanto ao último, trata-se de uma sequência $V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_n \subset \cdots$ de conjuntos V_n ($n \in \mathbb{N}$) de invariantes, pelo menos tão forte quanto os invariantes polinomiais (e de onde todos eles podem ser deduzidos), que alguns acreditam que possa mesmo classificar todos os nós [14] (veja também [11]):

> Conjectura [1990]: *Para cada par de nós não equivalentes K_1 e K_2 existe um natural n e um invariante $v \in V_n$ tal que $v(K_1) \neq v(K_2)$.*

No entanto, até ao momento, ninguém foi capaz de provar ou refutar esta conjectura!

3. Tranças Racionais

Muitos matemáticos têm tentado contribuir para a resolução do problema da classificação dos nós. Um deles, John Conway, propôs que se isolasse, com uma bola, parte do nó a estudar, de modo a que o nó intersectasse a superfície da bola em exactamente quatro pontos e que dentro da bola não ficasse nenhuma volta completa (*loop*). Se fixarmos a posição desses quatro pontos, a parte do nó que fica dentro da bola é aquilo que se chama uma *trança*. Pensa-se sempre nesses quatro pontos fixos como ocorrendo nos quatro pontos cardeais NO (Noroeste), NE (Nordeste), SO (Sudoeste) e SE (Sudeste).

Assim, para os matemáticos, tal como para o senso comum, uma trança é formada por um conjunto finito de fios entrelaçados (com uma origem e uma extremidade). Um nó, na vizinhança de um cruzamento, é localmente equivalente a uma trança e podemos considerar as tranças como os blocos básicos de construção dos nós. Portanto, compreender as tranças será muito útil no estudo dos nós ([6], [7], [8]). Duas tranças dizem-se *equivalentes* se conseguirmos passar de uma até outra por uma sequência finita de movimentos de Reidemeister enquanto as quatro extremidades da trança se mantêm fixas e os fios da trança nunca passam para fora da bola que define a trança. É evidente que se formarmos um nó a partir de uma trança colando as extremidades aos pares, então dois nós desses são equivalentes quando as tranças correspondentes são equivalentes.

As tranças são muito fáceis de desenhar. A *trança inicial horizontal* (ou *trança zero*, porque o declive é nulo) tem dois fios horizontais paralelos e a *trança inicial vertical* (ou *trança infinita*) tem dois fios verticais paralelos (Figura 14). Denotaremos a primeira por t_0 e a segunda por t_0'.

As tranças *inteiras horizontais* (resp. *verticais*) são formadas a partir da trança inicial horizontal (resp. vertical) através de um número finito de trocas iguais de duas pontas adjacentes. A trança t_1 será um fio de declive 1, com um de declive -1 passando por trás, e a trança t_{-1} será o contrário (Figura 15).

Mais geralmente, para cada $n \in \mathbb{N}$, a *trança* t_n é a trança horizontal constituída por n cruzamentos nos quais o fio que passa por cima tem declive 1 (o primeiro exemplo na Figura 16

[5] Sob o ponto de vista teórico são computáveis, uma vez que o problema de classificação dos nós é algoritmicamente decidível de acordo com S. Matveev [*Algorithmic Topology of 3-manifolds*, Springer-Verlag, 2004]. Contudo, não se conhecem algoritmos eficientes.

[6] Um acrónimo dos apelidos dos seis matemáticos que o descobriram simultaneamente, em 1985: Jim **H**oste, Adrian **O**cneanu, Kenneth **M**illet, Peter **F**reyd, Raymond **L**ickorish e David **Y**etter [4] (cf. `pzacad.pitzer.edu/~jhoste/homfly.html`).

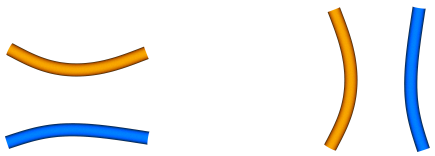


FIGURA 14. Trança inicial horizontal t_0 e trança inicial vertical t'_0.

FIGURA 15. Tranças t_1 e t_{-1}.

mostra a trança t_3), enquanto a *trança* t_{-n} será a trança horizontal formada por n cruzamentos opostos aos acima mencionados (em cada cruzamento, o fio que passa por cima tem declive -1). A *trança* t'_n será a trança vertical formada por n cruzamentos do tipo t_1, nos quais o fio que passa por cima tem declive 1 enquanto a *trança* t'_{-n} será a trança vertical formada por n cruzamentos do tipo t_{-1}, nos quais o fio que passa por cima tem declive -1. A Figura 16 mostra a trança t'_{-3}.

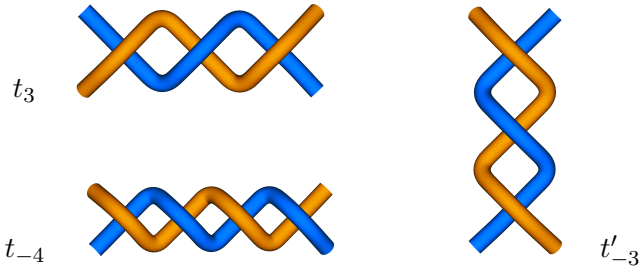


FIGURA 16. Tranças t_3, t_{-4} e t'_{-3}.

Denotando por $T \sim S$ a relação de equivalência entre duas tranças T e S, é evidente que, por exemplo, $t_1 \sim t'_1$ e $t_{-1} \sim t'_{-1}$.

Definição 3.1. [SOMA HORIZONTAL E SOMA VERTICAL] Denotaremos por $+$ (*soma horizontal*) e $\oplus$ (*soma vertical*) as operações nas tranças definidas do modo que as Figuras 17 e 18 indicam.

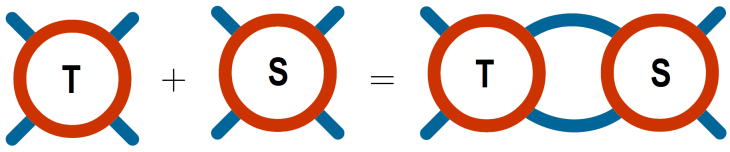


FIGURA 17. Soma horizontal $T + S$ de duas tranças T e S.

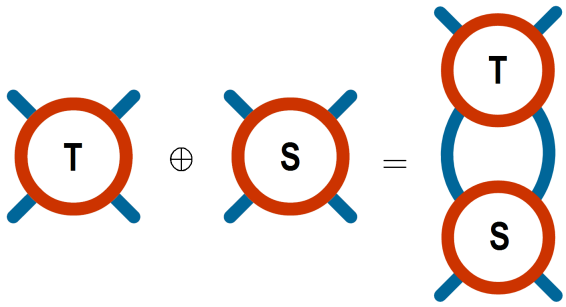


FIGURA 18. Soma vertical $T \oplus S$ de duas tranças T e S.

Observações 3.2. (a) É óbvio que, para quaisquer inteiros a e b, $t_a + t_b \sim t_{a+b}$ e $t'_a \oplus t'_b \sim t'_{a+b}$ (através do 2^o movimento de Reidemeister, caso a e b tenham sinais diferentes).
(b) Note que $t_0 \oplus t'_n \sim t_0 \sim t'_n \oplus t_0$, aplicando o 1^o movimento de Reidemeister n vezes. Acontece o mesmo para a soma horizontal de t'_0 com uma trança inteira horizontal arbitrária.

As tranças formadas, com estas duas operações, a partir das tranças inteiras, chamam-se *tranças racionais*:

Definição 3.3. [TRANÇAS RACIONAIS]

(1) Seja $a \in \mathbb{Z}$. Qualquer trança inteira t_a ou t'_a é uma trança racional.
(2) Se T é uma trança racional então, para qualquer inteiro $a \in \mathbb{Z}$, $T + t_a$ e $t_a + T$ são tranças racionais.
(3) Se T é uma trança racional então, para qualquer inteiro $a \in \mathbb{Z}$, $T \oplus t'_a$ e $t'_a \oplus T$ são tranças racionais.

Uma trança é *racional* se puder ser construída a partir da regra (1), aplicando as outras duas regras um número finito de vezes. Se este número for igual a $n-1$, diremos que é uma *trança racional com n tranças inteiras*.

Observações 3.4. (a) Note que o número de tranças inteiras que formam uma trança racional não é único porque, por exemplo, $t_5 \sim t_2 + t_3$, sendo que a primeira é formada por uma trança inteira e a segunda é formada por duas.
(b) Diz-se que uma trança pode ser *desentrelaçada* se puder ser deformada em dois segmentos de recta, restringindo o movimento das quatro extremidades da trança à superfície da sua bola e o resto da trança ao interior da bola. *As tranças racionais são precisamente as tranças que podem ser desentrelaçadas.* De facto:

(1) É evidente que as tranças que podem ser desentrelaçadas são precisamente as tranças que se podem construir a partir de t_0 ou de t'_0, escolhendo sucessivamente duas das suas extremidades e entrelaçando-as entre si.
(2) Uma vez que o entrelaçamento de duas extremidades diagonalmente opostas pode ser realizado por entrelaçamento de extremidades adjacentes, como mostra a Figura 19, podemos restringir-nos em (1) a pares de extremidades adjacentes.
(3) É óbvio que as tranças que se podem construir a partir de t_0 ou de t'_0, escolhendo sucessivamente duas das suas extremidades adjacentes e entrelaçando-as entre si, são

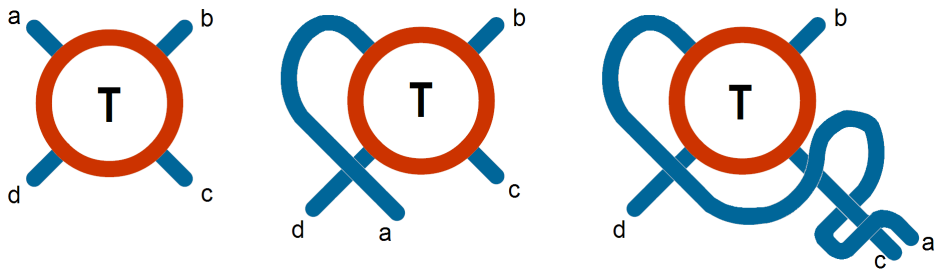


FIGURA 19. Entrelaçamento de extremidades diagonalmente opostas.

precisamente as tranças racionais: entrelaçar numa trança T as duas extremidades Sul (resp. Norte) equivale a fazer $T \oplus t'_a$ (resp. $t'_a \oplus T$); entrelaçar numa trança T as duas extremidades Este (resp. Oeste) equivale a fazer $T + t_a$ (resp. $t_a + T$).

Definimos agora um tipo especial de tranças racionais, chamadas *tranças básicas*.

Definição 3.5. [TRANÇAS BÁSICAS] (1) Uma trança racional diz-se *básica horizontal* se for construída do seguinte modo: começando com uma trança horizontal t_{a_1}, adiciona-se em baixo (soma vertical) uma trança vertical t'_{a_2}, depois adiciona-se à direita (soma horizontal) uma trança horizontal t_{a_3}, depois uma trança vertical t'_{a_4} em baixo, e assim sucessivamente, num número finito de passos. Portanto, uma trança racional é básica horizontal se for da forma

$$((\cdots((((t_{a_1} \oplus t'_{a_2}) + t_{a_3}) \oplus t'_{a_4}) + t_{a_5}) \oplus \cdots) + t_{a_{2n-1}}) \oplus t'_{a_{2n}} \tag{3.5.1}$$

ou

$$((\cdots((((t_{a_1} \oplus t'_{a_2}) + t_{a_3}) \oplus t'_{a_4}) + t_{a_5}) \oplus \cdots) \oplus t'_{a_{2n}}) + t_{a_{2n+1}} \tag{3.5.2}$$

para alguma família de inteiros $a_1, a_2, a_3, \ldots$

(2) Uma trança racional diz-se *básica vertical* se for construída do seguinte modo: começando com uma trança vertical t'_{a_1}, adiciona-se à esquerda (soma horizontal) uma trança horizontal t_{a_2}, depois adiciona-se em baixo (soma vertical) uma trança vertical t'_{a_3}, depois uma trança horizontal t_{a_4} à esquerda, e assim sucessivamente, num número finito de passos. Portanto, será da forma

$$t_{a_{2n}} + ((\cdots + ((t_{a_4} + ((t_{a_2} + t'_{a_1}) \oplus t'_{a_3})) \oplus t'_{a_5}) \oplus \cdots) \oplus t'_{a_{2n-1}}) \tag{3.5.3}$$

ou

$$(t_{a_{2n}} + (\cdots + ((t_{a_4} + ((t_{a_2} + t'_{a_1}) \oplus t'_{a_3})) \oplus t'_{a_5}) \oplus \cdots)) \oplus t_{a_{2n+1}} \tag{3.5.4}$$

para alguma família de inteiros $a_1, a_2, a_3, \ldots$

Por exemplo, a construção $t_{-2} \to t_{-2} \oplus t'_3 \to (t_{-2} \oplus t'_3) + t_2$ dá origem a uma trança básica horizontal e a construção $t'_{-3} \to t_2 + t'_{-3} \to (t_2 + t'_{-3}) \oplus t'_{-2}$ define uma trança básica vertical.

O lema seguinte vai permitir-nos mostrar que toda a trança racional se pode reduzir, por equivalência, a uma trança básica:

Lema 3.6. [ROTAÇÃO DE 180° EM TORNO DO EIXO VERTICAL OU HORIZONTAL] *Se rodarmos uma trança racional* 180° *em torno do eixo vertical (v. Figura 21) ou horizontal obtemos uma trança equivalente à original.*

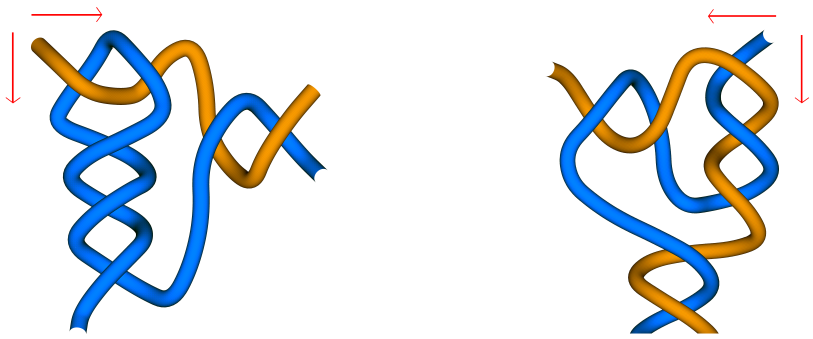


FIGURA 20. Trança básica horizontal $(t_{-2} \oplus t'_3) + t_2$ e trança básica vertical $(t_2 + t'_{-3}) \oplus t'_{-2}$.

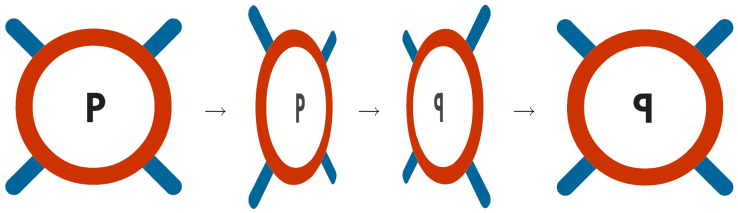


FIGURA 21. Rotação de 180° em torno do eixo vertical.

Demonstração: Faremos a demonstração por indução sobre o número de tranças inteiras que constituem a trança racional.

Para o caso $n = 1$, quer tenhamos uma trança inteira vertical ou horizontal, qualquer rotação horizontal ou vertical deixa a trança igual, como é evidente.

Assumamos então, por hipótese de indução, que o resultado é verdadeiro para qualquer trança racional com k $(k \leq n)$ tranças inteiras e seja T uma trança racional formada por $n+1$ tranças inteiras. Pela definição de trança racional, T é igual a uma das tranças $t_a + S$, $S + t_a$, $t'_a \oplus S$ ou $S \oplus t'_a$ para algum inteiro a e alguma trança racional S com n tranças inteiras.

No caso $T = t_a + S$, aplicando uma rotação em torno do eixo horizontal, t_a continua inalterada e S transforma-se numa trança $\overline{S}$, equivalente a S por hipótese de indução, logo $t_a + S \sim t_a + \overline{S}$ (como a equivalência de tranças mantém as extremidades das tranças fixas, a equivalência de S para $\overline{S}$ induz uma equivalência de $t_a + S$ para $t_a + \overline{S}$), daí que a rotação horizontal de T seja equivalente a T. No mesmo caso, aplicando uma rotação vertical a $T = t_a + S$, obtemos $S' + t_a$, onde S' é a rotação vertical de S. Pela hipótese de indução, S' é equivalente a S, donde $S' + t_a \sim S + t_a$. Teremos assim que provar que $S + t_a \sim t_a + S$, o que pode ser feito aplicando a rotações horizontais (no mesmo sentido) a S de forma a desfazer t_a do lado direito de S; à medida que vamos rodando S, irá aparecendo t_a do lado esquerdo de S, obtendo-se no final $t_a + S'$, caso a seja par, ou $t_a + \overline{S}$, caso a seja ímpar. Em qualquer dos casos, pela hipótese de indução, trata-se de uma trança equivalente a $t_a + S$.

Os restantes casos podem ser provados de forma análoga, aplicando rotações horizontais ou verticais conforme as necessidades. □

Em particular, a parte final da demonstração do Lema 3.6 garante-nos que:

Lema 3.7. *Se T for uma trança racional e a um número inteiro, então $t_a + T \sim T + t_a$ e $t'_a \oplus T \sim T \oplus t'_a$.* □

Este resultado não é, em geral, verdadeiro para tranças não racionais, como o exemplo da Figura 22 mostra: as duas tranças não são equivalentes pois não há maneira de passar o nó que está no fio azul para o outro, uma vez que temos que manter as pontas dos fios fixas na deformação.

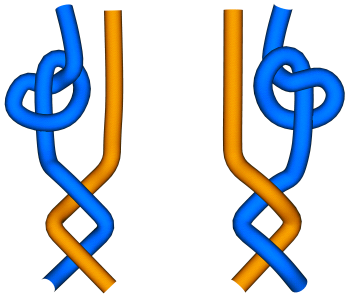


FIGURA 22. Exemplo de rotação de 180° em torno do eixo vertical de uma trança não racional.

Proposição 3.8. *Toda a trança racional é equivalente a uma trança básica.*

Demonstração: Seja T uma trança racional. O caso em que T é constituída somente por uma trança inteira é óbvio. Suponhamos, por hipótese de indução, que o resultado é válido para tranças racionais com $n-1$ tranças inteiras. Se T é uma trança racional com n tranças inteiras então (1) $T = S + t_a$ ou (2) $T = t_a + S$ ou (3) $T = S \oplus t'_a$ ou (4) $T = t'_a \oplus S$, para alguma trança racional S com $n-1$ tranças inteiras e algum inteiro $a \in \mathbb{Z}$. Por hipótese de indução, S é equivalente a uma trança básica R logo (1) $T \sim R + t_a$ ou (2) $T \sim t_a + R$ ou (3) $T \sim R \oplus t'_a$ ou (4) $T \sim t'_a \oplus R$. O Lema 3.7 e a Observação 3.2(a) permitem-nos imediatamente, em qualquer dos casos (1)-(4), transformar a trança no 2^o membro da equivalência numa trança básica horizontal ou vertical. □

(Observe que esta demonstração indutiva pode ser facilmente formalizada num algoritmo efectivo de transformação de qualquer trança racional numa trança básica equivalente.)

4. A fracção de uma trança racional

Agora, com vista a classificar as tranças básicas, introduziremos 3 novas operações:

Definição 4.1. Sendo T uma trança racional, então:

(1) T^* (que denotaremos também por $-T$) é a imagem no espelho de T (onde se trocam todos os cruzamentos).
(2) A "*inversa-p*" de T (*inversa positiva*, no sentido *da rotação* dos ponteiros do relógio), que denotaremos por $1/_{\mathsf{p}}T$ é a trança obtida de T rodando-a 90^o no sentido dos ponteiros do relógio e tomando a sua imagem ao espelho.

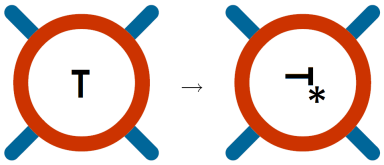


FIGURA 23. Operação $1/_{\mathsf{p}}-$.

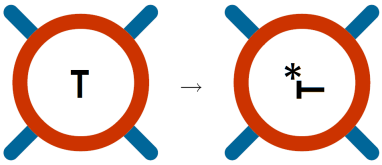


FIGURA 24. Operação $1/_{\mathsf{n}}-$.

(3) A "*inversa-n*" de T (*inversa negativa*, no sentido *contrário ao da rotação* dos ponteiros do relógio), que denotaremos por $1/_{\mathsf{n}}T$ é a trança obtida de T rodando-a 90^o no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio e tomando a sua imagem ao espelho.

Note que as operações $1/_{\mathsf{p}}-$ e $1/_{\mathsf{n}}-$ são inversas uma da outra. A seguinte proposição é uma consequência imediata do Lema 3.6:

Proposição 4.2. *Para qualquer trança racional T, tem-se $1/_{\mathsf{p}}T \sim 1/_{\mathsf{n}}T$.* □

Podemos assim substituir $1/_{\mathsf{p}}T$ por $1/_{\mathsf{n}}T$ e vice-versa, bem como passar a escrever simplesmente $1/T$ quando não houver necessidade de mencionar explicitamente o tipo de inversa.

Proposição 4.3. [PROPRIEDADES BÁSICAS DE $-^*$, $1/_{\mathsf{p}}-$ E $1/_{\mathsf{n}}-$]

(a) $1/_{\mathsf{p}}t_a = 1/_{\mathsf{n}}t_a = t'_a$ *e* $1/_{\mathsf{p}}t'_a = 1/_{\mathsf{n}}t'_a = t_a$.
(b) $t_{a_1} + t'_{a_2} = t_{a_1} + 1/t_{a_2}$.
(c) *Se B for uma trança básica horizontal, então $1/_pB$ é uma trança básica vertical.*
(d) *Se B for uma trança básica vertical, então $1/_nB$ é uma trança básica horizontal.*
(e) *Para qualquer trança racional T, $1/_{\mathsf{n}}(t_a + 1/_{\mathsf{p}}T) = T \oplus t'_a$ e $1/_{\mathsf{p}}(t_a + 1/_{\mathsf{n}}T) = t'_a \oplus T$.*
(f) $-(T+S) = (-T) + (-S)$, $-(1/T) = 1/-T$, $-t_a = t_{-a}$ *e* $-t'_a = t'_{-a}$.

Demonstração: (a) Basta observar os diagramas respectivos na Figura 25 (no caso da primeira identidade; o outro caso é análogo).
(b) Consequência imediata da alínea anterior.
(c) É evidente que $1/_{\mathsf{p}}\Big(((\cdots((((t_{a_1} \oplus t'_{a_2}) + t_{a_3}) \oplus t'_{a_4}) + t_{a_5}) \oplus \cdots) + t_{a_{2n-1}}) \oplus t'_{a_{2n}}\Big)$ é igual a

$$t_{a_{2n}} + ((\cdots + ((t_{a_4} + ((t_{a_2} + t'_{a_1}) \oplus t'_{a_3})) \oplus t'_{a_5}) \oplus \cdots) \oplus t'_{a_{2n-1}})$$

enquanto $1/_{\mathsf{p}}\Big(((\cdots((((t_{a_1} \oplus t'_{a_2}) + t_{a_3}) \oplus t'_{a_4}) + t_{a_5}) \oplus \cdots) \oplus t'_{a_{2n}}) + t_{a_{2n+1}}\Big)$ é igual a

$$(t_{a_{2n}} + (\cdots + ((t_{a_4} + ((t_{a_2} + t'_{a_1}) \oplus t'_{a_3})) + t'_{a_5}) \oplus \cdots)) \oplus t_{a_{2n+1}}.$$

(d) Imediato da alínea anterior e do facto das operações $1/_{\mathsf{p}}-$ e $1/_{\mathsf{n}}-$ serem inversas uma da outra.

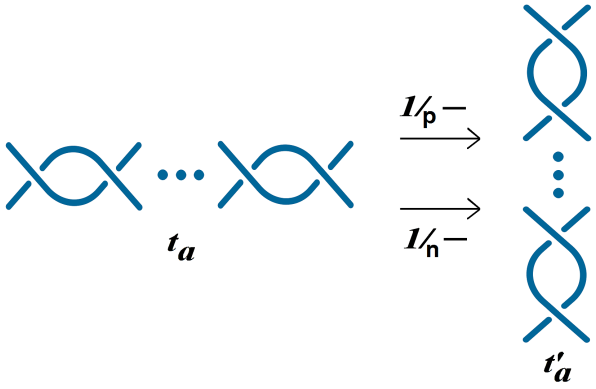


FIGURA 25. $1/_{\mathsf{p}} t_a = 1/_{\mathsf{n}} t_a = t'_a$.

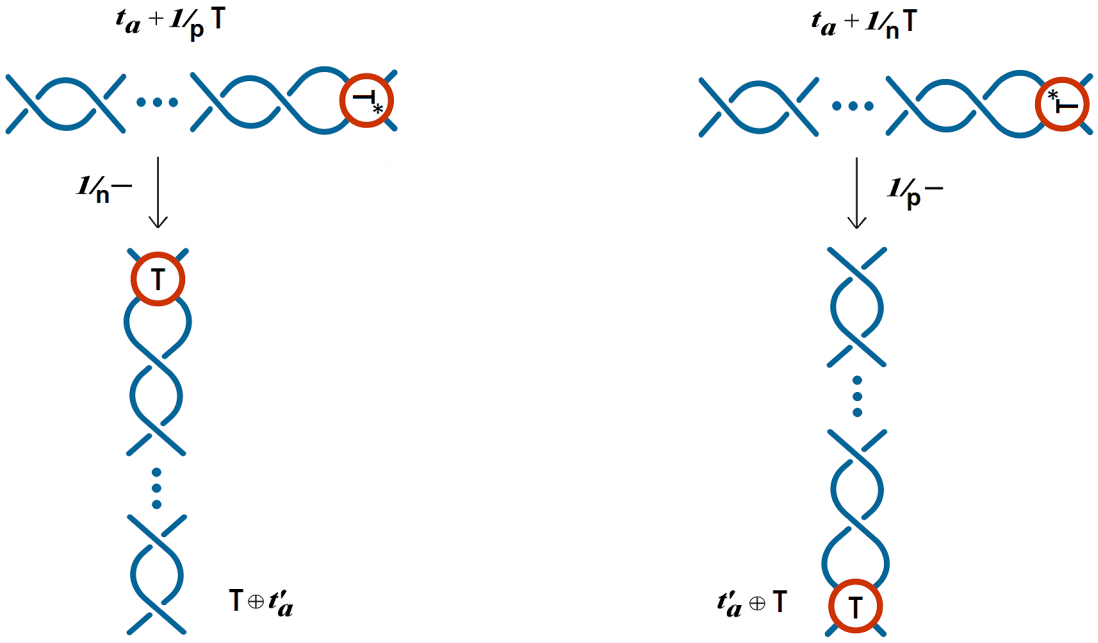


FIGURA 26. $1/_{\mathsf{n}}(t_a + 1/_{\mathsf{p}} T) = T \oplus t'_a$ e $1/_{\mathsf{p}}(t_a + 1/_{\mathsf{n}} T) = t'_a \oplus T$.

(e) Ver Figura 26.
(f) Óbvio. □

Esta proposição mostra que podemos construir todas as tranças básicas com as operações $+, -, 1/_{\mathsf{p}}-$ e $1/_{\mathsf{n}}-$. Por exemplo, as tranças $(t_{-2} \oplus t'_3) + t_2$ e $(t_2 + t'_{-3}) \oplus t'_{-2}$ da Figura 19, podem ser construídas da seguinte forma:

- $t_{-2} \to t_{-2} \oplus t'_3 \to (t_{-2} \oplus t'_3) + t_2$, que corresponde a

$$t_{-2} \;\to\; \frac{1}{t_3 + \frac{1}{t_{-2}}\mathsf{p}}\mathsf{n} \;\to\; \frac{1}{t_3 + \frac{1}{t_{-2}}\mathsf{p}}\mathsf{n} + t_2 \;\sim\; t_2 + \frac{1}{t_3 + \frac{1}{t_{-2}}\mathsf{p}}\mathsf{n}.$$

- $t'_{-3} \to t_2 + t'_{-3} \to (t_2 + t'_{-3}) \oplus t'_{-2}$, que corresponde a

$$\frac{1}{t_{-3}} \quad \to \quad t_2 + \frac{1}{t_{-3}} \quad \to \quad \frac{1}{t_{-2} + \frac{1}{t_2 + \frac{1}{t_{-3}}\mathsf{p}}}\mathsf{n}.$$

É agora claro que, no caso geral, cada trança básica horizontal de (3.5.1) e (3.5.2) corresponde respectivamente a

$$\frac{1}{t_{a_{2n}} + \cfrac{1}{t_{a_{2n-1}} + \cfrac{1}{t_{a_{2n-2}} + \cfrac{1}{\ddots \; t_{a_2} + \cfrac{1}{t_{a_1}}}}}} \quad \text{e} \quad t_{a_{2n+1}} + \frac{1}{t_{a_{2n}} + \cfrac{1}{t_{a_{2n-1}} + \cfrac{1}{\ddots \; t_{a_2} + \cfrac{1}{t_{a_1}}}}} \tag{4.3.1}$$

enquanto cada trança básica vertical de (3.5.3) e (3.5.4) pode ser escrita respectivamente na forma

$$t_{a_{2n}} + \frac{1}{t_{a_{2n-1}} + \cfrac{1}{t_{a_{2n-2}} + \cfrac{1}{\ddots \; t_{a_2} + \cfrac{1}{t_{a_1}}}}} \quad \text{e} \quad \frac{1}{t_{a_{2n+1}} + \cfrac{1}{t_{a_{2n}} + \cfrac{1}{t_{a_{2n-1}} + \cfrac{1}{\ddots \; t_{a_2} + \cfrac{1}{t_{a_1}}}}}}. \tag{4.3.2}$$

Em ambos os casos temos uma "fracção continuada"de tranças inteiras. Isto sugere que associemos às tranças básicas horizontais (3.5.1) e (3.5.2), respectivamente, as fracções continuadas aritméticas

$$\frac{1}{a_{2n} + \cfrac{1}{a_{2n-1} + \cfrac{1}{a_{2n-2} + \cfrac{1}{\ddots \; a_2 + \cfrac{1}{a_1}}}}} \quad \text{e} \quad a_{2n+1} + \frac{1}{a_{2n} + \cfrac{1}{a_{2n-1} + \cfrac{1}{\ddots \; a_2 + \cfrac{1}{a_1}}}} \tag{4.3.3}$$

e às tranças básicas verticais (3.5.3) e (3.5.4), respectivamente, as fracções continuadas

$$a_{2n} + \frac{1}{a_{2n-1} + \cfrac{1}{a_{2n-2} + \cfrac{1}{\ddots \; a_2 + \cfrac{1}{a_1}}}} \quad \text{e} \quad \frac{1}{a_{2n+1} + \cfrac{1}{a_{2n} + \cfrac{1}{a_{2n-1} + \cfrac{1}{\ddots \; a_2 + \cfrac{1}{a_1}}}}}. \tag{4.3.4}$$

Temos assim uma correspondência bijectiva entre tranças básicas e fracções continuadas. Como cada uma destas fracções continuadas é finita, é igual a um número racional[7], chamado *fracção da trança*, e que, para cada trança básica B, denotaremos por $F(B)$. Por exemplo, de (4.3.3) e (4.3.4) decorre imediatamente que $F(t_a) = a$ e $F(t'_a) = F(\frac{1}{t_a}) = \frac{1}{a}$.

[7]Cuidado: diferentes fracções continuadas podem ser iguais ao mesmo racional.

Para simplificar a escrita, podemos usar uma notação mais abreviada para denotar as tranças básicas horizontais e verticais:

As tranças horizontais (3.5.1) e (3.5.2) denotamo-las, respectivamente, por $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}, 0$ e $a_1, a_2, \ldots, a_{2n+1}$ enquanto as verticais (3.5.3) e (3.5.4) são denotadas, respectivamente, por $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$ e $a_1, a_2, \ldots, a_{2n+1}, 0$. Por exemplo, as tranças da Figura 20 denotam-se abreviadamente por, respectivamente, $-2, 3, 2$ e $-3, 2, -2, 0$, e as tranças básica t_0 e t'_0 por 0 e $0, 0$, respectivamente.

Não oferece dúvidas a reconstituição da trança a partir da respectiva notação abreviada $b_1, b_2, \ldots, b_n$: o último número, b_n, refere-se sempre a uma trança inteira horizontal (a trança t_{b_n}); quando é igual a 0 significa que a trança termina com t_0, ou seja, com a trança inteira vertical $t'_{b_{n-1}}$; se n é ímpar, a trança inteira identificada pelo primeiro número b_1 é horizontal (isto é, t_{b_1}) e a trança $b_1, b_2, \ldots, b_n$ é horizontal, igual a $(t_{b_1} \oplus t'_{b_2}) + t_{b_3} \oplus \cdots$; caso n seja par, a trança inteira identificada por b_1 é vertical (isto é, t'_{b_1}) e a trança $b_1, b_2, \ldots, b_n$ é vertical, igual a $\cdots + ((t_{b_2} \oplus t'_{b_1}) \oplus t'_{b_3})$.

Com esta notação abreviada podemos resumir (4.3.3) e (4.3.4) simplesmente por

$$F(b_1, b_2, \ldots, b_n) = b_n + \cfrac{1}{b_{n-1} + \cfrac{1}{b_{n-2} + \cfrac{1}{\ddots \; b_2 + \cfrac{1}{b_1}}}}. \tag{4.3.5}$$

A fracção da trança básica t'_0 é igual a $\frac{1}{0}$ que habitualmente se representa por ∞. Assim, F é uma função do conjunto $\mathcal{B}$ das tranças racionais básicas em $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$, que é claramente sobrejectiva, uma vez que qualquer número racional se pode escrever como fracção continuada [9]. Na proposição seguinte resumimos as propriedades fundamentais de F:

Proposição 4.4. [Propriedades básicas de F] *Para qualquer trança básica B tem-se:*

(a) $F(\frac{1}{B}) = \frac{1}{F(B)}$.
(b) *Se $t_a + B$ for uma trança básica, então* $F(t_a + B) = F(t_a) + F(B) = a + F(B)$.
(c) $F(-t_a) = F(t_{-a}) = -a = -F(t_a)$.
(d) $F(-t'_a) = F(t'_{-a}) = F(\frac{1}{t_{-a}}) = -\frac{1}{a} = -F(\frac{1}{t_a}) = -F(t'_a)$.
(e) $F(-B) = -F(B)$.

Demonstração: As asserções (a), (b), (c) e (d) são óbvias. Provemos (e), por indução sobre o número de tranças inteiras que formam a trança básica B.

Se B for uma trança inteira, é consequência das alíneas (c) e (d). Se B for formada por $k+1$ tranças inteiras, temos, caso B seja básica horizontal, $B = t_a + S$, sendo S uma trança básica vertical formada por k tranças inteiras, e, por hipótese de indução, então $F(-B) = -a + F(-S) = -(a + F(S)) = -F(B)$; caso B seja básica vertical, então $B = \frac{1}{t_a + S}$, sendo S uma trança básica horizontal formada por k tranças inteiras, e, por hipótese de indução, temos $F(-B) = \frac{1}{-a - F(S)} = -\frac{1}{a + F(S)} = -F(B)$. □

5. O Teorema de Conway. Parte I: F, se for um invariante, é completo

Foi John Conway, em 1970, que descobriu a relação (4.3.5) entre tranças racionais e fracções continuadas e que primeiro demonstrou que as tranças racionais são univocamente determinadas pelas correspondentes fracções continuadas ou seja, que a fracção F de uma trança racional é um invariante completo para as tranças racionais [3]. Para começarmos a demonstrar este facto precisamos de recordar alguns resultados clássicos sobre fracções continuadas [9]. A fracção continuada em (4.3.5), que se costuma denotar abreviadamente por $[b_n, b_{n-1}, \ldots, b_1]$, diz-se *regular* se $b_i > 0$ para $i = 1, 2, \ldots, n-1$. As fracções continuadas regulares são importantes por causa da unicidade que permitem na representação dos números racionais: todo o número racional p/q se pode escrever de modo único como uma fracção continuada regular. É fácil transformar uma fracção continuada numa regular com a mesma soma, com o auxílio da Fórmula de Lagrange

$$a - \frac{1}{b} = (a-1) + \frac{1}{1 + \frac{1}{b-1}}. \tag{5.0.1}$$

Com efeito, a aplicação desta fórmula permite-nos ir reduzindo, um de cada vez, os sinais negativos na fracção, até que no final só reste eventualmente um no primeiro termo da fracção. Por exemplo:

$$[2,2,-3] = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{-3}} \overset{(5.0.1)}{=} 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+\frac{1}{2}}} = [2,1,1,2]$$

e

$$[1,-3,2] = 1 + \frac{1}{-3 + \frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{3 - \frac{1}{2}} \overset{(5.0.1)}{=} 1 - \frac{1}{2 + \frac{1}{1+\frac{1}{1}}} = 1 - \frac{1}{2 + \frac{1}{2}} \overset{(5.0.1)}{=} 0 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+\frac{1}{2}}} = [0,1,1,2].$$

Temos então metade do Teorema de Conway:

Teorema 5.1. *Sejam T_1 e T_2 tranças racionais básicas. Se as respectivas fracções $F(T_1)$ e $F(T_2)$ são iguais então T_1 e T_2 são equivalentes.*

Demonstração: Bastará provar o seguinte facto:

(1) *Seja T uma trança básica com $F(T) = p/q$. Então existe uma trança básica S, equivalente a T, cuja fracção continuada é regular, com valor igual a p/q.*

De facto, se T_1 e T_2 forem tranças básicas com $F(T_1) = F(T_2) = p/q$, então por (1) existem $S_1 \sim T_1$ e $S_2 \sim T_2$ tais que $F(S_1) = F(S_2) = p/q$; como as fracções continuadas em $F(S_1)$ e $F(S_2)$ são regulares, pela unicidade acima referida são a mesma, donde $S_1 \sim S_2$. Logo $T_1 \sim T_2$.

A demonstração de (1) é simples: dada uma trança básica T com fracção continuada $[a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1]$ basta levar esta fracção à sua forma regular $[b_m, b_{m-1}, \ldots, b_1]$ ($b_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, m-1$) pelo algoritmo, via Fórmula de Lagrange, acima referido. A trança básica correspondente a esta fracção continuada é claramente a trança S que desejamos. (É ainda evidente que podemos obter directamente S a partir de T, fazendo nesta as correspondentes operações de Lagrange ilustradas nas Figuras 27 e 28.) □

Exemplo. As tranças -2,3,2 e 3,-2,3 da Figura 29 são equivalentes uma vez que

$$2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{-2}} = 2 + \frac{1}{\frac{5}{2}} = \frac{12}{5} \quad \text{e} \quad 3 + \frac{1}{-2 + \frac{1}{3}} = 3 + \frac{1}{\frac{-5}{3}} = \frac{12}{5}.$$

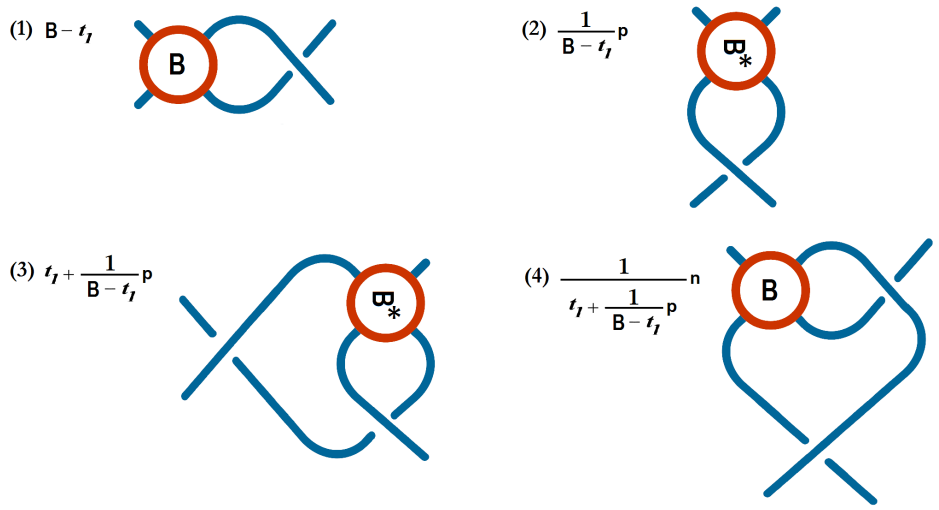


FIGURA 27. Trança correspondente a $\frac{1}{1+\frac{1}{b-1}}$.

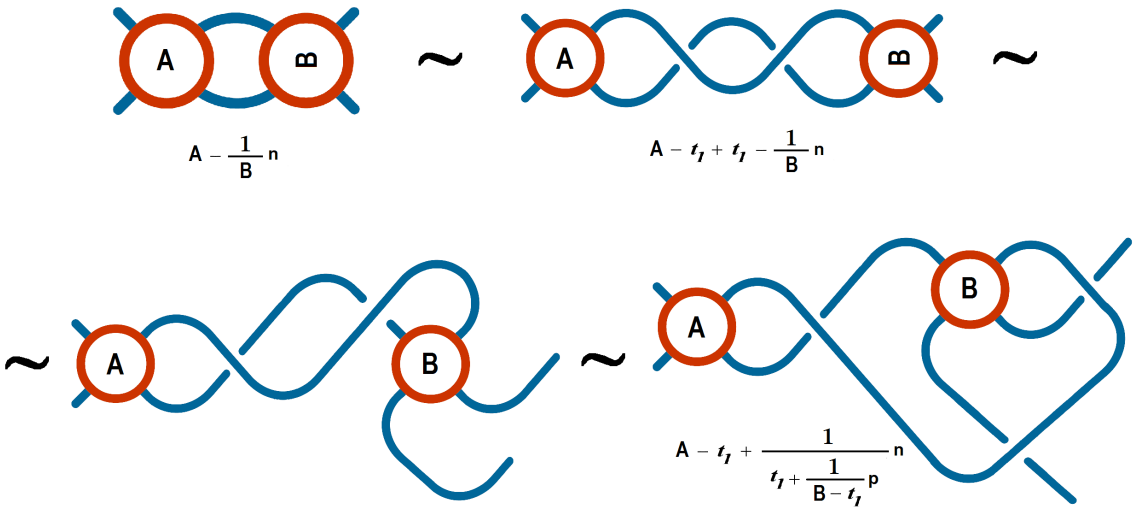


FIGURA 28. Versão topológica da Fórmula de Lagrange.

Observe o carácter constructivo da demonstração do Teorema 5.1: dá-nos um algoritmo que nos permite converter T_1 em T_2 quando $F(T_1) = F(T_2)$.

6. O PARÊNTESIS DE KAUFFMAN

Para provarmos a segunda parte do Teorema de Conway (ou seja, o recíproco do Teorema 5.1) vamos introduzir um método, devido a Louis Kauffman, para classificar tranças a partir dos polinómios de Jones, baseado numa representação planar dos nós.

Por analogia à intersecção de duas rectas num plano dividir o plano em dois pares de ângulos complementares, podemos considerar em qualquer cruzamento de um nó dois tipos de ângulo: o primeiro à direita, quando percorremos a corda que passa por cima — ângulo de *tipo A* — e

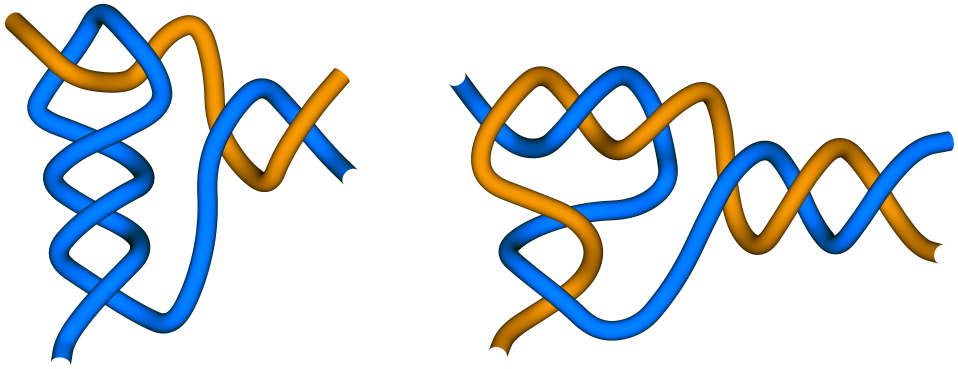


FIGURA 29. Tranças -2,3,2 e 3,-2,3.

o outro — ângulo de *tipo B*. É claro que esta definição é independente do lado da corda pelo qual começamos a percorrer o nó, como podemos observar na Figura 30.

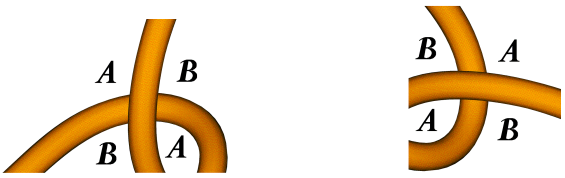


FIGURA 30. Ângulos A e B num cruzamento.

Então, em qualquer nó podemos associar cada cruzamento com a letra A ou B. A escolha de A ou B permite distinguir entre uma de duas possibilidades de eliminar o respectivo cruzamento pelas operações de eliminação de Conway (*operações de eliminação do tipo A e do tipo B*) descritas na Figura 31. Se fizermos isso em todos os cruzamentos do nó temos diversos modos de transformar o nó num nó sem cruzamentos, ou seja, numa colecção de círculos disjuntos.

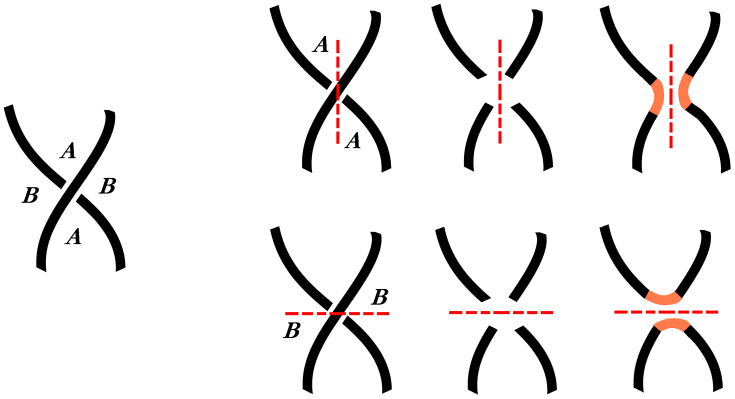


FIGURA 31. Cirurgia num cruzamento: operações de eliminação do tipo A e do tipo B.

Diz-se que cada escolha de letra em todos os cruzamentos do nó é um *estado* do nó. Por exemplo, a Figura 32 mostra um possível estado do nó de oito. Um nó K com n cruzamentos

tem 2^n estados possíveis. Denotemos por $S(K)$ o conjunto dos vários estados de K. Para qualquer estado $s \in S(K)$, definimos $\alpha(s)$ como sendo o número de cruzamentos do tipo A no estado s, e, analogamente, definimos $\beta(s)$ relativamente ao ângulo de tipo B. É evidente que, para qualquer s, $\alpha(s) + \beta(s) = n$. Definimos ainda $\gamma(s)$ como o número de círculos disjuntos com que K fica no estado s (v. exemplo na Figura 32).

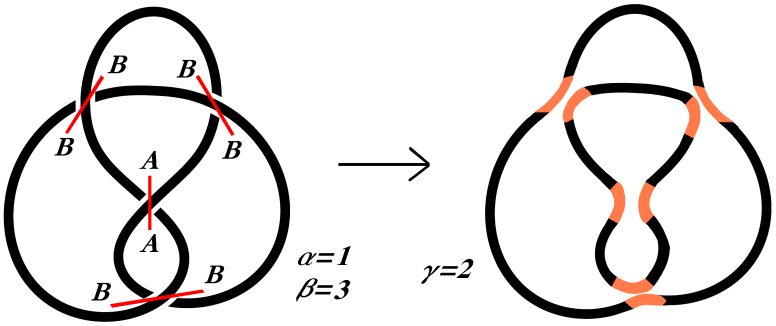


FIGURA 32. Um estado possível do nó de oito e nós triviais em que é transformado.

Com estas noções, podemos agora definir um polinómio de coeficientes inteiros[8] numa variável x, chamado *parêntesis de Kauffman*:[9]

$$\langle K \rangle = \sum_{s \in S(K)} x^{\alpha(s)-\beta(s)} \left(-x^2 - x^{-2}\right)^{\gamma(s)-1}. \tag{6.0.1}$$

A aplicação desta fórmula é muito simples, embora muito trabalhosa se o nó tiver muitos cruzamentos! Naturalmente, podemos estender todas estas definições a *elos*.[10]

Proposição 6.1. [PROPRIEDADES BÁSICAS DO PARÊNTESIS DE KAUFFMAN]

(a) $\left\langle \bigcirc \right\rangle = 1$.

(b) *Para qualquer nó ou elo* K, $\left\langle K \bigcirc \right\rangle = \langle K \rangle \left(-x^2 - x^{-2}\right)$.

(c) $\left\langle \times \right\rangle = x \left\langle \asymp \right\rangle + x^{-1} \left\langle) (\right\rangle$.

(*Em (c) os diagramas representam 3 elos arbitrários idênticos com excepção para os segmentos de corda indicados dentro dos círculos a tracejado.*)

Demonstração: A primeira propriedade é imediata. Para provar a segunda basta observar que, em cada estado, na respectiva parcela de (6.0.1) só o valor de $\gamma(s)$ é alterado, passando a valer mais uma unidade. Portanto,

$$\left\langle K \bigcirc \right\rangle = \sum_{s \in S(K)} x^{\alpha(s)-\beta(s)} \left(-x^2 - x^{-2}\right)^{\gamma(s)} = \langle K \rangle \left(-x^2 - x^{-2}\right).$$

[8]Em geral, este polinómio pode conter potências negativas de x. Os matemáticos referem-se a polinómios deste tipo (elementos de $\mathbb{Z}[x, x^{-1}]$ ou, mais geralmente, $\mathbb{Z}[x_1, x_1^{-1}, \ldots, x_n, x_n^{-1}]$) como *polinómios de Laurent*.

[9]"One might ask where Kauffman got this unusual formula. Without going into details, I would simply say that he found it by backward reasoning (and trial and error), that is, by starting from the results he wanted to obtain."([14], pp. 78).

[10]Um elo (com n componentes) é uma união disjunta de n nós.

Relativamente à terceira propriedade, considerando que o elo no 1^o membro tem n cruzamentos, cada um dos indicados no 2^o membro terá $n-1$ cruzamentos, pelo que o polinómio do elo do 1^o membro terá 2^n parcelas enquanto cada um dos polinómios dos elos do 2^o membro terá 2^{n-1} parcelas. Seja c o cruzamento em destaque no diagrama do 1^o membro. A cada parcela do primeiro polinómio corresponde exactamente uma de um dos polinómios do 2^o membro porque a cada estado do elo do 1^o membro corresponderá, caso o cruzamento c seja do tipo A, um estado do primeiro elo no 2^o membro (mas neste o valor de $\alpha(s)$ está reduzido numa unidade pelo que é preciso fazer a compensação multiplicando por x), ou, caso o cruzamento c seja do tipo B, a um estado do segundo elo no 2^o membro (neste o valor de $\beta(s)$ vale menos uma unidade pelo que é compensado multiplicando por x^{-1}). □

Estas propriedades tornam o cálculo do polinómio de qualquer nó num exercício simples: basta ir sempre partindo o polinómio de Kauffman do nó, usando a propriedade (c), numa soma de polinómios ao longo dos diferentes estados do nó, sendo que depois os cálculos para cada parcela se resumem a aplicar a propriedade (b) sucessivas vezes até chegarmos à vez de rematar com a primeira propriedade (quando temos somente o nó trivial). Por exemplo,

$\left\langle \right\rangle = x \left\langle \right\rangle + x^{-1} \left\langle \right\rangle = x \cdot 1 + x^{-1}(-x^2 - x^{-2}) = -x^{-3}$

e, analogamente, $\left\langle \right\rangle = -x^{-3}$, pelo que para o *elo de Hopf* tem-se

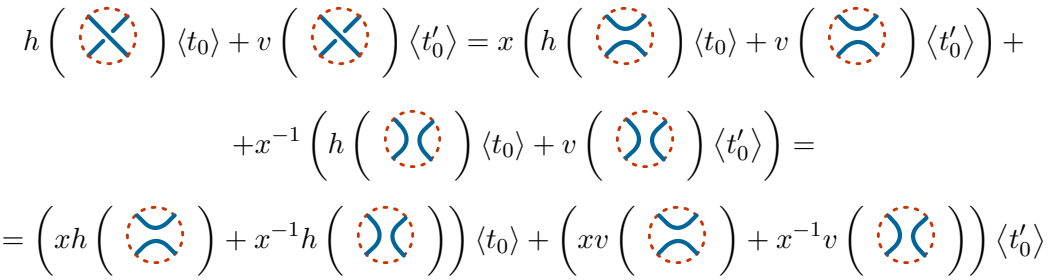
$\left\langle \right\rangle = x \left\langle \right\rangle + \left\langle \right\rangle = x(-x^3) + x^{-1}(-x^{-3}) + x^{-1}(-x^{-3}) = -x^4 - x^{-4}.$

No caso do trifólio temos

$$\begin{aligned} \left\langle \right\rangle &= x^{-3} \left\langle \right\rangle + x^{-1} \left\langle \right\rangle + x^{-1} \left\langle \right\rangle + x \left\langle \right\rangle \\ &\quad x^{-1} \left\langle \right\rangle + x \left\langle \right\rangle + x \left\langle \right\rangle + x^3 \left\langle \right\rangle \\ &= 3x^{-1} \left\langle \right\rangle + (x^{-3} + 3x) \left\langle \right\rangle + x^3 \left\langle \right\rangle \\ &= 3x^{-1} + (x^{-3} + 3x)(-x^2 - x^{-2}) + x^3(-x^2 - x^{-2})^2 = -x^{-5} - x^3 + x^7. \end{aligned}$$

Convém agora estender esta definição às tranças, calculando-se o parêntesis através das duas últimas propriedades da Proposição 6.1. Como uma trança ao longo do processo de cálculo nunca poderá perder as suas pontas, nunca será preciso aplicar a propriedade (a). De forma semelhante ao caso dos nós, podemos considerar os vários estados de uma trança. Como em cada estado temos que ter sempre as quatro pontas e não podem restar cruzamentos depois de realizadas todas as operações de cirurgia de Conway, as quatro pontas terão que ser adjacentes aos pares. Assim, para cada estado, a respectiva parcela do parêntesis de Kauffman será múltipla de $\langle t_0 \rangle$ ou de $\langle t_0' \rangle$, não podendo ser de ambos em simultâneo. Então, para cada trança T, $\langle T \rangle$ é a soma de um múltiplo de $\langle t_0 \rangle$ com um múltiplo de $\langle t_0' \rangle$. Aos coeficientes de multiplicidade, que são polinómios de Laurent numa variável x, chamamos respectivamente *componente horizontal* e *componente vertical* da trança (denotadas por $h(T)$ e $v(T)$, respectivamente). Portanto, $\langle T \rangle = h(T) \langle t_0 \rangle + v(T) \langle t_0' \rangle$.

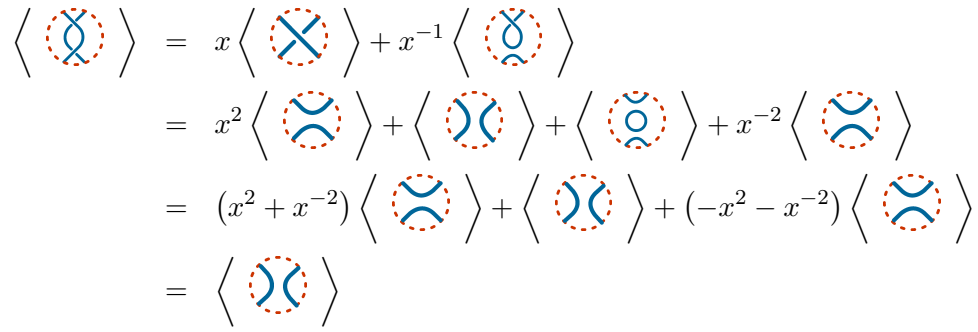
Os polinómios $h(T)$ e $v(T)$ verificam propriedades análogas às propriedades (c) e (b) da Proposição 6.1:



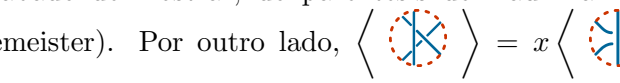
(a propriedade (b) demonstra-se de forma semelhante).

Vejamos agora que estes polinómios não se alteram quando aplicados os 2^o e 3^o movimentos de Reidemeister às tranças:

(2^o)

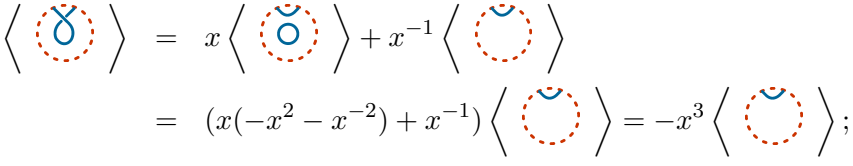


Portanto, o parêntesis de Kauffman é invariante para o 2^o movimento de Reidemeister. Consequentemente, também os os polinómios $h(T)$ e $v(T)$ são invariantes.

(3^o) (por eliminação do cruzamento mais à esquerda e aplicando o facto, acabado de mostrar, do parêntesis de Kauffman ser invariante para o 2^o movimento de Reidemeister). Por outro lado,  (por eliminação do cruzamento mais à direita e novamente aplicando o facto do parêntesis de Kauffman ser invariante para o 2^o movimento de Reidemeister).

Portanto, o parêntesis de Kauffman é também invariante para o 3^o movimento de Reidemeister. Consequentemente, também os polinómios $h(T)$ e $v(T)$ são invariantes.

Infelizmente, o parêntesis de Kauffman não é invariante para o 1^o movimento de Reidemeister; contudo, surpreendentemente, apesar de h e v variarem, variam de forma semelhante fazendo com que o quociente $\frac{v(T)}{h(T)}$ seja um invariante. Para verificar tal, analisemos os dois casos possíveis (de acordo com o tipo do cruzamento sobre o qual aplicamos o 1^o movimento de Reidemeister):



Temos então $h\left(\right) = -x^k h\left(\right)$ e $v\left(\right) = -x^k v\left(\right)$ ($k = 3$ no primeiro caso e $k = -3$ no segundo), donde, em qualquer dos casos

$$\frac{v\left(\right)}{h\left(\right)} = \frac{v\left(\right)}{h\left(\right)}.$$

Em conclusão, o quociente $\frac{v(T)}{h(T)}$, que é um quociente de dois polinómios de Laurent em x que denotaremos por $R_T(x)$, não se altera por aplicação de movimentos de Reidemeister pelo que é um invariante para as tranças.[11]

7. O Teorema de Conway. Parte II: F é mesmo um invariante

Para cada trança T, $R_T(x)$ é um quociente de dois polinómios de Laurent em x. Substituindo x (no numerador e denominador) por um número complexo a obtemos um número complexo $R_T(a)$. Isto permite-nos definir nas tranças a função C com valores em $\mathbb{C}$:

$$C(T) = -iR_T\left(\sqrt{i}\right).$$

Por exemplo, como $\langle t_1\rangle = x^{-1}\langle t_0\rangle + x^1\langle t_0'\rangle$, então $R_{t_1}(x) = x^2$ donde $C(t_1) = -i(\sqrt{i})^2 = 1$. Analogamente, $R_{t_{-1}}(x) = x^{-2}$ e $C(t_{-1}) = -i(\sqrt{i})^{-2} = -1$.

Proposição 7.1. [Propriedades básicas de C] *Para qualquer trança T, tem-se:*

(a) $C(-T) = -C(T)^*$.
(b) $C\left(\frac{1}{T}\right) = \left(\frac{1}{C(T)}\right)^*$.
(c) $C(T+S) = C(T) + C(S)$.
(d) *Se T é racional,* $C(T) \in \mathbb{Q}$.
(e) *Se T é racional,* $C(T) = F(T)$.

(*A operação $*$ no segundo membro representa a operação de conjugação em* $\mathbb{C}$.)

Demonstração: (a) Como $-T$ é a trança T com todos os cruzamentos trocados, num qualquer estado s do processo de eliminação dos seus cruzamentos, aparecerá em $\langle T\rangle$ a parcela $x^{\alpha(s)-\beta(s)}+(-x^2-x^{-2})^{\gamma(s)-1}$, enquanto que no estado correspondente s' para $-T$ teremos $\gamma(s') = \gamma(s)$, $\alpha(s') = \beta(s)$ e $\beta(s') = \alpha(s)$. Assim a parcela passa a ser $x^{-\alpha(s)+\beta(s)} + (-x^2 - x^{-2})^{\gamma(s)-1}$. Portanto, multiplicando x^{-1} pela parcela do estado s de T passamos a ter a parcela do estado correspondente em $-T$, e isto para todas as parcelas em $\langle T\rangle$. Como os estados correspondentes não alteram as suas relações em relação a $h(T)$ e $v(T)$, vemos que, para $x = \sqrt{i} =$

[11] Qualquer nó pode ser *orientado*, indicando-se a orientação na sua representação planar por uma seta. Fixada uma orientação, podemos ter então 2 tipos de cruzamentos:

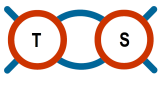
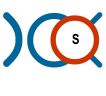
A *contorção* $c(K)$ de um nó K é a diferença entre o número de cruzamentos positivos e o número de cruzamentos negativos. O leitor mais perspicaz poderá concluir, a partir da discussão acima, que $X(K) = -x^{-3c(K)}\langle K\rangle$ é invariante para os três movimentos de Reidemeister. É este o chamado *polinómio de Jones* de K. Por exemplo, como a contorção do trifólio é igual a -3, o seu polinómio de Jones é igual a $-x^9(-x^{-5}-x^3+x^7) = x^4+x^{12}-x^{16}$, o que garante imediatamente que este nó não é equivalente ao trivial. O conhecimento destes polinómios teria poupado muitos anos de trabalho aos pioneiros da classificação dos nós, como Tait, na elaboração das suas tabelas.

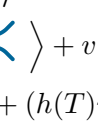
$\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$, ou seja, $x^{-1}=\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}=\left(\sqrt{i}\right)^*$, como a soma de conjugados é o conjugado da soma, $h(-T)=h(T)^*$ e $v(-T)=v(T)^*$. Consequentemente, $R_{-T}\left(\sqrt{i}\right)=\left(R_T\left(\sqrt{i}\right)\right)^*$, donde $C(-T)=-iR_{-T}\left(\sqrt{i}\right)=-i\left(R_T\left(\sqrt{i}\right)\right)^*=\left(iR_T\left(\sqrt{i}\right)\right)^*=-C(T)^*$.

(b) Sem grande dificuldade consegue-se ver que $h\left(\frac{1}{T}\right)=v(T)^*$ e $v\left(\frac{1}{T}\right)=h(T)^*$, pelo que $R_{\frac{1}{T}}\left(\sqrt{i}\right)=\frac{1}{R_T\left(\sqrt{i}\right)^*}$. Então

$$C\left(\frac{1}{T}\right)=-i\frac{1}{R_T\left(\sqrt{i}\right)^*}=\left(\frac{1}{-iR_T\left(\sqrt{i}\right)}\right)^*=\left(\frac{1}{C(T)}\right)^*.$$

(c) Calculamos $\langle T+S\rangle$ desenvolvendo primeiro sobre a trança T, substituindo-a pela soma das duas tranças com coeficientes $h(T)$ e $v(T)$ que correspondem ao seu parêntesis, e depois fazemos o desenvolvimento de cada uma destas parcelas sobre a trança S:

$\langle T+S\rangle$ = $\left\langle$  $\right\rangle = h(T)\left\langle$ $\right\rangle + v(T)\left\langle$  $\right\rangle$

$= h(T)\left(h(S)\left\langle\right.\right.$ $\left.\left.\right\rangle + v(S)\left\langle\right.\right.$  $\left.\left.\right\rangle\right) + v(T)\left(h(S)\left\langle\right.\right.$ $\left.\left.\right\rangle + v(S)\left\langle\right.\right.$ $\left.\left.\right\rangle\right)$

$= (h(T)h(S))\langle t_0\rangle + (h(T)v(S)+v(T)h(S)+v(T)v(S)(-x^2-x^{-2}))\langle t_0'\rangle$.

Portanto, $h(T+S)=h(T)h(S)$ e $v(T+S)=h(T)v(S)+v(T)h(S)+v(T)v(S)(-x^2-x^{-2})$, donde

$$\frac{v(T+S)}{h(T+S)}=\frac{h(T)v(S)+v(T)h(S)+v(T)v(S)(-x^2-x^{-2})}{h(T)h(S)}=\frac{v(T)}{h(T)}+\frac{v(S)}{h(S)}+\frac{v(T)}{h(T)}\frac{v(S)}{h(S)}(-x^2-x^{-2}).$$

Logo, $C(T+S)=C(T)+C(S)+C(T)R_S(\sqrt{i})(-i-i^{-1})=C(T)+C(S)$, uma vez que $-i-i^{-1}=0$.

(d) Seja T uma trança racional. Sendo equivalente a uma trança básica então, como observámos na Secção 4, T pode ser gerada a partir de t_1 e t_1' somente com as operações $+,-,1/_{\mathsf{p}}-$ e $1/_{\mathsf{n}}-$. Uma vez que $C(t_1)=1$ e $C(t_{-1})=-1$ são racionais, então pelas propriedades (a), (b) e (c), $C(T)$ é racional.

(e) Como $C(T)\in\mathbb{Q}$, $C(1/T)=(1/C(T))^*=1/C(T)$. Conjuntamente com as outras propriedades da Proposição 7.1, isto mostra que C se comporta exactamente como F nos geradores e relativamente às operações $+,-,1/-$, pelo que $C(T)=F(T)$ para qualquer trança racional. □

Uma vez que, como vimos, $C(T)$ é um invariante para as tranças, segue imediatamente da Proposição 7.1(e) que F é um invariante para as tranças racionais e a nossa missão está terminada:

Teorema 7.2. *Dadas quaisquer duas tranças racionais básicas T_1 e T_2, se T_1 e T_2 são equivalentes, então as respectivas fracções $F(T_1)$ e $F(T_2)$ são iguais.* □

Em conclusão, os Teoremas 5.1 e 7.2 garantem que F é um invariante completo para a equivalência isotópica de tranças básicas.[12]

[12] Note que o Teorema 7.2 garante que a função F de (4.3.5) pode ser definida no conjunto $\mathcal{B}/\sim$ das classes de equivalência da relação de equivalência isotópica em $\mathcal{B}$, obtendo-se uma função sobrejectiva. O Teorema 5.1 diz-nos então que esta função é injectiva. Portanto, existe uma bijecção entre $\mathcal{B}/\sim$ e $\mathbb{Q}\cup\{\infty\}$. Como, pela Proposição 3.8, toda a trança racional é equivalente a uma trança básica (e a sua demonstração fornece-nos um

8. O jogo de Conway

É jogado com duas cordas e quatro jogadores A, B, C e D, que se começam por colocar como a Figura 33 mostra ("posição 0", correspondendo ao número 0), cada um segurando uma ponta de uma corda.

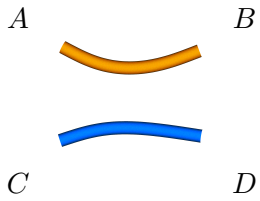


Figura 33. Posição inicial.

Então o árbitro[13] ordena uma de duas jogadas: "Adicionem 1!"ou "Tomem o inverso negativo!". No primeiro caso (Figura 34) o jogador B troca de posição com o jogador D fazendo passar a sua ponta por cima da do jogador D.

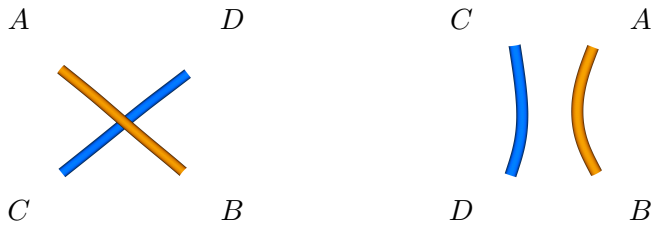


Figura 34. Jogada 1 (Adição) e jogada 2 (Inverso negativo).

Esta é a chamada "posição 1"(pois partimos de 0 e "adicionámos um!"). No segundo caso (Figura 34) os jogadores rodam 90^0, ocupando a posição previamente ocupada pelo jogador à sua esquerda. É a "posição $-1/0$"(pois começámos com 0 e considerámos o inverso com sinal negativo; a quem a divisão por 0 faça espécie, peça ao árbitro para não começar por esta jogada!). O árbitro continua a ordenar sucessivamente uma destas duas jogadas, por uma ordem qualquer. Ao fim de algum tempo as cordas estarão completamente entrelaçadas nalguma "posição p/q"racional. O objectivo do jogo será que os jogadores desfaçam o entrelaçamento e voltem à "posição 0". A aparente dificuldade residirá na possibilidade de eles não se lembrarem mais da sequência exacta de movimentos que os levou ao entrelaçamento (é claro que o jogo será mais engraçado se eles não se lembrarem mesmo de tal sequência).

No entanto, maravilhosamente, o Teorema de Conway garante-nos que qualquer sequência de jogadas 1 e 2 que conduzam o número p/q a 0 levará a trança à "posição 0". Bastará assim aos jogadores ir descobrindo uma maneira de levar o número p/q de volta a 0, com a ajuda das operações de adição e inverso negativo, e a trança dissolver-se-à automaticamente, como que por magia!

---

algoritmo para obter tal equivalência), temos assim um **processo algorítmico para decidir a equivalência de quaisquer duas tranças racionais**.

[13]Em Setembro de 2004, no *Encontro Nacional Novos Talentos em Matemática*, no Luso, foi o próprio Conway que serviu de árbitro.

Agradecimentos

A maioria das figuras deste artigo podem ser manipuladas (a cores) em `www.mat.uc.pt/~picado/tangles`. Foram realizadas com a ajuda do excelente programa KnotPlot de Robert Scharein [13], cuja cópia de uso livre pode ser obtida em `www.pims.math.ca/knotplot/download`.

Referências

[1] C. Adams, *The Knot Book*, American Mathematical Society, 2004.

[2] B. Cipra, From knot to unknot, in: *What's Happening in the Mathematical Sciences*, Vol. 2, American Mathematical Society, 1994.

[3] J. H. Conway, An enumeration of knots and links and some of their algebraic properties, in: *Computational Problems in Abstract Algebra*, Proc. 1967 Oxford Conf., ed. J. Leech, Pergamon Press, 1970, pp. 329-358.

[4] P. Freyd, J. Hoste, R. Lickorish, K. Millet, A. Ocneanu e D. Yetter, A new polynomial invariant of knots and links, *Bull. Amer. Math. Soc.* 12 (1985) 239-246.

[5] J.R. Goldman e L.H. Kauffman, Rational tangles, *Adv. in Appl. Math.* 18 (1997) 300-332.

[6] L.H. Kauffman e S. Lambropoulou, Classifying and applying rational knots and rational tangles, in: *Physical knots: knotting, linking, and folding geometric objects in* $\mathbb{R}^3$, Contemporary Mathematics Vol. 304, American Mathematical Society, 2002

[7] L.H. Kauffman e S. Lambropoulou, On the classification of rational knots, *Enseign. Math.* 49 (2003) 357-410.

[8] L.H. Kauffman e S. Lambropoulou, On the classification of rational tangles, *Adv. in Appl. Math.* 33 (2004) 199-237.

[9] A.Ya. Khinchin, *Continued Fractions*, Dover, 1997.

[10] J. Hoste, M. Thistlethwaite e J. Weeks, The first 1.701.936 knots, *The Math. Intellig.* 20 (4) (1998), 33-48.

[11] J. Picado, An interview with Alexei Sossinsky *CIM Bulletin* 19 (2005) 24-29.

[12] A. Salgueiro, *Breve Digressão pela Teoria dos Nós*, Departamento de Matemática, Universidade de Coimbra, 1999.

[13] R. Scharein, *KnotPlot: a program for viewing mathematical knots*, July 2005, `www.knotplot.com`.

[14] A. Sossinsky, *Knots: Mathematics with a twist*, Harvard Univ. Press, 2002.

[15] Projecto Atractor, *Exposição de Nós*, tradução portuguesa de uma exposição sobre nós criada pelo Centro para a Divulgação da Matemática da Universidade de Bangor (Reino Unido), `www.atractor.pt/bangor`.

2º ano da Lic. em Matemática, Universidade de Coimbra, 3001-454 Coimbra
E-mail: `mat0403@mat.uc.pt`

Departamento de Matemática, Universidade de Coimbra, 3001-454 Coimbra
E-mail: `picado@mat.uc.pt`
URL: `www.mat.uc.pt/~picado`