

**Supraconvergência  
em  
Métodos de Diferenças Finitas Elípticos**

por

Sílvia Alexandra Alves Barbeiro

Dissertação submetida para satisfação parcial dos requisitos do programa de Mestrado em Matemática, na área de especialização em Matemática Aplicada.

# Prefácio

O estudo da convergência de métodos de diferenças finitas definidos em malhas uniformes é baseado nos conceitos de estabilidade e consistência e na "regra":

$$\text{Consistência} + \text{Estabilidade} \implies \text{Convergência.}$$

Deste modo, são obtidos majorantes para a norma do erro de discretização (erro global) que dependem da norma do correspondente erro de truncatura.

A técnica de análise anterior, introduzida em 1956 por Lax e Richtmeyer [14], amplamente utilizada, apresenta algumas limitações quando o método de diferenças finitas é definido sobre uma malha não uniforme : dificuldade na análise da estabilidade, as estimativas obtidas escondem as reais propriedades de convergência.

Desde 1986 têm surgido na literatura diversos estudos de métodos de diferenças finitas definidos em malhas não uniformes que mostram a convergência de certos métodos inconsistentes e ainda, em outros métodos, que a ordem do erro global é superior à ordem do correspondente erro de truncatura. Esta propriedade foi designada por supraconvergência. Assim, sem sermos exaustivos, salientamos [3], [6], [7], [8], [10], [12], [16], [18], [23] e [24].

Relativamente a problemas diferenciais ordinários notamos que em [12], [16] e [17], a supraconvergência é estudada atendendo à equivalência entre o método de diferenças finitas centradas para um problema diferencial de segunda ordem e um método de diferenças finitas centradas para um sistema diferencial ordinário de primeira ordem. Em [7] e [8] a análise dos métodos é baseada na desigualdade para a estabilidade obtida considerando diferentes normas. Deste modo, o erro global e o correspondente erro de truncatura são considerados relativamente a normas diferentes. Notamos que embora estas sejam as principais técnicas de análise presentes na literatura outras surgiram, por exemplo, em [10].

As técnicas de análise de métodos de diferenças finitas definidos em malhas não uniformes para problemas diferenciais de segunda ordem elípticos - métodos de diferenças finitas elípticos - presentes na literatura, são diferentes das anteriores. Assim, por exemplo em [6], é construído o erro global e, deste modo, obtida uma

estimativa supraconvergente. Utilizando os argumentos da Teoria Discreta da Convergência ([21]), em [3], [4] e [18] são obtidas estimativas supraconvergentes baseadas na estabilidade. Esta última propriedade do método é provada utilizando a norma de funcionais lineares  $\|\cdot\|_{-1}$  e a estimativa para a norma do erro de truncatura  $T$  é obtida estimando  $\|T\|_{-1}$ .

O objectivo deste trabalho é o estudo de métodos de diferenças finitas para problemas diferenciais elípticos definidos em domínios poligonais de  $\mathbb{R}^2$ , com condições de Dirichlet e Neumann para a fronteira. Os problemas diferenciais de segunda ordem que consideramos apresentam coeficientes variáveis e derivadas mistas. A análise da estabilidade dos métodos é baseada na estabilidade de funcionais lineares adequadas associadas a formas bilineares definidas criteriosamente a partir dos métodos de diferenças finitas. Atendendo a este facto e seguindo [9], no Capítulo 1 - Alguns resultados em problemas variacionais - apresentamos resultados gerais de existência e unicidade para a solução de problemas variacionais e ainda resultados de estabilidade para as formas bilineares que induzem tais problemas. Particularizamos em seguida os resultados gerais a problemas variacionais associados a problemas diferenciais elípticos com diferentes condições para a fronteira. A finalizar o estudo dos problemas variacionais, apresentamos alguns resultados de convergência para a solução de Ritz-Galerkin.

No Capítulo 2 - Equações elípticas com condições de Dirichlet - seguindo [5], estudamos a supraconvergência de métodos de diferenças finitas para problemas elípticos com coeficientes variáveis e derivadas mistas, definidos em domínios poligonais limitados  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  com condições de Dirichlet para a fronteira. A estabilidade dos métodos de diferenças finitas tem um papel fundamental na demonstração dos resultados de convergência. Esta propriedade é estudada usando a estabilidade de formas bilineares associadas ao método de diferenças. Atendendo a este facto, definimos um método de elementos finitos linear equivalente ao método de diferenças finitas e, uma vez que provamos que o método de diferenças finitas é de segunda ordem, deduzimos, deste modo, a convergência quadrática da solução de elementos finitos. As estimativas de erro são estabelecidas relativamente à norma do espaço  $H_0^1(\Omega)$ .

No Capítulo 3 - Equação de Poisson com condição de Neumann - estendemos alguns dos resultados apresentados no Capítulo 2 a uma discretização por diferenças finitas da equação de Poisson definida num domínio rectangular com condição de Neumann.

A generalização dos resultados apresentados no Capítulo 2 a um sistema de equações diferenciais é o objectivo do Capítulo 4 - Sistemas de equações diferenciais. Neste capítulo estudamos a discretização de um problema de elasticidade plano e provamos a convergência quadrática da solução numérica.

Finalmente, no Capítulo 5 - Alguns resultados numéricos - exibimos um certo número de simulações dos métodos estudados ao longo dos Capítulos 2, 3 e 4.

Na dedução das estimativas para o erro de discretização por diferenças finitas admitimos que  $u \in C^4(\overline{\Omega})$ . No entanto, as soluções dos problemas estudados não apresentam, em muitas situações com interesse, a regularidade exigida. Observamos que, por exemplo, no contexto dos métodos de volumes finitos, em [22] e [23], a convergência é estabelecida considerando menos regularidade do que a por nós assumida. Atendendo a este facto, pensamos que deverá ser alvo de estudo o desenvolvimento de técnicas para estimar o erro de discretização que permitam concluir a convergência quadrática sob condições mais fracas, por exemplo  $u \in H^3(\Omega)$ .

Ao terminar, tenho o prazer de registar os meus agradecimentos a todos aqueles que, pelo seu apoio e amizade, tornarem possível a concretização deste trabalho. Não podendo mencionar cada um, não posso deixar de particularizar o Professor Doutor José Augusto Mendes Ferreira. Pelo apoio paciente, disponibilidade e permanente incentivo que me dispensou ao longo da realização desta dissertação, os meus profundos agradecimentos.

Quero também agradecer ao Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra e ao Centro de Matemática da Universidade de Coimbra pelas condições de trabalho proporcionadas.

Sílvia Alexandra Alves Barbeiro

Coimbra, 1999



# Índice

<b>Prefácio</b>	<b>i</b>
<b>1 Problemas variacionais</b>	<b>1</b>
1.1 Introdução . . . . .	1
1.2 Formas bilineares . . . . .	2
1.3 Alguns problemas variacionais . . . . .	8
1.4 Solução de Ritz-Galerkin . . . . .	13
<b>2 Equações com condições de Dirichlet</b>	<b>21</b>
2.1 Introdução . . . . .	21
2.2 Método de diferenças finitas . . . . .	22
2.3 Problema variacional discreto . . . . .	24
2.4 Estabilidade . . . . .	31
2.5 Convergência . . . . .	36
<b>3 Equação de Poisson com condição de Neumann</b>	<b>47</b>
3.1 Introdução . . . . .	47
3.2 Método de diferenças finitas . . . . .	48
3.3 Problema variacional discreto . . . . .	50
3.4 Estabilidade e convergência . . . . .	53
<b>4 Sistemas de equações diferenciais</b>	<b>59</b>
4.1 Introdução . . . . .	59
4.2 Problema de elasticidade . . . . .	60
4.3 Método de diferenças finitas . . . . .	63
<b>5 Alguns resultados numéricos</b>	<b>67</b>
5.1 Introdução . . . . .	67
5.2 Equação de Poisson . . . . .	67
5.2.1 Condição de Dirichlet . . . . .	67
5.2.2 Condição de Neumann . . . . .	73

5.3 Problema de elasticidade . . . . .	76
<b>Bibliografia</b>	<b>81</b>

# Capítulo 1

## Alguns resultados em problemas variacionais

### 1.1 Introdução

A análise da estabilidade dos métodos de diferenças finitas que nos propomos estudar neste trabalho é baseada em desigualdades para a estabilidade de formas bilineares adequadas, que estão associadas a tais métodos. Atendendo a este facto, neste capítulo introduzimos alguns conceitos e estudamos alguns resultados fundamentais que nos permitem concluir desigualdades para a estabilidade de formas bilineares abstractas definidas em espaços de Hilbert (desigualdade (1.47)) e que foram apresentados em [9].

Assim, na Secção 1.2 introduzimos os conceitos básicos associados a formas bilineares: continuidade, elipticidade, coersividade. Estudamos alguns resultados de existência e unicidade para a solução de problemas variacionais.

Na Secção 1.3, concretizamos alguns dos resultados apresentados na secção anterior para problemas variacionais associados a problemas diferenciais fortemente elípticos. Consideramos condições de fronteira de Dirichlet homogéneas e não homogéneas e ainda as condições de fronteira ditas "naturais".

Finalmente, na Secção 1.4, estudamos alguns resultados de convergência para a solução de Ritz-Galerkin tendo por hipótese a condição de estabilidade da forma bilinear (condição (1.36)). A finalizar este capítulo, mostramos no Teorema 1.23 que a desigualdade para a estabilidade (1.47) é válida mediante certas condições entre as quais destacamos a existência de uma solução única do problema variacional homogéneo e a coersividade da forma bilinear.



## 1.2 Formas bilineares

Seja  $V$  um espaço de Hilbert real relativamente ao produto interno  $(\cdot, \cdot)_V$  e denotemos por  $\|\cdot\|_V$  a norma induzida por este produto interno. Prova-se que o espaço dual de  $V$ ,  $V'$ , é um espaço de Banach para a norma

$$\|v'\|_{V'} = \sup_{\substack{v \in V \\ \|v\|_V=1}} | \langle v', v \rangle_{V' \times V} |, \quad (1.1)$$

em que  $\langle v', v \rangle_{V' \times V}$  denota a imagem de  $v$  por  $v'$ .

No espaço dos operadores lineares definidos de  $V$  em  $V'$ ,  $L(V, V')$ , consideramos a norma

$$\|A\|_{V' \leftarrow V} = \sup_{\substack{v \in V \\ \|v\|_V=1}} \|Av\|_{V'}. \quad (1.2)$$

**Definição 1.1** *A forma bilinear  $a(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  diz-se contínua (ou limitada) se existe uma constante  $C_L > 0$ , tal que*

$$|a(v, w)| \leq C_L \|v\|_V \|w\|_V, \quad \forall v, w \in V. \quad (1.3)$$

**Proposição 1.2** *Uma forma bilinear  $a(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua se e só se existe  $A \in L(V, V')$ , único, tal que*

$$a(v, w) = \langle Av, w \rangle_{V' \times V}, \quad \forall v, w \in V \quad (1.4)$$

e

$$\|A\|_{V' \leftarrow V} \leq C_L. \quad (1.5)$$

**Demonstração:** Seja  $v \in V$ . Se  $a(\cdot, \cdot)$  é contínua então a funcional linear  $\varphi_v \in V'$  definida por

$$\varphi_v(w) = a(v, w), \quad w \in V,$$

é limitada. De facto

$$\|\varphi_v\|_{V'} = \sup_{\substack{w \in V \\ \|w\|_V=1}} |\varphi_v(w)| \leq C_L \|v\|_V.$$

O operador  $A : V \rightarrow V'$  definido por  $Av = \varphi_v$  é linear e satisfaz

$$\|A\|_{V' \leftarrow V} = \sup_{\substack{v \in V \\ \|v\|_V=1}} \|Av\|_{V'} \leq C_L.$$

Reciprocamente, se  $A \in L(V, V')$ , então  $a(.,.) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$a(v, w) = \langle Av, w \rangle_{V' \times V},$$

é uma forma bilinear que verifica

$$|a(v, w)| \leq \|Av\|_{V'} \|w\|_V \leq \|A\|_{V' \leftarrow V} \|v\|_V \|w\|_V, \quad \forall v, w \in V.$$

■

Dizemos que  $A$  é o operador associado à forma bilinear contínua  $a(.,.)$ .  
Seja  $a^*(.,.)$  a forma bilinear adjunta de  $a(.,.)$ , isto é,

$$a^*(v, w) = a(w, v), \quad \forall v, w \in V.$$

Verifica-se facilmente que o operador dual de  $A$ ,  $A'$ , está associado a  $a^*(.,.)$ .

Sejam  $a(.,.)$  uma forma bilinear contínua definida de  $V \times V$  em  $\mathbb{R}$  e  $f \in V'$ . Consideremos o seguinte problema

$$\text{determinar } u \in V \text{ tal que } a(u, v) = f(v), \text{ para todo } v \in V, \quad (1.6)$$

designado por problema variacional. Pela Proposição 1.2, o problema (1.6) é equivalente a

$$\text{determinar } u \in V \text{ tal que } \langle Au - f, v \rangle_{V' \times V} = 0, \text{ para todo } v \in V, \quad (1.7)$$

ou ainda,

$$\text{determinar } u \in V \text{ tal que } Au = f \text{ em } V'. \quad (1.8)$$

Deste modo, averiguar se o problema (1.6) tem solução única é equivalente a verificar a existência do inverso do operador definido na demonstração da Proposição 1.2. O resultado seguinte estabelece uma condição necessária e suficiente para que (1.6) tenha solução única.

**Proposição 1.3** *Seja  $A \in L(V, V')$  o operador associado à forma bilinear contínua  $a(.,.)$ . As seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i) *existe  $A^{-1}$  e  $A^{-1} \in L(V', V)$ ;*
- (ii) *existem  $\epsilon, \epsilon' > 0$  tais que*

$$\inf\{\sup\{|a(v, w)| : w \in V, \|w\|_V = 1\} : v \in V, \|v\|_V = 1\} = \epsilon > 0, \quad (a)$$

$$\inf\{\sup\{|a(v, w)| : v \in V, \|v\|_V = 1\} : w \in V, \|w\|_V = 1\} = \epsilon' > 0. \quad (b)$$

(1.9)

**Demonstração:** Suponhamos que existe  $A^{-1} \in L(V', V)$ . Então

$$\begin{aligned}
\inf_{\substack{v \in V \\ \|v\|_V=1}} \sup_{\substack{w \in V \\ \|w\|_V=1}} |a(v, w)| &= \inf_{\substack{v \in V \\ v \neq 0}} \sup_{\substack{w \in V \\ w \neq 0}} \frac{|\langle Av, w \rangle_{V' \times V}|}{\|v\|_V \|w\|_V} \\
&= \inf_{\substack{v' \in V' \\ v' \neq 0}} \sup_{\substack{w \in V \\ w \neq 0}} \frac{|\langle AA^{-1}v', w \rangle_{V' \times V}|}{\|A^{-1}v'\|_V \|w\|_V} \\
&= \inf_{\substack{v' \in V' \\ v' \neq 0}} \frac{1}{\|A^{-1}v'\|_V} \sup_{\substack{w \in V \\ w \neq 0}} \frac{|\langle v', w \rangle_{V' \times V}|}{\|w\|_V} \\
&= \inf_{\substack{v' \in V' \\ v' \neq 0}} \frac{\|v'\|_{V'}}{\|A^{-1}v'\|_V} \\
&= 1/\|A^{-1}\|_{V \leftarrow V'},
\end{aligned}$$

logo vale (1.9a) com  $\epsilon = 1/\|A^{-1}\|_{V \leftarrow V'}$ . Da mesma forma se prova (1.9b) com  $\epsilon' = 1/\|A'^{-1}\|_{V \leftarrow V'}$ .

Provemos agora a implicação contrária. De (1.9a) vem

$$\sup\{|a(v, w)| : w \in V, \|w\|_V = 1\} \geq \epsilon \|v\|_V, \quad \forall v \in V,$$

ou seja,

$$\|Av\|_{V'} \geq \epsilon \|v\|_V, \quad \forall v \in V. \quad (1.10)$$

Assim,  $Av$  é a funcional linear nula se e só se  $v = 0$  e portanto  $A : V \rightarrow V'$  é injectivo. Com o objectivo de provar que  $A$  é sobrejectivo, mostremos que

$$Z = \{Av : v \in V\} \subset V'$$

é fechado.

Seja  $\{z_n\}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) uma sucessão em  $Z$  tal que  $\|z^* - z_n\|_{V'} \rightarrow 0$ . Provemos que  $z^* \in Z$ . Se  $z_n, z_m \in Z$ , então existem  $v_n, v_m \in V$  tais que  $Av_n = z_n$  e  $Av_m = z_m$ . De (1.10) temos

$$\|v_m - v_n\|_V \leq \|z_m - z_n\|_{V'}/\epsilon.$$

Atendendo a que  $\{z_n\}$  é uma sucessão de Cauchy então existe  $v^* \in V$  tal que  $v_n \rightarrow v^*$  e, deste modo,  $z_n = Av_n \rightarrow z^*$ , pois  $A$  é contínuo. Logo concluímos que  $Z$  é fechado.

Consideremos a decomposição de  $V'$  em  $Z \oplus Z^\perp$ , em que<sup>1</sup>

$$Z^\perp = \{x \in V' : (x, z)_{V'} = 0, \forall z \in Z\}.$$

---

<sup>1</sup> $V'$  é um espaço de Hilbert com produto interno  $(v', w')_{V'} = (J_V^{-1}v', J_V^{-1}w')_V$  em que  $J_V \in L(V, V')$  é o isomorfismo de Riesz.

Suponhamos que  $A$  não é sobrejectivo. Então existe  $0 \neq w' \in Z^\perp$  e, pelo Teorema da Representação de Riesz, existe  $v_1 \in V$  que verifica

$$\langle w', v \rangle_{V' \times V} = (v_1, v)_V, \quad \forall v \in V.$$

De igual modo, para  $v \in V$  existe  $v_2 \in V$  tal que

$$\langle Av, u \rangle_{V' \times V} = (v_2, u)_V, \quad \forall u \in V.$$

Seja  $u = v_1$ . Vem

$$\langle Av, v_1 \rangle_{V' \times V} = (v_2, v_1)_V,$$

e portanto

$$a(v, v_1) = \langle Av, v_1 \rangle_{V' \times V} = (v_2, v_1)_V = (Av, w')_{V'} = 0, \quad \forall v \in V,$$

o que contradiz (1.9b). ■

Como consequência do resultado anterior, se vale (1.9) então o problema (1.6) tem uma única solução. O teorema seguinte estabelece esta conclusão.

**Teorema 1.4** *Se a forma bilinear contínua  $a(.,.)$  satisfaz (1.9), então (1.6) tem uma única solução  $u = A^{-1}f$  que verifica  $\|u\|_V \leq \frac{1}{\epsilon} \|f\|_{V'}$ .* ■

**Definição 1.5** *Uma forma bilinear  $a(.,.)$  definida de  $V \times V$  em  $\mathbb{R}$  diz-se  $V$ -elíptica se é contínua e se existe uma constante <sup>2</sup>  $C_E > 0$  tal que*

$$a(v, v) \geq C_E \|v\|_V^2, \quad \forall v \in V. \quad (1.11)$$

A condição de elipticidade (1.11) é uma condição mais forte do que a condição de estabilidade (1.9), no sentido em que se  $a(.,.)$  verifica (1.11) então verifica (1.9). Mais ainda, atendendo ao Teorema 1.4, vale o resultado seguinte.

**Teorema 1.6** *Se  $a(.,.)$  é  $V$ -elíptica então (1.6) tem uma única solução.*

**Demonstração:** Seja  $v \in V$ , com  $\|v\|_V = 1$ . Então

$$\sup\{|a(v, w)| : w \in V, \|w\|_V = 1\} \geq |a(v, v)| \geq C_E,$$

e portanto concluímos (1.9a) com  $\epsilon \geq C_E$ . Analogamente obtemos (1.9b) com  $\epsilon' \geq C_E$ . ■

Vejamos seguidamente uma condição mais fraca do que a condição de elipticidade (1.11).

<sup>2</sup>A  $C_E$  chamamos constante de elipticidade.

**Definição 1.7** *Sejam  $U$  e  $V$  espaços de Hilbert tais que  $V$  tem mergulho compacto em  $U$ . A forma bilinear  $a(.,.)$  diz-se  $V$ -coerciva se é contínua em  $V \times V$  e se existem  $C_E > 0$  e  $C_K \in \mathbb{R}$  tais que*

$$a(v, v) \geq C_E \|v\|_V^2 - C_K \|v\|_U^2, \quad \forall v \in V. \quad (1.12)$$

O Teorema da Representação de Riesz define uma isometria entre o espaço de Hilbert  $U$  e o seu dual  $U'$ ,  $I : U \rightarrow U'$ . Deste modo,  $U$  e  $U'$  podem ser identificados. Assim, se  $V \subset U$ , então  $V \subset U \subset V'$ .

**Proposição 1.8** *Sejam  $U$  e  $V$  espaços de Hilbert tais que  $V$  tem mergulho compacto em  $U$ .*

(a) *Se  $a(.,.)$  é uma forma bilinear  $V$ -coerciva então a forma bilinear  $\tilde{a}(.,.)$ ,*

$$\tilde{a}(v, w) = a(v, w) + C_K(v, w)_U, \quad \forall v, w \in V,$$

*com  $C_K$  da Definição 1.7, é  $V$ -elíptica.*

(b) *Se  $A \in L(V, V')$  é o operador associado a  $a(.,.)$  então  $\tilde{A} = A + C_K I$  é o operador associado a  $\tilde{a}(.,.)$ .*

**Demonstração:** (a) Como  $a(.,.)$  é  $V$ -coerciva então

$$\begin{aligned} \tilde{a}(v, v) &= a(v, v) + C_K(v, v)_U \\ &\geq C_E \|v\|_V^2 - C_K \|v\|_U^2 + C_K(v, v)_U \\ &= C_E \|v\|_V^2, \quad \forall v \in V, \end{aligned}$$

logo  $\tilde{a}(.,.)$  é  $V$ -elíptica.

(b) Notemos que

$$\langle Iv, w \rangle_{U' \times U} = (v, w)_U, \quad \forall v, w \in U,$$

e, como  $V \subset U \subset V'$ , então

$$\langle Iv, w \rangle_{U' \times U} = \langle Iv, w \rangle_{V' \times V}, \quad \forall v, w \in V.$$

Logo

$$(v, w)_U = \langle Iv, w \rangle_{V' \times V}, \quad \forall v, w \in V,$$

o que nos permite concluir o pretendido. ■

Da Proposição 1.8, juntamente com a Teoria de Riesz-Schauder (Teorema 6.4.12 de [9]), obtemos o resultado que se segue.

**Teorema 1.9** *Sejam  $U$  e  $V$  espaços de Hilbert tais que  $V$  tem mergulho compacto em  $U$ ,  $a(\cdot, \cdot)$  uma forma bilinear de  $V \times V$  em  $\mathbb{R}$ ,  $V$ -coerciva e  $A$  o operador que lhe está associado.*

*Para cada  $\lambda \in \mathbb{C}$ , tem-se apenas uma das seguintes afirmações:*

$$(i) (A - \lambda I)^{-1} \in L(V', V), (A' - \bar{\lambda}I)^{-1} \in L(V', V);$$

(ii)  $\lambda$  é valor próprio de  $A$ .

*Se  $\lambda$  é valor próprio de  $A$ ,  $Av - \lambda Iv = f, f \in V'$ , tem pelo menos uma solução se e só se  $f \perp E'(\lambda)$ .<sup>3</sup>*

**Demonstração:** Pela Proposição 1.8 temos

$$(A + C_K I) \in L(V, V') \text{ e } (A + C_K I)^{-1} \in L(V', V),$$

e, assim, a aplicação  $K = (A + C_K I)^{-1} I : V \rightarrow V$  está bem definida.

Para  $\mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  obtemos

$$\begin{aligned} K - \mu I = -\mu(I - \mu^{-1}K) &= -\mu(A + C_K I)^{-1}\{A + C_K I - \mu^{-1}I\} \\ &= -\mu(A + C_K I)^{-1}(A - \lambda I), \end{aligned}$$

com  $\lambda = \frac{1}{\mu} - C_K$ .

Como aplicação  $K$  é compacta, a Teoria de Riesz-Schauder pode ser aplicada a  $K - \mu I$ . Atendendo a

$$A - \lambda I = -\mu^{-1}(A + C_K I)(K - \mu I),$$

concluimos o pretendido. ■

Notemos que nas condições do Teorema 1.9, se 0 não é valor próprio de  $A$ , então o problema (1.6) tem solução única.

No que se segue consideramos os espaços  $H_0^s(\Omega)$  e  $H^s(\Omega)$ ,  $s \geq 0$ , que têm mergulhos em  $L^2(\Omega)$ .

Denotamos por  $\|\cdot\|_s$  a norma usual no espaço  $H^s(\Omega)$  e por  $\|\cdot\|_{-s}$  a norma no espaço  $(H^s(\Omega))'$ ,  $s \geq 0$ .

---

<sup>3</sup> $E'(\lambda)$  representa o núcleo de  $A' - \bar{\lambda}I$ .

### 1.3 Alguns problemas variacionais

Seja  $\Omega$  um subconjunto aberto de  $\mathbb{R}^n$ , limitado, com fronteira  $\Gamma$  de Lipschitz e seja  $L$  o operador diferencial

$$Lu = \sum_{|\alpha| \leq m} \sum_{|\beta| \leq m} (-1)^{|\beta|} D^\beta (a_{\alpha\beta} D^\alpha u), \quad u \in C^{2m}(\Omega), \quad (1.13)$$

em que, para  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in \mathbb{N}_0^n$  e  $|\xi| = \sum_{i=1}^n \xi_i$ ,

$$D^\xi = \frac{\partial^{|\xi|}}{\partial x_1^{\xi_1} \partial x_2^{\xi_2} \dots \partial x_n^{\xi_n}}. \quad (1.14)$$

**Definição 1.10** *O operador diferencial  $L$  diz-se uniformemente elíptico em  $\Omega$  se existe  $\epsilon > 0$ , tal que*

$$\sum_{|\alpha|=|\beta|=m} a_{\alpha\beta}(x) \xi^{\alpha+\beta} \geq \epsilon |\xi|^{2m}, \quad \forall x \in \Omega, \xi \in \mathbb{R}^n. \quad (1.15)$$

No caso de termos apenas  $a_{\alpha\beta} \in L^\infty(\bar{\Omega})$  deveremos substituir "para todo  $x \in \Omega$ " por "quase por toda a parte de  $\Omega$ ".

Seja  $g$  uma função definida em  $\Omega$ . Consideremos o problema diferencial

$$Lu = g \text{ em } \Omega. \quad (1.16)$$

O problema anterior pode ser complementado com vários tipos de condições de fronteira, estando intrinsecamente relacionados com estas últimas, diferentes problemas variacionais que estudamos seguidamente.

Consideremos então o problema (1.16) com as seguintes condições de fronteira - designadas condições de fronteira de Dirichlet homogéneas -

$$u = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0, \quad \left(\frac{\partial}{\partial \eta}\right)^2 u = 0, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial \eta}\right)^{m-1} u = 0 \text{ em } \Gamma, \quad (1.17)$$

em que  $\frac{\partial}{\partial \eta}$  representa a derivada segundo a normal unitária exterior a  $\Gamma$ .

Sejam  $a(\cdot, \cdot)$  a forma bilinear definida de  $H_0^m(\Omega) \times H_0^m(\Omega)$  em  $\mathbb{R}$

$$a(u, v) = \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq m} \int_{\Omega} a_{\alpha\beta} D^\alpha u D^\beta v \, dx \quad (1.18)$$

e  $f$  a funcional linear

$$f(v) = \int_{\Omega} g v \, dx. \quad (1.19)$$

Atendendo a que, para  $u \in C^{2m}(\Omega) \cap H_0^m(\Omega)$ , se tem

$$\begin{aligned} (Lu, v)_0 &= \sum_{|\alpha| \leq m} \sum_{|\beta| \leq m} (-1)^{|\beta|} \int_{\Omega} D^{\beta}(a_{\alpha\beta} D^{\alpha} u) v \, dx \\ &= \sum_{|\alpha| \leq m} \sum_{|\beta| \leq m} \int_{\Omega} a_{\alpha\beta} D^{\alpha} u D^{\beta} v \, dx, \end{aligned}$$

associamos ao problema diferencial (1.16), (1.17), o seguinte problema variacional

determinar  $u \in H_0^m(\Omega)$  tal que

$$a(u, v) = f(v), \quad \text{para todo } v \in H_0^m(\Omega). \quad (1.20)$$

Observamos que a solução de (1.20), designada solução fraca do problema diferencial (1.16), (1.17), pertence a  $H_0^m(\Omega)$  mas não necessariamente a  $C^{2m}(\Omega)$ .

Seguidamente estudamos algumas propriedades da forma bilinear  $a(.,.)$ .

**Teorema 1.11** *Se  $a_{\alpha\beta} \in L^{\infty}(\Omega)$  então a forma bilinear definida por (1.18) é limitada em  $H_0^m(\Omega) \times H_0^m(\Omega)$ .*

**Demonstração:** Atendendo a que existe  $C > 0$  tal que

$$|a(u, v)| \leq \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq m} \|a_{\alpha\beta}\|_{L^{\infty}(\Omega)} \|D^{\alpha} u\|_0 \|D^{\beta} v\|_0 \leq C \|u\|_m \|v\|_m, \quad \forall u, v \in H_0^m(\Omega),$$

concluimos o pretendido. ■

Vejamos seguidamente em que condições a forma bilinear  $a(.,.)$  é  $H_0^1(\Omega)$ -elíptica.

Notemos que em  $H_0^1(\Omega)$ ,  $\|\cdot\|_1$  e  $|\cdot|_1$ , com

$$|v|_1 = \sqrt{\sum_{|\alpha|=1} \|D^{\alpha} v\|_0^2}, \quad v \in H_0^1(\Omega), \quad (1.21)$$

são normas equivalentes. Logo existe  $C_{\Omega} > 0$  tal que

$$|v|_1^2 \geq C_{\Omega} \|v\|_1^2, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (1.22)$$



**Teorema 1.12** *Sejam  $\Omega$  limitado,  $m = 1$  e  $a_{\alpha\beta} \in L^\infty(\Omega)$ . Se  $L$  é uniformemente elíptico e é igual à sua parte principal <sup>4</sup>  $L_0$ , então  $a(\cdot, \cdot)$  é  $H_0^1(\Omega)$ -elíptica.*

**Demonstração:** Seja, em (1.15),  $\xi = \nabla v(x)$ . Vem

$$\sum_{|\alpha|, |\beta|=1} a_{\alpha\beta}(x) [\nabla v(x)]^{\alpha+\beta} = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial v}{\partial x_i}(x) \frac{\partial v}{\partial x_j}(x) \geq \epsilon |\nabla v(x)|^2,$$

e portanto

$$a(v, v) \geq \epsilon \int_{\Omega} |\nabla v(x)|^2 dx.$$

Atendendo a (1.22), obtemos

$$\int_{\Omega} |\nabla v(x)|^2 dx \geq C_{\Omega} \|v\|_1^2.$$

Logo  $a(\cdot, \cdot)$  é  $H_0^1(\Omega)$ -elíptica com constante de elipticidade  $C_E = \epsilon C_{\Omega}$ . ■

Nas condições deste teorema, o problema variacional (1.20) tem uma única solução. Na verdade, pelo Teorema 1.6, concluímos o seguinte resultado.

**Teorema 1.13** *Seja  $a(\cdot, \cdot)$  uma forma bilinear  $H_0^m(\Omega)$ -elíptica com constante de elipticidade  $C_E$ . Então existe uma única solução do problema (1.20) que satisfaz*

$$\|u\|_m \leq \frac{1}{C_E} \|f\|_{-m}.$$

■

**Teorema 1.14** *Seja  $\Omega$  um conjunto limitado. Se  $m = 1$ ,  $a_{\alpha\beta} \in L^\infty(\Omega)$  e  $L$  é uniformemente elíptico, então  $a(\cdot, \cdot)$  é  $H_0^1(\Omega)$ -coerciva.*

**Demonstração:** Consideremos a decomposição  $a(\cdot, \cdot) = a'(\cdot, \cdot) + a''(\cdot, \cdot)$  em que

$$a'(u, v) = \sum_{|\alpha|=|\beta|=1} \int_{\Omega} a_{\alpha\beta}(x) D^{\alpha} u(x) D^{\beta} v(x) dx$$

e

$$a''(u, v) = \sum_{\substack{|\alpha|, |\beta| \leq 1 \\ |\alpha| + |\beta| \leq 1}} \int_{\Omega} a_{\alpha\beta}(x) D^{\alpha} u(x) D^{\beta} v(x) dx.$$

---

<sup>4</sup>A parte principal de  $L$  é  $L_0 = (-1)^m \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} D^{\beta} a_{\alpha\beta} D^{\alpha}$ .

Atendendo aos Teoremas 1.11 e 1.12, as formas bilineares anteriores são, respectivamente,  $H_0^1(\Omega)$ -elíptica e limitada. Sejam  $C'_E$  a constante de elipticidade de  $a'(\cdot, \cdot)$  e  $C''_L > 0$  tal que

$$a''(v, v) \geq -C''_L \|v\|_1^2, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (1.23)$$

Conjugando (1.22) e  $|v|_1^2 \leq \|v\|_1^2$ , concluímos que  $0 < C_\Omega < 1$ . Logo existe  $C > 0$  tal que

$$\|v\|_1 \leq C \|v\|_0 + C_\Omega \|v\|_1,$$

e portanto

$$\left(\frac{C}{1-C_\Omega}\right)^2 \|v\|_0^2 \geq \|v\|_1^2, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (1.24)$$

De (1.23) e (1.24) deduzimos a desigualdade

$$a''(v, v) \geq -C''_L \left(\frac{C}{1-C_\Omega}\right)^2 \|v\|_0^2, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (1.25)$$

Finalmente, atendendo à elipticidade de  $a'(\cdot, \cdot)$  e a (1.25), vem

$$a(v, v) \geq C'_E \|v\|_1^2 - C''_L \left(\frac{C}{1-C_\Omega}\right)^2 \|v\|_0^2, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

o que prova o pretendido. ■

Vejamos seguidamente um resultado de existência e unicidade de solução de (1.20) quando a forma bilinear é  $H_0^m(\Omega)$ -coerciva.

**Teorema 1.15** *Seja  $\Omega$  limitado e  $a(\cdot, \cdot)$  uma forma bilinear  $H_0^m(\Omega)$ -coerciva. Então tem-se apenas uma das seguintes alternativas:*

- (i) O problema (1.20) tem uma única solução  $u \in H_0^m(\Omega)$ ;
- (ii) Existem  $e, e^* \in H_0^m(\Omega)$  não nulos tais que

$$a(e, v) = 0, \quad a(v, e^*) = 0, \quad \forall v \in H_0^m(\Omega).$$

**Demonstração:** Como  $H_0^m(\Omega)$  tem mergulho compacto em  $L^2(\Omega)$  então o Teorema 1.9 é aplicado. ■

Estabelecemos alguns resultados que caracterizam a forma bilinear  $a(\cdot, \cdot)$  associada ao operador  $L$  considerando as condições de fronteira homogêneas (1.17). Seguidamente consideremos essas condições substituídas por

$$u = \varphi \text{ em } \Gamma \quad (1.26)$$

e o operador  $L$  definido por (1.13) com,  $m = 1$ .

Seja  $a(\cdot, \cdot)$  a forma bilinear (1.18), com  $m = 1$ , definida de  $H^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$  em  $\mathbb{R}$ .

Associado ao problema diferencial (1.16), (1.26), consideremos o seguinte problema variacional

$$\begin{aligned} &\text{determinar } u \in H^1(\Omega) \text{ tal que } u = \varphi \text{ em } \Gamma \text{ e} \\ &a(u, v) = f(v), \text{ para todo } v \in H_0^1(\Omega). \end{aligned} \quad (1.27)$$

Observamos que se existe  $u_0 \in H^1(\Omega)$  tal que  $u_0|_{\Gamma} = \varphi$  (em que  $u_0|_{\Gamma}$  denota o traço de  $u_0$ ), então o problema variacional (1.27) é equivalente a

$$\begin{aligned} &\text{determinar } u^* \in H_0^1(\Omega) \text{ tal que} \\ &a(u^*, v) = f(v) - a(u_0, v), \text{ para todo } v \in H_0^1(\Omega). \end{aligned} \quad (1.28)$$

De facto, se  $u^* \in H_0^1(\Omega)$  é solução de (1.28) então  $u = u_0 + u^*$  é solução de (1.27). Reciprocamente, se  $u$  é solução de (1.27) então  $u_0 = u$  e  $u^* = 0$  satisfazem (1.28).

Desta forma concluímos o resultado seguinte.

**Teorema 1.16** *Se o problema (1.20) tem solução única para todo  $f \in (H^1(\Omega))'$  então o problema (1.27) tem solução única se e só se existe  $u_0 \in H^1(\Omega)$  tal que  $u_0|_{\Gamma} = \varphi$ .*

■

Consideremos finalmente o problema diferencial (1.16) com condição de fronteira

$$Bu = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \eta_j + \sum_{i=1}^n a_{0i} u \eta_i = \varphi \text{ em } \Gamma, \quad (1.29)$$

em que  $\eta_j, j = 1, \dots, n$ , são as componentes da normal unitária exterior a  $\Gamma$ .

Seja  $a(\cdot, \cdot)$  a forma bilinear (1.18), definida de  $H^m(\Omega) \times H^m(\Omega)$  em  $\mathbb{R}$ , e seja

$$f(v) = \int_{\Omega} g(x)v(x) dx + \int_{\Gamma} \varphi(x)v(x) d\Gamma. \quad (1.30)$$

Atendendo a

$$(Lu, v)_0 = a(u, v) - \int_{\Gamma} (Bu)v d\Gamma,$$

então podemos associar ao problema diferencial (1.16), (1.29), o seguinte problema variacional

$$\text{determinar } u \in H^m(\Omega) \text{ tal que } a(u, v) = f(v), \text{ para todo } v \in H^m(\Omega). \quad (1.31)$$

A condição  $Bu = \varphi$  é chamada condição de fronteira natural.

**Teorema 1.17** *Se  $a_{\alpha\beta} \in L^\infty(\Omega)$  então a forma bilinear definida por (1.18) é limitada em  $H^m(\Omega) \times H^m(\Omega)$ .*

**Demonstração:** A demonstração deste teorema é análoga à do Teorema 1.11. ■

Para formas bilineares  $H^m(\Omega)$ -coercivas é válido o resultado seguinte.

**Teorema 1.18** *Sejam  $\Omega \in C^{0,1}$  limitado e  $a(\cdot, \cdot)$  uma forma bilinear  $H^m(\Omega)$ -coerciva. Então tem-se apenas uma das seguintes alternativas:*

- (i) *O problema (1.31) tem uma única solução  $u \in H^m(\Omega)$ ;*
- (ii) *Existem  $e, e^* \in H^m(\Omega)$  não nulos tais que*

$$a(e, v) = 0, a(v, e^*) = 0, \forall v \in H^m(\Omega).$$

**Demonstração:** Atendendo a que  $H^m(\Omega)$  tem mergulho compacto em  $L^2(\Omega)$  então o Teorema 1.9 é aplicado. ■

## 1.4 Resultados de convergência para a solução de Ritz-Galerkin

Consideremos o problema variacional

$$\text{determinar } u \in V \text{ tal que } a(u, v) = f(v), \text{ para todo } v \in V, \quad (1.32)$$

associado a um problema diferencial.

Seja  $V_N$  um espaço de dimensão finita tal que

$$V_N \subset V, \dim(V_N) = N, \quad (1.33)$$

e seja  $u_N \in V_N$  a solução do problema

$$\text{determinar } u_N \in V_N \text{ tal que } a(u_N, v) = f(v), \text{ para todo } v \in V_N. \quad (1.34)$$

A solução  $u_N$  é chamada solução de Ritz-Galerkin do problema (1.32).

No resultado seguinte é estabelecida uma condição necessária e suficiente para a existência da solução de Ritz-Galerkin.

**Teorema 1.19** *O problema (1.34) tem solução única  $u_N$  que satisfaz a estimativa*

$$\|u_N\|_V \leq \frac{1}{\epsilon_N} \|f\|_{V'_N} \leq \frac{1}{\epsilon_N} \|f\|_{V'}, \quad (1.35)$$

se e só se existe  $\epsilon_N > 0$  tal que

$$\inf\{\sup\{|a(v, w)| : w \in V_N, \|w\|_V = 1\} : v \in V_N, \|v\|_V = 1\} = \epsilon_N > 0. \quad (1.36)$$

**Demonstração:** Resulta imediatamente do Teorema 1.4, pois em espaços de dimensão finita (1.9a) e (1.9b) são equivalentes. ■

Vejam os seguidamente estimativas para o erro,  $u - u_N$ , em que  $u \in V$  é solução de (1.32) e  $u_N$  é a solução de Ritz-Galerkin.

**Teorema 1.20 (Céa)** *Seja  $a(\cdot, \cdot)$  uma forma bilinear contínua que verifica (1.36). Sejam  $u \in V$  e  $u_N \in V_N$  as soluções de (1.32) e (1.34), respectivamente. Então*

$$\|u - u_N\|_V \leq \left(1 + \frac{C_L}{\epsilon_N}\right) \inf_{w \in V_N} \|u - w\|_V. \quad (1.37)$$

**Demonstração:** Atendendo a que  $u$  e  $u_N$  são, respectivamente, as soluções de (1.32) e (1.34), vem

$$a(u_N - u, v) = 0, \quad \forall v \in V_N.$$

Assim, para  $v, w \in V_N$ , com  $\|v\|_V = 1$ , temos

$$a(u_N - w, v) = a([u_N - u] + [u - w], v) = a(u - w, v)$$

e, pela continuidade de  $a(\cdot, \cdot)$ , vem

$$|a(u_N - w, v)| \leq C_L \|u - w\|_V \|v\|_V = C_L \|u - w\|_V.$$

Atendendo a (1.36), obtemos

$$\|u_N - w\|_V \leq \frac{1}{\epsilon_N} \sup\{|a(u_N - w, v)| : v \in V_N, \|v\|_V = 1\} \leq \frac{C_L}{\epsilon_N} \|u - w\|_V,$$

e finalmente

$$\|u - u_N\|_V \leq \|u - w\|_V + \|w - u_N\|_V \leq \left(1 + \frac{C_L}{\epsilon_N}\right) \|u - w\|_V. \quad \blacksquare$$

No teorema anterior assumimos que o problema (1.32) tinha solução. Vamos agora estabelecer condições suficientes para a sua existência e unicidade.

**Teorema 1.21** *Seja  $V_i = V_{N_i} \subset V (i \in \mathbb{N})$  uma seqüência de subespaços tais que*

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} d(u, V_i) = 0, \quad \forall u \in V. \quad (1.38)$$

*Se  $a(\cdot, \cdot)$  é contínua e verifica (1.36) com  $\epsilon_i \geq \tilde{\epsilon} > 0$ , para todo  $i \in \mathbb{N}$ , então existe uma única solução do problema (1.32) e a solução de Ritz-Galerkin  $u_i = u_{N_i}$  satisfaz*

$$\|u - u_i\|_V \rightarrow 0, \quad \text{quando } i \rightarrow +\infty.$$

**Demonstração:** Provemos que  $Z = \{Av : v \in V\} \subset V'$ , sendo  $A : V \rightarrow V'$  o operador associado à forma bilinear  $a(\cdot, \cdot)$ , é fechado. Sejam  $\{f_n\}$  uma sucessão em  $Z$  convergente para  $f^*$  e  $u_n$  o objecto de  $f_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Atendendo a que

$$\|u_m - u_n\|_V \leq \|f_m - f_n\|_{V'} / \tilde{\epsilon}$$

então  $f_n$  é uma sucessão de Cauchy. Logo existe  $u^* \in V$  tal que  $u_n \rightarrow u^*$ . Pela continuidade de  $A$  vem que  $f^* = \lim f_n = \lim Au_n = Au^*$ , logo  $f^* \in Z$ . Deste modo concluímos que  $Z$  é fechado.

Provemos agora existência de solução de (1.32), ou seja que  $A$  é sobrejectivo. Façamos a demonstração por redução ao absurdo. Suponhamos que existe  $f \in Z^\perp$ , com  $\|f\|_{V'} = 1$ . Pelo Teorema da Representação de Riesz, existe  $-v_f \in V$  tal que  $f(v) = (-v_f, v)_V, \forall v \in V$ . Em particular  $f(v_f) = -(v_f, v_f)_V$ . Logo

$$f(v_f) = -(f, f)_{V'} = -1 \quad \text{e} \quad a(w, v_f) = \langle Aw, v_f \rangle_{V' \times V} = 0, \quad \forall w \in V.$$

Sejam  $u_i \in V_i, (i \in \mathbb{N})$  as soluções de Ritz-Galerkin. Então  $a(u_i, v_f) = 0$ , isto é,

$$a(u_i, v_f) - f(v_f) = 1.$$

Decompondo  $v_f$  em  $v_i + t_i$ , com  $v_i \in V_i$ , por (1.38) podemos garantir que  $\|t_i\|_V \rightarrow 0$ , quando  $i \rightarrow \infty$ . Logo

$$\begin{aligned} 1 &= a(u_i, v_f) - f(v_f) = a(u_i, v_i) - f(v_i) + a(u_i, t_i) - f(t_i) \\ &= a(u_i, t_i) - f(t_i) \end{aligned}$$

e

$$1 = |a(u_i, t_i) - f(t_i)| \leq [C_L \|u_i\|_V + \|f\|_{V'}] \|t_i\|_V.$$

Como  $\|u_i\|_V \leq \|f\|_{V'} / \tilde{\epsilon}$  e  $\|t_i\|_V \rightarrow 0$ , obtemos uma contradição. Logo  $A$  é sobrejectivo. Assim para cada  $f \in V'$  existe  $u \in V$  que é solução de (1.32).

Atendendo ao Teorema de Céa, deduzimos que

$$\|u - u_i\|_V \leq (1 + \frac{C_L}{\epsilon_{N_i}}) d(u, V_i) \rightarrow 0,$$

e, como a solução  $u_i$  de (1.34) é única para todo  $i \in \mathbb{N}$ , então da convergência anterior concluímos a unicidade da solução  $u$ . ■

A condição (1.36) tem um papel fundamental nos resultados anteriores. É fácil verificar que a referida condição é válida quando a forma bilinear é elíptica. Nos resultados seguintes provamos que a condição (1.36) também é válida para formas bilineares coercivas.

Sejam  $U$  e  $V$  espaços de Hilbert tais que  $V$  tem mergulho compacto em  $U$ . Para  $\lambda \in \mathbb{C}$  seja  $a_\lambda(.,.)$  a forma bilinear

$$a_\lambda(u, v) : V \times V \rightarrow \mathbb{C}, \quad a_\lambda(u, v) = a(u, v) - \lambda(u, v)_U, \quad (1.39)$$

e sejam

$$\omega(\lambda) = \inf_{\substack{u \in V \\ \|u\|_V=1}} \sup_{\substack{v \in V \\ \|v\|_V=1}} |a_\lambda(u, v)|, \quad (1.40)$$

$$\omega_i(\lambda) = \inf_{\substack{u \in V_i \\ \|u\|_V=1}} \sup_{\substack{v \in V_i \\ \|v\|_V=1}} |a_\lambda(u, v)|. \quad (1.41)$$

**Proposição 1.22** *Sejam  $\Lambda \subset \mathbb{C}$  um conjunto compacto e  $a(.,.)$  uma forma bilinear  $V$ -coerciva. Se a sequência de subespaços  $V_i$  verifica (1.38) então existem constantes  $C > 0$  e  $\eta(i) > 0$ , independentes de  $\lambda \in \Lambda$ , com  $\lim_{i \rightarrow +\infty} \eta(i) = 0$ , tais que*

$$\omega_i(\lambda) \geq C\omega(\lambda) - \eta(i). \quad (1.42)$$

**Demonstração:** Consideremos os operadores  $Z(\lambda) : V \rightarrow V$  e  $Z_i(\lambda) : V \rightarrow V_i$  definidos por

$$z = Z(\lambda)u \text{ é a solução de } a_\mu(z, v) = (\lambda - \mu)(u, v)_U, \quad \forall v \in V,$$

$$z_i = Z_i(\lambda)u \text{ é a solução de } a_\mu(z_i, v) = (\lambda - \mu)(u, v)_U, \quad \forall v \in V_i,$$

$u \in V$  e com  $\mu = -C_K$  ( $C_K$  da Definição 1.7).

Atendendo a que se tem

$$\begin{aligned} a_\mu(u - z, v) &= a(u - z, v) - \mu(u - z, v)_U \\ &= a_\mu(u, v) - a_\mu(z, v) + (\lambda - \mu)(u, v)_U - (\lambda - \mu)(u, v)_U \\ &= a_\mu(u, v) - (\lambda - \mu)(u, v)_U \\ &= a_\lambda(u, v), \quad \forall v \in V, \end{aligned}$$

pela definição de  $\omega(\lambda)$ , vem

$$\omega(\lambda)\|u\|_V \leq \sup_{\substack{v \in V \\ \|v\|_V=1}} |a_\lambda(u, v)| = \sup_{\substack{v \in V \\ \|v\|_V=1}} |a_\mu(u - z, v)| \leq C_S \|u - z\|_V,$$

com  $C_S = \|A - \mu I\|_{V' \leftarrow V}$ .

Observamos que para  $u \in V$  e  $v_i \in V_i$ ,

$$a_\lambda(u, v_i) = a_\mu(u - z_i, v_i)$$

e portanto

$$\begin{aligned} \sup_{\substack{v_i \in V_i \\ \|v_i\|_V=1}} |a_\lambda(u_i, v_i)| &= \sup_{\substack{v_i \in V_i \\ \|v_i\|_V=1}} |a_\mu(u_i - z_i, v_i)| \geq C_E \|u_i - z_i\|_V \\ &\geq C_E [\|u_i - z\|_V - \|z - z_i\|_V] \\ &\geq C_E [C_S^{-1} \omega(\lambda) - \|Z(\lambda) - Z_i(\lambda)\|_{V \leftarrow V}] \|u_i\|_V. \end{aligned}$$

Assim,

$$\inf_{\substack{u_i \in V_i \\ \|u_i\|_V=1}} \sup_{\substack{v_i \in V_i \\ \|v_i\|_V=1}} |a_\lambda(u_i, v_i)| \geq C_E [C_S^{-1} \omega(\lambda) - \|Z(\lambda) - Z_i(\lambda)\|_{V \leftarrow V}],$$

ou seja

$$\omega_i(\lambda) \geq C_E C_S^{-1} \omega(\lambda) - C_E \|Z(\lambda) - Z_i(\lambda)\|_{V \leftarrow V}.$$

Se para,  $C = C_E C_S^{-1}$  e  $\eta(i) = C_E \sup_{\lambda \in \Lambda} \|Z(\lambda) - Z_{h_i}(\lambda)\|_{V \leftarrow V}$ , se tem

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} \sup_{\lambda \in \Lambda} \|Z(\lambda) - Z_i(\lambda)\|_{V \leftarrow V} = 0, \quad (1.43)$$

então (1.42) fica demonstrada. Provemos (1.43) por redução ao absurdo. Suponhamos que existem  $\epsilon > 0$ ,  $n_i > i$  tais que

$$\sup_{\lambda \in \Lambda} \|Z(\lambda) - Z_{n_i}(\lambda)\|_{V \leftarrow V} \geq \epsilon, \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Então existem  $u_{n_i} \in V$ ,  $\|u_{n_i}\| = 1$  e  $\lambda_{n_i}$  que verificam

$$\|[Z(\lambda_{n_i}) - Z_{n_i}(\lambda_{n_i})]u_{n_i}\|_V \geq \frac{\epsilon}{2}. \quad (1.44)$$

Atendendo a que  $\Lambda$  é compacto, existem  $\lambda_j \in \Lambda$ ,  $u_j \in V$ , com  $\lim \lambda_j = \lambda^*$  e  $\lim u_j = u^*$ . Pelo Teorema 1.21

$$\|[Z(\lambda^*) - Z_{n_j}(\lambda^*)]u^*\|_V \rightarrow 0.$$



Mas

$$\begin{aligned} & \| [Z(\lambda_j) - Z_{n_j}(\lambda_j)]u_j \|_V \\ & \leq \| [Z(\lambda_j) - Z(\lambda^*)]u_j \|_V + \| [Z_{n_j}(\lambda_j) - Z_{n_j}(\lambda^*)]u_j \|_V \\ & \quad + \| Z(\lambda^*)[u_j - u^*] \|_V + \| Z_{n_j}(\lambda^*)[u_j - u^*] \|_V \\ & \quad + \| [Z(\lambda^*) - Z_{n_j}(\lambda^*)]u^* \|_V \rightarrow 0, \end{aligned}$$

o que é uma contradição com (1.44). ■

Introduzimos seguidamente o conceito de valor próprio e vector próprio de uma forma bilinear.

Seja  $\lambda \in \mathbb{C}$  tal que existe  $e \in V$ ,  $e \neq 0$ , que verifica

$$a(e, v) = \lambda(e, v)_U, \quad \forall v \in V. \quad (1.45)$$

A  $\lambda$  chamamos valor próprio de  $a(\cdot, \cdot)$  e a  $e$  função própria associada a  $\lambda$ .

Atendendo ao conceito anterior, facilmente verificamos que  $\lambda$  é um valor próprio de  $a(\cdot, \cdot)$  se e só se  $\omega(\lambda) = 0$ .

Estamos agora em condições de provar o resultado seguinte.

**Teorema 1.23** *Seja  $a(\cdot, \cdot)$  uma forma bilinear  $V$ -coerciva, em que  $V$  é um espaço de Hilbert com mergulho compacto em  $U$ . Se o problema (1.32) homogéneo tem solução única e (1.38) se verifica para os subespaços  $V_i \subset V$  então, para  $i$  suficientemente grande, a condição de estabilidade*

$$\inf\{\sup\{|a(u, v)| : v \in V_i, \|v\|_V = 1\} : u \in V_i, \|u\|_V = 1\} = \epsilon_i, \quad (1.46)$$

é satisfeita com  $\epsilon_i \geq \epsilon > 0$ .

**Demonstração:** Como o problema homogéneo tem solução única então  $\lambda = 0$  não é um valor próprio, logo  $\omega(0) > 0$ . Pela Proposição anterior, para  $i$  suficientemente grande, temos

$$\epsilon_i = \omega_i(0) \geq \epsilon,$$

com  $\epsilon = \frac{1}{2}C\omega(0) > 0$ . ■

Nas condições do Teorema 1.23, podemos garantir a existência de uma constante  $C = \frac{1}{\epsilon}$  tal que

$$\|u\|_V \leq C \sup_{0 \neq v \in V_i} \frac{|a(u, v)|}{\|v\|_V}, \quad \forall u \in V_i. \quad (1.47)$$

Logo, tendo por hipóteses a condição de "aproximação" para os espaços  $V_i$ , a unicidade de solução do problema homogêneo  $a(u, v) = 0, \forall v \in V$ , e a coercividade da forma bilinear  $a(., .)$ , concluímos a desigualdade de estabilidade (1.47). Esta será usada posteriormente na demonstração da estabilidade de um método de diferenças finitas a estudar.



## Capítulo 2

# Equações elípticas com condições de Dirichlet

### 2.1 Introdução

Na literatura têm surgido alguns estudos que apresentam uma análise cuidada da convergência de certos métodos diferenças finitas definidos em malhas não uniformes e mostram que a ordem de convergência é superior à ordem do erro de truncatura. Os métodos com esta última propriedade foram designados por supraconvergentes.

Alguns métodos de diferenças finitas para problemas de derivadas parciais elípticos foram considerados em [3], [4], [6], [16] e [18]. No entanto, métodos de diferenças finitas supraconvergentes, para problemas elípticos com coeficientes variáveis, derivadas mistas e definidos em domínios poligonais de  $\mathbb{R}^2$ , foram apenas apresentados em [5]. O estudo dos métodos de diferenças finitas que consideramos neste capítulo foi apresentado no último trabalho. A análise da estabilidade do método é baseada nas propriedades de certas formas bilineares estudadas previamente no Capítulo 1.

Consideremos o problema diferencial elíptico, de segunda ordem, com condição de Dirichlet

$$\begin{cases} Au = g & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{em } \Gamma, \end{cases} \quad (2.1)$$

em que

$$Au = -(au_x)_x - (bu_x)_y - (bu_y)_x - (cu_y)_y + du_x + eu_y + fu, \quad (2.2)$$

e  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  representa um domínio poligonal limitado, i.e., a sua fronteira  $\Gamma$  é a união de segmentos de recta.

Supomos que  $A$  é uniformemente elíptico e que as funções coeficiente  $a, b, c, d, e$  e  $f$  são tais que

$$a, b, c \in C^3(\bar{\Omega}), \quad d, e \in C^1(\bar{\Omega}) \text{ e } f \in C(\bar{\Omega}).$$

Na Secção 2.2 introduzimos a discretização do problema (2.1). Na Secção 2.3 associamos ao problema de diferenças finitas um problema variacional discreto. Para isso consideramos triangulações específicas do domínio e definimos uma forma bilinear discreta  $a_H(\cdot, \cdot)$ . Concluimos esta secção com o Teorema 2.2 no qual provamos a equivalência entre o método de diferenças e um método de elementos finitos. Na secção seguinte, tendo como base a desigualdade para a estabilidade da forma bilinear  $a_H(\cdot, \cdot)$ , estudamos a estabilidade do operador de diferenças. Finalmente, na Secção 2.5, provamos a convergência quadrática, relativamente à norma  $\|\cdot\|_1$ , da solução numérica. Atendendo à equivalência entre o problema de diferenças e um problema variacional discreto, concluimos igualmente a convergência quadrática da solução deste último, relativamente à norma  $\|\cdot\|_1$ .

## 2.2 Método de diferenças finitas

Sejam  $h = (h_j)_{\mathbb{Z}}$  e  $k = (k_\ell)_{\mathbb{Z}}$  duas sequências de números positivos. Para  $x_0, y_0$  fixos, definimos a malha

$$\mathbb{R}_H = \mathbb{R}_1 \times \mathbb{R}_2 \subset \mathbb{R}^2,$$

com

$$\mathbb{R}_1 = \{x_j \in \mathbb{R} : x_{j+1} = x_j + h_{j+1}, j \in \mathbb{Z}\},$$

$$\mathbb{R}_2 = \{y_\ell \in \mathbb{R} : y_{\ell+1} = y_\ell + k_{\ell+1}, \ell \in \mathbb{Z}\},$$

e obtemos a seguinte discretização do domínio

$$\Omega_H = \Omega \cap \mathbb{R}_H, \quad \Gamma_H = \Gamma \cap \mathbb{R}_H, \quad \bar{\Omega}_H = \bar{\Omega} \cap \mathbb{R}_H. \quad (2.3)$$

Atendendo a que consideramos domínios poligonais, a malha  $\mathbb{R}_H$  deve verificar a seguinte condição:

(Reg): A intersecção de  $\Gamma$  com qualquer rectângulo  $(x_j, x_{j+1}) \times (y_\ell, y_{\ell+1})$ , formado pela malha  $\mathbb{R}_H$ , ou é vazia ou é a diagonal do rectângulo.

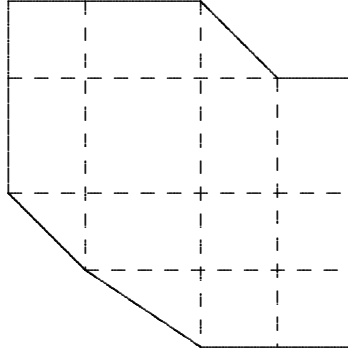


Figura 2.1: Exemplo de uma malha que satisfaz a condição (Reg).

Seja  $\overset{\circ}{W}_H$  o espaço das funções  $v_H$  definidas em  $\bar{\Omega}_H$ , nulas em  $\Gamma_H$ . Representamos por  $v_{j,\ell}$  o valor da função  $v_H$  em  $(x_j, y_\ell) \in \mathbb{R}_H$ .

Para cada ponto  $(x_j, y_\ell) \in \mathbb{R}_H$  definimos os seguintes operadores de diferenças centradas

$$\delta_x^{(1/2)} v_{j,\ell} = \frac{v_{j+1/2,\ell} - v_{j-1/2,\ell}}{x_{j+1/2} - x_{j-1/2}}, \quad (2.4)$$

$$\delta_x^{(1/2)} v_{j+1/2,\ell} = \frac{v_{j+1,\ell} - v_{j,\ell}}{x_{j+1} - x_j}, \quad (2.5)$$

$$\delta_x v_{j,\ell} = \frac{v_{j+1,\ell} - v_{j-1,\ell}}{x_{j+1} - x_{j-1}}, \quad (2.6)$$

em que  $x_{j+1/2} = x_j + h_{j+1}/2$ ,  $x_{j-1/2} = x_j - h_j/2$ . As diferenças centradas relativamente à variável  $y$  definem-se analogamente.

Seja  $A_H$  o operador de diferenças

$$\begin{aligned} A_H u_H &= -\delta_x^{(1/2)}(a\delta_x^{(1/2)} u_H) - \delta_x(b\delta_y u_H) - \delta_y(b\delta_x u_H) - \delta_y^{(1/2)}(c\delta_y^{(1/2)} u_H) \\ &\quad + d\delta_x u_H + e\delta_y u_H + f u_H. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Pretendemos obter  $u_H \in \overset{\circ}{W}_H$  tal que

$$A_H u_H = g \text{ em } \Omega_H. \quad (2.8)$$

Seja  $R_H u$  a restrição da função  $u$  à malha  $\tilde{\Omega}_H$ . O erro de truncatura  $T_H$  é dado por

$$T_H = A_H R_H u - R_H g.$$

Utilizando o desenvolvimento de Taylor verificamos que, para malhas não uniformes,  $T_H$  é inconsistente (ou de primeira ordem, se  $b = 0$ ).

Se a fronteira  $\Gamma$  contém segmentos  $\Gamma_\ell$  que não são paralelas aos eixos coordenados, a aproximação para as derivadas mistas não tem significado para os pontos  $P \in \Omega_H$  tais que dois dos seus pontos adjacentes pertencem a  $\Gamma_\ell$ . Atendendo a este facto, se  $b \neq 0$ , assumimos que  $\Omega$  é uma união de rectângulos.

## 2.3 Problema variacional discreto

Seja  $a(\cdot, \cdot)$  a forma bilinear

$$a(u, v) = \int_{\Omega} a u_x v_x + c u_y v_y + b(u_x v_y + u_y v_x) + d u_x v + e u_y v + f u v \, dx dy, \quad u, v \in H_0^1(\Omega). \quad (2.9)$$

Podemos associar ao problema diferencial (2.1) o problema variacional

determinar  $u \in H_0^1(\Omega)$  tal que

$$a(u, v) = (g, v)_0, \quad \text{para todo } v \in H_0^1(\Omega). \quad (2.10)$$

O objectivo desta secção é definir uma versão discreta do problema variacional anterior, isto é, associar ao problema de diferenças (2.8) um problema variacional. Para o efeito consideremos em  $\overset{\circ}{W}_H$  o produto interno

$$(v_H, w_H)_H = \sum_{(x_j, y_\ell) \in \Omega_H} \omega_{j, \ell} v_{j, \ell} w_{j, \ell}, \quad v_H, w_H \in \overset{\circ}{W}_H, \quad (2.11)$$

em que os pesos  $\omega_{j, \ell}$  são definidos por

$$\omega_{j, \ell} = \frac{h_j + h_{j+1}}{2} \frac{k_\ell + k_{\ell+1}}{2}, \quad (x_j, y_\ell) \in \Omega_H. \quad (2.12)$$

Denotamos por  $\|\cdot\|_H$  a norma induzida por este produto interno.

Assim, objectivo desta secção é definir  $a_H(\cdot, \cdot)$  de  $\overset{\circ}{W}_H \times \overset{\circ}{W}_H$  em  $\mathbb{R}$  e associar ao problema (2.8) o problema variacional

determinar  $u_H \in \overset{\circ}{W}_H$  tal que

$$a_H(u_H, v_H) = (R_H g, v_H)_H, \text{ para todo } v_H \in \overset{\circ}{W}_H. \quad (2.13)$$

Consideramos em  $\Omega$  duas triangulações especiais,  $\mathcal{T}_H^{(1)}$  e  $\mathcal{T}_H^{(2)}$ , obtidas a partir da decomposição

$$\mathbb{R}_H = \mathbb{R}_H^{(1)} \dot{\cup} \mathbb{R}_H^{(2)},$$

em que os conjuntos  $\mathbb{R}_H^{(1)}$  e  $\mathbb{R}_H^{(2)}$  são formados pelos pontos  $(x_j, y_\ell)$  tais que a soma dos índices  $j + \ell$  é, respectivamente, par ou ímpar. Para simplificar a notação definimos ainda  $\mathbb{R}_H^{(3)} = \mathbb{R}_H^{(1)}$ . A cada ponto  $(x_j, y_\ell) \in \mathbb{R}_H$  associamos os triângulos  $\Delta_{j,\ell}^{(i)}$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , que têm um ângulo recto em  $(x_j, y_\ell)$  e, como restantes vértices, dois dos quatro pontos adjacentes.

Sejam  $\mathcal{T}_{H,1}^{(s)}$  e  $\mathcal{T}_{H,2}^{(s)}$  as seguintes famílias de triângulos

$$\mathcal{T}_{H,1}^{(s)} = \left\{ \Delta_{j,\ell}^{(i)} \subset \bar{\Omega} : (x_j, y_\ell) \in \mathbb{R}_H^{(s)}, i \in \{1, 2, 3, 4\} \right\}, \quad (2.14)$$

$$\mathcal{T}_{H,2}^{(s)} = \left\{ \Delta_{j,\ell}^{(i)} \subset \left( \bar{\Omega} \setminus \bigcup_{\Delta \in \mathcal{T}_{H,1}^{(s)}} \overset{\circ}{\Delta} \right) : (x_j, y_\ell) \in \mathbb{R}_H^{(s+1)}, i \in \{1, 2, 3, 4\} \right\}, \quad (2.15)$$

em que  $\overset{\circ}{\Delta}$  representa o interior de  $\Delta$ , e seja

$$\mathcal{T}_H^{(s)} = \mathcal{T}_{H,1}^{(s)} \cup \mathcal{T}_{H,2}^{(s)}, \quad s = 1, 2. \quad (2.16)$$

A figura 2.2 mostra uma dessas triangulações.

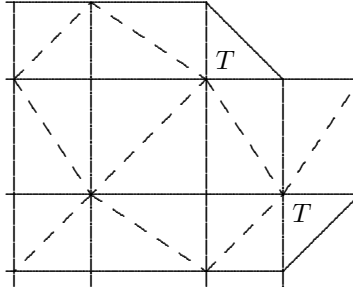


Figura 2.2: Triangulação  $\mathcal{T}_H^{(s)}$ .  $T$  indica triângulos de  $\mathcal{T}_{H,2}^{(s)}$ .

Seja  $P_H^{(s)}$  o operador de interpolação segmentado linear relativamente à triangulação  $\mathcal{T}_H^{(s)}$ ,  $s = 1, 2$ .



O resultado seguinte é utilizado posteriormente no cálculo de  $P_H^{(s)}v_H$ , em que  $v_H \in \mathring{W}_H$ ,  $s = 1, 2$ .

**Proposição 2.1** *Sejam  $\Delta_\mu = \{(\xi, \eta) : \xi, \eta \geq 0, \xi + \eta \leq 1\}$  o triângulo unitário e  $P_i = (x_i, y_i)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , os vértices de  $\Delta \in \mathcal{T}_H^{(s)}$ . Existe uma aplicação linear e bijectiva  $\Phi$  definida em  $\Delta_\mu$  tal que  $\Phi(\Delta_\mu) = \Delta$ .*

**Demonstração:** Basta considerar a função  $\Phi : \Delta_\mu \rightarrow \Delta$ , com

$$\Phi(\xi, \eta) = P_1 + \xi(P_2 - P_1) + \eta(P_3 - P_1).$$

A sua inversa  $\Phi^{-1} : \Delta \rightarrow \Delta_\mu$  é definida por  $\Phi^{-1}(x, y) = (\xi, \eta)$ , com

$$\xi = \frac{(x - x_1)(y_3 - y_1) - (y - y_1)(x_3 - x_1)}{(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)} \quad (2.17)$$

e

$$\eta = \frac{(x - x_1)(y_2 - y_1) - (y - y_1)(x_2 - x_1)}{(x_3 - x_1)(y_2 - y_1) - (x_2 - x_1)(y_3 - y_1)}. \quad (2.18)$$

■

Sejam  $v_{\Delta,1}, v_{\Delta,2}, v_{\Delta,3}$  os valores de  $v_H$  nos vértices de  $\Delta \in \mathcal{T}_H^{(s)}$ . Como

$$P_H^{(s)}v_H(\xi, \eta) = (v_{\Delta,2} - v_{\Delta,1})\xi + (v_{\Delta,3} - v_{\Delta,1})\eta + v_{\Delta,1}, \quad (2.19)$$

o polinómio interpolador de  $v_H$  em cada triângulo  $\Delta$ ,

$$P_H^{(s)}v_H(x, y) = \lambda_\Delta x + \gamma_\Delta y + \sigma_\Delta,$$

obtém-se imediatamente de (2.19), tendo em conta (2.17) e (2.18).

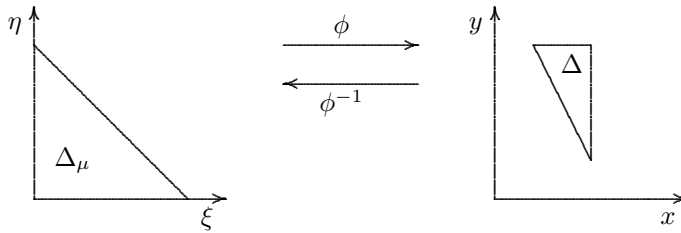


Figura 2.3: Triângulo de referência  $\Delta_\mu$ .

Consideremos em (2.9),  $u$  e  $v$  substituídos, respectivamente, por  $P_H^{(s)}u_H$  e  $P_H^{(s)}v_H$ ,  $u_H, v_H \in \mathring{W}_H$  e definamos uma aproximação para cada parcela de  $a(P_H^{(s)}u_H, P_H^{(s)}v_H)$ .

Seja  $a_\Delta$  o valor de  $a$  no ponto médio do lado de  $\Delta$  paralelo ao eixo dos  $xx$  e

$$a^{(s)}(v_H, w_H) = \sum_{\Delta \in \mathcal{T}_H^{(s)}} a_\Delta \int_{\Delta} (P_H^{(s)}v_H)_x (P_H^{(s)}w_H)_x dx dy. \quad (2.20)$$

De modo análogo, seja  $c_\Delta$  o valor de  $c$  no ponto médio do lado de  $\Delta$  paralelo ao eixo dos  $yy$  e

$$c^{(s)}(v_H, w_H) = \sum_{\Delta \in \mathcal{T}_H^{(s)}} c_\Delta \int_{\Delta} (P_H^{(s)}v_H)_y (P_H^{(s)}w_H)_y dx dy. \quad (2.21)$$

As duas formas bilineares anteriores aproximam os termos de  $a(\cdot, \cdot)$  associados às derivadas de segunda ordem em relação, respectivamente, a  $x$  e  $y$ .

Para a aproximação do termo de  $a(\cdot, \cdot)$  associado às derivadas mistas consideramos

$$b^{(s)}(v_H, w_H) = \sum_{\Delta \in \mathcal{T}_H^{(s)}} b_\Delta \int_{\Delta} [(P_H^{(s)}v_H)_x (P_H^{(s)}w_H)_y + (P_H^{(s)}v_H)_y (P_H^{(s)}w_H)_x] dx dy, \quad (2.22)$$

em que  $b_\Delta$  é o valor de  $b$  no vértice de  $\Delta$  correspondente ao ângulo recto.

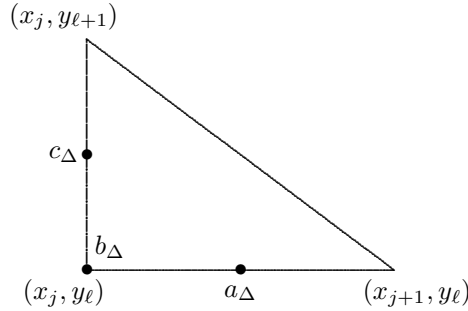


Figura 2.4: Pontos envolvidos no cálculo de  $a_\Delta$ ,  $b_\Delta$  e  $c_\Delta$ .

Seja

$$(P_H^{(s)}v_H)_{\Delta,x} = P_H^{(s)}v_H(x_\Delta, y_\Delta), \quad (2.23)$$

em que  $(x_\Delta, y_\Delta)$  é o ponto médio do lado de  $\Delta$  paralelo ao eixo dos  $xx$ . Definimos de modo análogo  $(P_H^{(s)}v_H)_{\Delta,y}$  sendo, neste caso,  $(x_\Delta, y_\Delta)$  o ponto médio do lado de  $\Delta$  paralelo ao eixo dos  $yy$ .

Consideramos na aproximação dos termos da forma bilinear  $a(.,.)$  associados às derivadas de primeira ordem as seguintes formas bilineares

$$d^{(s)}(v_H, w_H) = \sum_{\Delta \in \mathcal{T}_H^{(s)}} [P_H^{(s)}(dw_H)]_{\Delta, x} \int_{\Delta} (P_H^{(s)}v_H)_x dx dy, \quad (2.24)$$

e

$$e^{(s)}(v_H, w_H) = \sum_{\Delta \in \mathcal{T}_H^{(s)}} [P_H^{(s)}(ew_H)]_{\Delta, y} \int_{\Delta} (P_H^{(s)}v_H)_y dx dy. \quad (2.25)$$

Finalmente,

$$f^{(s)}(v_H, w_H) = \sum_{(x_j, y_\ell) \in \Omega_H} \omega_{j, \ell} f(x_j, y_\ell) v_{j, \ell} w_{j, \ell}. \quad (2.26)$$

Seja  $a_H(.,.)$  a média aritmética

$$a_H = \frac{1}{2}(a_H^{(1)} + a_H^{(2)}), \quad (2.27)$$

definida em  $\mathring{W}_H \times \mathring{W}_H$ , em que

$$a_H^{(s)} = a^{(s)} + b^{(s)} + c^{(s)} + d^{(s)} + e^{(s)} + f^{(s)}, \quad s = 1, 2. \quad (2.28)$$

No resultado seguinte é estabelecida a relação entre a forma bilinear  $a_H(.,.)$  e o operador de diferenças  $A_H$ .

**Teorema 2.2** *Sejam  $A_H$  o operador de diferenças definido em (2.7) e  $a_H(.,.)$  a forma bilinear definida em (2.27). Então*

$$a_H(v_H, w_H) = (A_H v_H, w_H)_H, \quad \forall v_H, w_H \in \mathring{W}_H. \quad (2.29)$$

**Demonstração:** Seja  $v_H \in \mathring{W}_H$  uma função que se anula em todos os pontos de  $\Omega_H$  excepto o ponto  $(x_j, y_\ell)$ .

Em cada uma das triangulações  $\mathcal{T}_H^{(s)}$  há apenas quatro triângulos  $\Delta_i, i = 1, 2, 3, 4$  em que  $(P_H^{(s)}v_H)_x$  é não nulo. Esse triângulos estão representados na figura 2.5 e foram numerados de forma a que  $(P_H^{(s)}v_H)_x$  e  $(P_H^{(s)}w_H)_x$  tenham as mesmas expressões em  $\Delta_i, i = 1, 2, 3, 4$ , quer este pertença a  $\mathcal{T}_H^{(1)}$  ou  $\mathcal{T}_H^{(2)}$ .

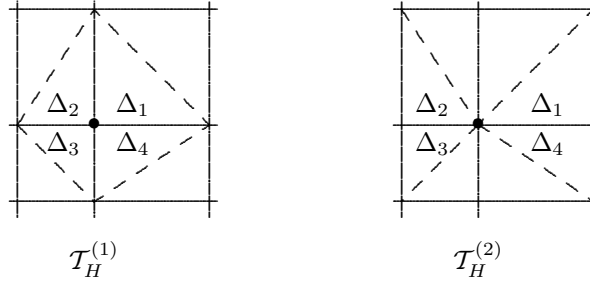


Figura 2.5: Triângulos que contribuem para o cálculo de  $a^{(s)}(.,.)$ .

Então

$$\begin{aligned}
 a^{(s)}(v_H, w_H) &= -a(x_{j+1/2}, y_\ell) \frac{w_{j+1,\ell} - w_{j,\ell}}{h_{j+1}} \frac{v_{j,\ell}}{h_{j+1}} \frac{h_{j+1}k_{\ell+1}}{2} \\
 &+ a(x_{j-1/2}, y_\ell) \frac{w_{j,\ell} - w_{j-1,\ell}}{h_j} \frac{v_{j,\ell}}{h_j} \frac{h_jk_{\ell+1}}{2} \\
 &+ a(x_{j-1/2}, y_\ell) \frac{w_{j,\ell} - w_{j-1,\ell}}{h_j} \frac{v_{j,\ell}}{h_j} \frac{h_jk_\ell}{2} \\
 &- a(x_{j+1/2}, y_\ell) \frac{w_{j+1,\ell} - w_{j,\ell}}{h_{j+1}} \frac{v_{j,\ell}}{h_{j+1}} \frac{h_{j+1}k_\ell}{2},
 \end{aligned}$$

e portanto

$$a^{(s)}(v_H, w_H) = \left( -\delta_x^{(1/2)}(a\delta_x^{(1/2)}v_H), w_H \right)_H, \quad s = 1, 2. \quad (2.30)$$

Da modo análogo

$$c^{(s)}(v_H, w_H) = \left( -\delta_y^{(1/2)}(c\delta_y^{(1/2)}v_H), w_H \right)_H, \quad s = 1, 2. \quad (2.31)$$

É fácil verificar que

$$d^{(s)}(v_H, w_H) = (d\delta_x v_H, w_H)_H, \quad s = 1, 2, \quad (2.32)$$

e

$$e^{(s)}(v_H, w_H) = (e\delta_y v_H, w_H)_H, \quad s = 1, 2. \quad (2.33)$$

Para as derivadas mistas, o contributo de cada uma das triangulações é diferente. Suponhamos, por exemplo, que  $j + \ell$  é par. Para o cálculo de  $b^{(1)}$  temos que considerar apenas os quatro triângulos que têm ângulo recto em  $(x_j, y_\ell)$ .

Então

$$\begin{aligned}
b^{(1)}(v_H, w_H) &= -b_{j,\ell} \left( \frac{v_{j,\ell}}{h_{j+1}} \frac{w_{j,\ell+1} - w_{j,\ell}}{k_{\ell+1}} + \frac{v_{j,\ell}}{k_{\ell+1}} \frac{w_{j+1,\ell} - w_{j,\ell}}{h_{j+1}} \right) \frac{h_{j+1} k_{\ell+1}}{2} \\
&+ b_{j,\ell} \left( \frac{v_{j,\ell}}{h_j} \frac{w_{j,\ell+1} - w_{j,\ell}}{k_{\ell+1}} - \frac{v_{j,\ell}}{k_{\ell+1}} \frac{w_{j,\ell} - w_{j-1,\ell}}{h_j} \right) \frac{h_j k_{\ell+1}}{2} \\
&+ b_{j,\ell} \left( \frac{v_{j,\ell}}{h_j} \frac{w_{j,\ell} - w_{j,\ell-1}}{k_\ell} + \frac{v_{j,\ell}}{k_\ell} \frac{w_{j,\ell} - w_{j-1,\ell}}{h_j} \right) \frac{h_j k_\ell}{2} \\
&- b_{j,\ell} \left( \frac{v_{j,\ell}}{h_{j+1}} \frac{w_{j,\ell} - w_{j,\ell-1}}{k_\ell} - \frac{v_{j,\ell}}{k_\ell} \frac{w_{j+1,\ell} - w_{j,\ell}}{h_{j+1}} \right) \frac{h_{j+1} k_\ell}{2} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

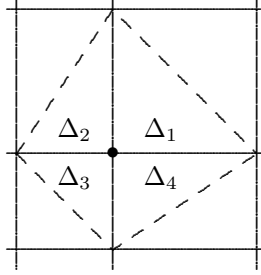


Figura 2.6: Triângulos de  $\mathcal{T}_H^{(1)}$  que contribuem para o cálculo de  $b^{(1)}$ .

Na triangulação  $\mathcal{T}_H^{(2)}$  há oito triângulos que contribuem para a expressão de  $b^{(2)}(v_H, w_H)$ .

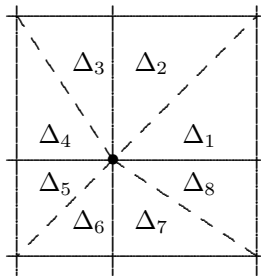


Figura 2.7: Triângulos de  $\mathcal{T}_H^{(2)}$  que contribuem para o cálculo de  $b^{(2)}$ .

Assim, explicitando  $b^{(2)}(v_H, w_H)$ , obtemos

$$\begin{aligned} b^{(2)}(v_H, w_H) &= -\frac{1}{2}b_{j+1,\ell}v_{j,\ell}w_{j+1,\ell+1} - \frac{1}{2}b_{j,\ell+1}v_{j,\ell}w_{j+1,\ell+1} \\ &\quad + \frac{1}{2}b_{j,\ell+1}v_{j,\ell}w_{j-1,\ell+1} + \frac{1}{2}b_{j-1,\ell}v_{j,\ell}w_{j-1,\ell+1} \\ &\quad - \frac{1}{2}b_{j-1,\ell}v_{j,\ell}w_{j-1,\ell-1} - \frac{1}{2}b_{j,\ell-1}v_{j,\ell}w_{j-1,\ell-1} \\ &\quad + \frac{1}{2}b_{j,\ell-1}v_{j,\ell}w_{j+1,\ell-1} + \frac{1}{2}b_{j+1,\ell}v_{j,\ell}w_{j+1,\ell-1}, \end{aligned}$$

e é fácil deduzir a igualdade

$$\frac{1}{2} \left[ b^{(1)}(v_H, w_H) + b^{(2)}(v_H, w_H) \right] = (-\delta_x(b\delta_y v_H) - \delta_y(b\delta_x v_H), w_H)_H. \quad (2.34)$$

De (2.30), (2.31), (2.32), (2.33) e (2.34) concluímos (2.29).  $\blacksquare$

Observamos que se o problema não tem derivadas mistas basta considerar  $a_H = a_H^{(s)}$ ,  $s = 1$  ou  $s = 2$ .

Nesta secção começámos por considerar o problema variacional (2.10) e definimos o problema variacional discreto (2.13). Este último é induzido considerando as formas de quadratura definidas e traduz um método de elementos finitos linear.

## 2.4 Estabilidade

Seja  $\Lambda$  a sucessão de vectores  $(h_j, k_\ell)$  em que  $H_{max} = \max_{j,\ell} \{h_j, k_\ell\} \rightarrow 0$ .

A demonstração da estabilidade do método de diferenças finitas introduzido é, como já referimos anteriormente, baseada na desigualdade para a estabilidade da forma bilinear.

Comecemos por notar que vale o resultado seguinte.

**Proposição 2.3** *Suponhamos que problema variacional (2.10) homogéneo tem solução única. Então, existe uma constante  $C$  tal que, para  $H_{max}$  suficientemente pequeno, se tem*

$$\|P_H^{(s)} v_H\|_1 \leq C \sup_{0 \neq w_H \in \overset{\circ}{W}_H} \frac{|a(P_H^{(s)} v_H, P_H^{(s)} w_H)|}{\|P_H^{(s)} w_H\|_1}, \quad v_H \in \overset{\circ}{W}_H, \quad s = 1, 2. \quad (2.35)$$

**Demonstração:** Pelo Teorema 1.14,  $a(\cdot, \cdot)$  é  $H_0^1(\Omega)$ -coerciva.

Seja

$$V_H = \{P_H^{(s)} v_H : v_H \in \overset{\circ}{W}_H\}.$$

Atendendo a que para todo  $v \in H_0^1(\Omega)$  se tem

$$\lim_{H_{max} \rightarrow 0} d(v, V_H) = 0,$$

então, pelo Teorema 1.23, concluímos que existe  $C > 0$  que verifica (2.35). ■

Com o objectivo de estabelecer uma desigualdade análoga à (2.35) para a forma bilinear  $a_H(\cdot, \cdot)$ , consideremos seguidamente alguns resultados auxiliares.

**Lema 2.4** *Sejam  $v_H, w_H \in \mathring{W}_H$ ,  $H \in \Lambda$ , tais que*

$$\|P_H^{(s)}v_H\|_1 \leq C_1, \|P_H^{(s)}w_H\|_1 \leq C_2, s \in \{1, 2\}, \quad (2.36)$$

com  $C_1$  e  $C_2$  constantes positivas. Então

- (i)  $a^{(s)}(v_H, w_H) - \left( a(P_H^{(s)}v_H)_x, (P_H^{(s)}w_H)_x \right)_0 \xrightarrow{(H \in \Lambda)} 0$ ,
- (ii)  $b^{(s)}(v_H, w_H) - \left[ \left( b(P_H^{(s)}v_H)_x, (P_H^{(s)}w_H)_y \right)_0 + \left( b(P_H^{(s)}v_H)_y, (P_H^{(s)}w_H)_x \right)_0 \right] \xrightarrow{(H \in \Lambda)} 0$ ,
- (iii)  $c^{(s)}(v_H, w_H) - \left( c(P_H^{(s)}v_H)_y, (P_H^{(s)}w_H)_y \right)_0 \xrightarrow{(H \in \Lambda)} 0$ .

**Demonstração:** Seja  $\Delta \in \mathcal{T}_H^{(s)}$ . Como a função coeficiente  $a$  é contínua em  $\Omega$ , então

$$a_\Delta \int_\Delta (P_H^{(s)}v_H)_x (P_H^{(s)}w_H)_x dx dy - \int_\Delta a(x, y) (P_H^{(s)}v_H)_x (P_H^{(s)}w_H)_x dx dy \xrightarrow{(H \in \Lambda)} 0.$$

Esta convergência é uniforme em relação a  $\Delta$ , e portanto, somando sobre todos os triângulos, provamos o pretendido. A demonstração de (ii) e (iii) é análoga à de (i). ■

A proposição seguinte é usada na demonstração do resultado análogo ao Lema 2.4 para as formas bilineares associadas às derivadas de primeira ordem.

**Proposição 2.5** *Seja  $\Delta_\mu = \{(\xi, \eta) : \xi, \eta \geq 0, \xi + \eta \leq 1\}$  o triângulo unitário. Se  $v$  é linear em  $\Delta_\mu$ , então*

$$\frac{1}{24} [v^2(0, 0) + v^2(1, 0) + v^2(0, 1)] \leq \int_{\Delta_\mu} v^2(\xi, \eta) d\xi d\eta. \quad (2.37)$$

**Demonstração:** Sejam  $v_1 = v(0, 0)$ ,  $v_2 = v(1, 0)$ ,  $v_3 = v(0, 1)$ . Como  $v$  é linear em  $\Delta_\mu$ , então

$$v(\xi, \eta) = (v_2 - v_1)\xi + (v_3 - v_1)\eta + v_1.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\int_{\Delta_\mu} v^2(\xi, \eta) d\xi d\eta &= \int_0^1 \int_0^{1-\xi} [(v_2 - v_1)\xi + (v_3 - v_1)\eta + v_1]^2 d\eta d\xi \\
&= \frac{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + v_1 v_2 + v_1 v_3}{12} \\
&= \frac{1}{24} [v_1 \ v_2 \ v_3] \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Os valores próprios desta matriz são  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$  e  $\lambda_3 = 4$ . Logo,

$$[v_1 v_2 v_3] \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \geq \sum_{i=1}^3 v_i^2.$$

■

A área de  $\Delta$  é denotada por  $|\Delta|$ .

**Proposição 2.6** *Seja  $\mathcal{T}_H$  uma triangulação de  $\Omega$ . Sejam  $v_{\Delta,1}, v_{\Delta,2}, v_{\Delta,3}$  os valores de  $v_H \in \overset{\circ}{W}_H$  nos vértices de  $\Delta \in \mathcal{T}_H$ . Então existe uma constante  $C$  positiva tal que*

$$\sum_{\Delta \in \mathcal{T}_H} |\Delta| (|v_{\Delta,1}|^2 + |v_{\Delta,2}|^2 + |v_{\Delta,3}|^2) \leq C \|P_H v_H\|_0^2. \quad (2.38)$$

**Demonstração:** Por definição, temos que

$$\|P_H v_H\|_0^2 = \sum_{\Delta \in \mathcal{T}_H} \int_{\Delta} |P_H v_H|^2 dx dy.$$

Considerando a Proposição 2.1, temos

$$\begin{aligned}
\int_{\Delta} |P_H v_H|^2 dx dy &= |\det \Phi'| \int_{\Delta_\mu} |(P_H v_H)(\Phi(\xi, \eta))|^2 d\xi d\eta \\
&= 2|\Delta| \int_{\Delta_\mu} |(P_H v_H)(\Phi(\xi, \eta))|^2 d\xi d\eta,
\end{aligned}$$

em que  $\Phi$  está definida na proposição referida.

Atendendo à Proposição 2.5, obtemos

$$\int_{\Delta_\mu} |(P_H v_H)(\Phi(\xi, \eta))|^2 d\xi d\eta \geq \frac{1}{24} (|v_{\Delta,1}|^2 + |v_{\Delta,2}|^2 + |v_{\Delta,3}|^2),$$



e portanto, somando sobre todos os triângulos, concluímos o pretendido. ■

Na demonstração do lema seguinte utilizamos o conceito de convergência discreta de uma sucessão de funcionais lineares, considerado em [21]. Sejam  $(L_0^2(\Omega))'$  e  $(L_0^2(\Omega_H))'$ , respectivamente, os espaços duais de  $L_0^2(\Omega)$  e  $L_0^2(\Omega_H)$ ,  $H \in \Lambda$ . Dizemos que a sucessão de funcionais lineares  $\{l_H\}_\Lambda$  converge para  $l$  se

$$\forall \{v_H\}_\Lambda \in \prod L_0^2(\Omega_H), \forall v \in L_0^2(\Omega) : \|v_H - R_H v\|_H \rightarrow 0 \implies l_H(v_H) \rightarrow l(v). \quad (2.39)$$

Usaremos a notação  $l_H \rightarrow l$ .

**Lema 2.7** *Se  $v_H, w_H \in \overset{\circ}{W}_H$ ,  $H \in \Lambda$ , verificam (2.36), então*

$$\begin{aligned} d^{(s)}(v_H, w_H) - \left( d(P_H^{(s)} v_H)_x, P_H^{(s)} w_H \right)_0 &\longrightarrow 0 \quad (H \in \Lambda), \\ e^{(s)}(v_H, w_H) - \left( e(P_H^{(s)} v_H)_y, P_H^{(s)} w_H \right)_0 &\longrightarrow 0 \quad (H \in \Lambda), \end{aligned}$$

$s = 1, 2$ .

**Demonstração:** Sejam  $v$  e  $w \in H_0^1(\Omega)$  os limites de  $P_H^{(s)} v_H$  e  $P_H^{(s)} w_H$ , respectivamente. Então

$$\left( e(P_H^{(s)} v_H)_y, P_H^{(s)} w_H \right)_0 \longrightarrow (e v_y, w)_0 \quad (H \in \Lambda).$$

Pretendemos mostrar que

$$e^{(s)}(v_H, w_H) \longrightarrow (e v_y, w)_0 \quad (H \in \Lambda). \quad (2.40)$$

Consideremos as funcionais lineares  $l_H \in (L_0^2(\Omega_H))'$  e  $l \in (L_0^2(\Omega))'$  definidas por

$$l_H = e^{(s)}(v_H, \cdot) \quad \text{e} \quad l = (e v_y, \cdot)_0.$$

Provemos que  $l_H \rightarrow l$ .

Atendendo a que a convergência anterior é equivalente à estabilidade de  $\{l_H\}_\Lambda$  e à consistência de  $\{l_H\}_\Lambda$  com  $l$  ([21]), provemos que estas últimas propriedades são válidas.

Atendendo à Proposição 2.6, temos

$$\begin{aligned} |e^{(s)}(v_H, w_H)|^2 &\leq C \sum_{\Delta \in \mathcal{T}_H^{(s)}} \int |(P_H^{(s)} v_H)_y|^2 dx dy \\ &\quad \times \sum_{\Delta \in \mathcal{T}_H^{(s)}} |\Delta| (|(P_H^{(s)} w_H)_{\Delta,1}|^2 + |(P_H^{(s)} w_H)_{\Delta,2}|^2 + |(P_H^{(s)} w_H)_{\Delta,3}|^2) \\ &\leq C \|(P_H^{(s)} v_H)_y\|_0^2 \|P_H^{(s)} w_H\|_0^2, \end{aligned}$$

e portanto concluímos a estabilidade de  $l_H$ .

Seja  $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ . Como  $C_0^\infty(\Omega)$  é denso em  $L_0^2(\Omega)$ , para provarmos a consistência referida basta demonstrar a convergência

$$l_H(R_H\phi) \longrightarrow l(\phi) \quad (H \in \Lambda),$$

ou seja

$$e^{(s)}(v_H, R_H\phi) \longrightarrow (e v_y, \phi)_0 \quad (H \in \Lambda). \quad (2.41)$$

Como a função seccionalmente constante  $\psi_H$  definida por

$$\psi_H(x, y) = [(P_H^{(s)}(eR_H\phi)]_{\Delta, y}, \quad (x, y) \in \Delta, \quad \Delta \in \mathcal{T}_H^{(s)},$$

converge para  $e\phi$  em  $L^2(\Omega)$ , de

$$e^{(s)}(v_H, R_H\phi) = ((P_H^{(s)}v_H)_y, \psi_H)_0,$$

resulta imediatamente (2.41). ■

**Lema 2.8** *Nas condições do lema anterior,*

$$f^{(s)}(v_H, w_H) - (f P_H^{(s)}v_H, P_H^{(s)}w_H)_0 \longrightarrow 0 \quad (H \in \Lambda).$$

**Demonstração:** Usando os mesmos argumentos da demonstração do lema anterior e atendendo a que, para  $\phi, \psi \in C_0^\infty(\Omega)$ , se tem

$$f^{(s)}(R_H\phi, R_H\psi) \longrightarrow (f\phi, \psi)_0 \quad (H \in \Lambda),$$

concluímos o pretendido. ■

Com os Lemas 2.4, 2.7 e 2.8 demonstramos que para as sequências  $\{v_H\}_\Lambda$  e  $\{w_H\}_\Lambda$  nas condições (2.36)

$$|a_H^{(s)}(v_H, w_H) - a(P_H^{(s)}v_H, P_H^{(s)}w_H)| \longrightarrow 0 \quad (H \in \Lambda). \quad (2.42)$$

Da Proposição 2.3 e de (2.42) resulta o teorema seguinte.

**Teorema 2.9** *Suponhamos que problema variacional (2.10) homogéneo tem solução única. Então, existe uma constante  $C$  tal que, para  $H_{max}$  suficientemente pequeno, se tem*

$$\|P_H^{(s)}v_H\|_1 \leq C \sup_{0 \neq w_H \in \mathring{W}_H} \frac{|a_H(v_H, w_H)|}{\|P_H^{(s)}w_H\|_1}, \quad v_H \in \mathring{W}_H, \quad s = 1, 2. \quad (2.43)$$

■

Conjugando os Teoremas 2.2 e 2.9, obtemos

$$C \sup_{0 \neq w_H \in \mathring{W}_H} \frac{|(A_H v_H, w_H)_H|}{\|P_H^{(s)} w_H\|_1} \geq \|P_H^{(s)} v_H\|_1,$$

ou seja

$$\|A_H v_H\|_{-1, H} \geq \frac{1}{C} \|P_H^{(s)} v_H\|_1, \quad \forall v_H \in \mathring{W}_H, \quad (2.44)$$

em que

$$\|A_H v_H\|_{-1, H} = \sup_{0 \neq w_H \in \mathring{W}_H} \frac{|(A_H v_H, w_H)_H|}{\|P_H^{(s)} w_H\|_1}.$$

A desigualdade (2.44) traduz a estabilidade de  $A_H$ .

## 2.5 Convergência

Consideremos, na desigualdade (2.43),  $v_H = R_H u - u_H$ , em que  $u$  e  $u_H$  são respectivamente, as soluções do problema diferencial (2.1) e do problema de diferenças (2.8). Pelo Teorema 2.2

$$\|P_H^{(s)}(R_H u - u_H)\|_1 \leq C \sup_{0 \neq w_H \in \mathring{W}_H} \frac{|a_H(R_H u, w_H) - (R_H g, w_H)_H|}{\|P_H^{(s)} w_H\|_1},$$

e portanto uma estimativa para a norma do erro obtém-se estimando

$$a_H(R_H u, w_H) - (R_H g, w_H)_H.$$

Para o efeito consideramos a contribuição de cada parcela da forma bilinear  $a_H(\cdot, \cdot)$ .

As norma usuais dos espaços  $H^r(\Delta)$  e  $W^{r, \infty}(\Delta)$  são representadas, respectivamente, por  $\|\cdot\|_{r, \Delta}$  e  $\|\cdot\|_{r, \infty, \Delta}$ .

Sejam  $u \in C^4(\bar{\Omega})$  e  $v_H \in \mathring{W}_H$ . No que se segue escrevemos  $u$  em vez de  $R_H u$ . Consideremos a seguinte contribuição

$$T_{a, \Delta} = a_{\Delta} \int_{\Delta} (P_H u)_x (P_H v_H)_x dx dy,$$

em que  $\Delta$  é um triângulo de  $\mathcal{T}_H^{(s)}$ .

Assumindo que  $\Delta$  tem como vértices  $(x_j, y_l), (x_j, y_{\ell+1}), (x_{j+1}, y_{\ell})$ , vem

$$T_{a, \Delta} = a_{j+1/2, \ell} \frac{u_{j+1, \ell} - u_{j, \ell}}{h_{j+1}} \int_{\Delta} (P_H v_H)_x dx dy.$$

Mas

$$\begin{aligned} u_{j,\ell} &= u_{j+1/2,\ell} - (u_x)_{j+1/2,\ell} \frac{h_{j+1}}{2} + (u_{xx})_{j+1/2,\ell} \frac{h_{j+1}^2}{8} \\ &\quad - (u_{xxx})_{j+\zeta_1,\ell} \frac{h_{j+1}^3}{48}, \\ u_{j+1,\ell} &= u_{j+1/2,\ell} + (u_x)_{j+1/2,\ell} \frac{h_{j+1}}{2} + (u_{xx})_{j+1/2,\ell} \frac{h_{j+1}^2}{8} \\ &\quad + (u_{xxx})_{j+\zeta_2,\ell} \frac{h_{j+1}^3}{48}, \end{aligned}$$

com  $x_{j+\zeta_1} \in [x_{j,\ell}, x_{j+1/2}]$  e  $x_{j+\zeta_2} \in [x_{j+1/2}, x_{j+1}]$ . Logo

$$\frac{u_{j+1,\ell} - u_{j,\ell}}{h_{j+1}} = (u_x)_{j+1/2,\ell} + [(u_{xxx})_{j+\zeta_1,\ell} + (u_{xxx})_{j+\zeta_2,\ell}] \frac{h_{j+1}^3}{48}.$$

Mais ainda,

$$\frac{(u_{xxx})_{j+\zeta_1,\ell} + (u_{xxx})_{j+\zeta_2,\ell}}{2} = (u_{xxx})_{j+\zeta_3,\ell},$$

com  $x_{j+\zeta_3} \in [x_{j+\zeta_1}, x_{j+\zeta_2}]$ .

Conjugando as expressões obtidas, vem

$$T_{a,\Delta} = (au_x)_{j+1/2,\ell} \frac{v_{j+1,\ell} - v_{j,\ell}}{h_{j+1}} \frac{h_{j+1}^{k_{\ell}+1}}{2} + R_{a,1}$$

com

$$|R_{a,1}| \leq \frac{h_{j+1}^2}{24} \|a\|_{\infty,\Delta} \|u_{xxx}\|_{\infty,\Delta} \int_{\Delta} |(P_H v_H)_x| dx dy.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} (au_x)_{j+1/2,\ell} &= (au_x)_{j,\ell} + ((au_x)_x)_{j,\ell} \frac{h_{j+1}}{2} + ((au_x)_{xx})_{j,\ell} \frac{h_{j+1}^2}{8} \\ &\quad + ((au_x)_{xxx})_{j+\varrho_1,\ell} \frac{h_{j+1}^3}{48}, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} (au_x)_{j+1/2,\ell} &= (au_x)_{j+1,\ell} - ((au_x)_x)_{j+1,\ell} \frac{h_{j+1}}{2} + ((au_x)_{xx})_{j+1,\ell} \frac{h_{j+1}^2}{8} \\ &\quad - ((au_x)_{xxx})_{j+\varrho_2,\ell} \frac{h_{j+1}^3}{48}, \end{aligned}$$

com  $x_{j+\varrho_1} \in [x_j, x_{j+1/2}]$  e  $x_{j+\varrho_2} \in [x_{j+1/2}, x_{j+1}]$ .

Obtemos finalmente

$$\begin{aligned}
T_{a,\Delta} &= \left[ (au_x)_{j+1/2,\ell} \frac{v_{j+1,\ell}}{h_{j+1}} - (au_x)_{j+1/2,\ell} \frac{v_{j,\ell}}{h_{j+1}} \right] |\Delta| + R_{a,1} \\
&= \frac{k_{\ell+1}}{2} \left[ (au_x)_{j+1,\ell} - \frac{h_{j+1}}{2} ((au_x)_x)_{j+1,\ell} \right] v_{j+1,\ell} \\
&\quad - \frac{k_{\ell+1}}{2} \left[ (au_x)_{j,\ell} + \frac{h_{j+1}}{2} ((au_x)_x)_{j,\ell} \right] v_{j,\ell} \\
&\quad + R_{a,2}, \tag{2.45}
\end{aligned}$$

em que  $R_{a,2}$  satisfaz a estimativa

$$\begin{aligned}
|R_{a,2}| &\leq \frac{h_{j+1}^2}{24} (\|a\|_{\infty,\Delta} \|u_{xxx}\|_{\infty,\Delta} + 3\|(au_x)_{xx}\|_{\infty,\Delta}) \int_{\Delta} |(P_H v_H)_x| dx dy \\
&\quad + \frac{h_{j+1}^2}{12} \|(au_x)_{xxx}\|_{\infty,\Delta} |\Delta| (|v_{j,\ell}| + |v_{j+1,\ell}|).
\end{aligned}$$

Consideremos agora a contribuição de  $T_{a,\Delta}$  em todos os triângulos  $\Delta$ . O desenvolvimento (2.45) é análogo para qualquer orientação. Atendendo a que  $v_H = 0$  em  $\Gamma$ , obtemos

$$\begin{aligned}
\sum_{\Delta \in \mathcal{T}_H^{(s)}} T_{a,\Delta} &= \sum_{(x_j, y_\ell) \in \Omega_H} -\frac{k_{\ell+1}}{2} \left[ (au_x)_{j,\ell} + \frac{h_{j+1}}{2} ((au_x)_x)_{j,\ell} \right] v_{j,\ell} \\
&\quad + \frac{k_{\ell+1}}{2} \left[ (au_x)_{j,\ell} - \frac{h_j}{2} ((au_x)_x)_{j,\ell} \right] v_{j,\ell} \\
&\quad + \frac{k_\ell}{2} \left[ (au_x)_{j,\ell} - \frac{h_j}{2} ((au_x)_x)_{j,\ell} \right] v_{j,\ell} \\
&\quad - \frac{k_\ell}{2} \left[ (au_x)_{j,\ell} + \frac{h_{j+1}}{2} ((au_x)_x)_{j,\ell} \right] v_{j,\ell} + R_a,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\sum_{\Delta \in \mathcal{T}_H^{(s)}} T_{a,\Delta} = \sum_{(x_j, y_\ell) \in \Omega_H} - \left[ \frac{h_j + h_{j+1}}{2} \frac{k_\ell + k_{\ell+1}}{2} ((au_x)_x)_{j,\ell} v_{j,\ell} \right] + R_a, \tag{2.46}$$

em que  $R_a$  satisfaz

$$\begin{aligned}
|R_a| &\leq \sum_{\Delta \in \mathcal{T}_H^{(s)}} \left[ \frac{h_\Delta^2}{24} (\|a\|_{\infty,\Delta} \|u_{xxx}\|_{\infty,\Delta} + 3\|(au_x)_{xx}\|_{\infty,\Delta}) \int_{\Delta} |(P_H v_H)_x| dx dy \right. \\
&\quad \left. + \frac{h_\Delta^2}{12} \|(au_x)_{xxx}\|_{\infty,\Delta} |\Delta| (|v_{\Delta,1}| + |v_{\Delta,2}| + |v_{\Delta,3}|) \right].
\end{aligned}$$

Notamos que

$$|R_a| \leq \sum_{\Delta \in \mathcal{T}_H^{(s)}} \left[ \frac{h_\Delta^2}{24} (\|a\|_{\infty, \Delta} \|u_{xxx}\|_{\infty, \Delta} + 3\|(au_x)_{xx}\|_{\infty, \Delta} + 2\|(au_x)_{xxx}\|_{\infty, \Delta}) \right. \\ \left. \left( \int_{\Delta} |(P_H v_H)_x| dx dy + |\Delta|(|v_{\Delta,1}| + |v_{\Delta,2}| + |v_{\Delta,3}|) \right) \right],$$

ou ainda, pela desigualdade de Hölder

$$|R_a| \leq C \left[ \sum_{\Delta \in \mathcal{T}_H^{(s)}} |\Delta| h_\Delta^4 (\|a\|_{\infty, \Delta} \|u_{xxx}\|_{\infty, \Delta} + \|(au_x)_{xx}\|_{1, \infty, \Delta})^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\ \left[ \sum_{\Delta \in \mathcal{T}_H^{(s)}} \frac{1}{|\Delta|} \left( \int_{\Delta} |(P_H v_H)_x| dx dy + |\Delta|(|v_{\Delta,1}| + |v_{\Delta,2}| + |v_{\Delta,3}|) \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Mas atendendo à Proposição 2.6, vem

$$\sum_{\Delta \in \mathcal{T}_H^{(s)}} \left[ \frac{1}{\sqrt{|\Delta|}} \int_{\Delta} |(P_H v_H)_x| dx dy + \sqrt{|\Delta|}(|v_{\Delta,1}| + |v_{\Delta,2}| + |v_{\Delta,3}|) \right]^2 \\ \leq C \sum_{\Delta \in \mathcal{T}_H^{(s)}} \int_{\Delta} |(P_H v_H)_x|^2 dx dy + |\Delta|(|v_{\Delta,1}|^2 + |v_{\Delta,2}|^2 + |v_{\Delta,3}|^2) \\ \leq C \|P_H v_H\|_1^2.$$

Concluimos deste modo que

$$|R_a| \leq C \left[ \sum_{\Delta \in \mathcal{T}_H^{(s)}} |\Delta| h_\Delta^4 (\|a\|_{\infty, \Delta} \|u_{xxx}\|_{\infty, \Delta} + \|(au_x)_{xx}\|_{1, \infty, \Delta})^2 \right]^{\frac{1}{2}} \|P_H v_H\|_1. \quad (2.47)$$

Finalmente, de (2.46),

$$a^{(s)}(R_H u, v_H) = -(R_H(au_x)_x, v_H)_H + R_a. \quad (2.48)$$

De igual modo se prova que

$$c^{(s)}(R_H u, v_H) = -(R_H(cu_y)_y, v_H)_H + R_c, \quad (2.49)$$

em que  $R_c$  satisfaz uma estimativa semelhante à de  $R_a$ , com  $\partial/\partial y$ ,  $k_\Delta$  e  $c$  em vez de  $\partial/\partial x$ ,  $h_\Delta$  e  $a$ , respectivamente.

Seguidamente consideramos a contribuição associada ao termo das derivadas mistas

$$\frac{1}{2}(b^{(1)} + b^{(2)}).$$

Detalhamos apenas a parte correspondente a  $(bu_x)_y$ , que denotamos por  $b_{xy}^{(s)}$ .

Consideramos, em primeiro lugar, o coeficiente de  $v_{j,\ell}$  que figura em  $b_{xy}^{(s)}(R_H u, v_H)$ ,  $s = 1, 2$ .

Seja

$$T_{b,\Delta} = b_{\Delta} \int_{\Delta} (P_H u)_x (P_H v_H)_y dx dy.$$

Consideremos os 4 triângulos de  $\mathcal{T}_H^{(1)}$  que contribuem para o coeficiente de  $v_{j,\ell}$  ( $j + \ell$  par) e que estão representados na figura seguinte.

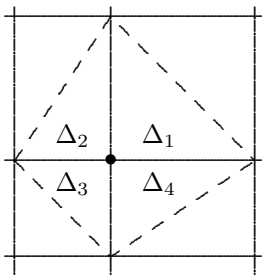


Figura 2.8: Triângulos de  $\mathcal{T}_H^{(1)}$  tais que  $T_{b,\Delta_i}$  contém o factor  $v_{j,\ell}$ .

Atendendo à igualdade

$$\sum_{i=1}^4 T_{b,\Delta_i} = \frac{b_{j,\ell}}{2} [(u_{j+1,\ell} - u_{j-1,\ell})v_{j,\ell+1} - (u_{j+1,\ell} - u_{j-1,\ell})v_{j,\ell-1}],$$

vem que  $\sum_{i=1}^4 T_{b,\Delta_i}$ , efectivamente, não apresenta qualquer contribuição para  $v_{j,\ell}$ .

Consideremos agora a triangulação  $\mathcal{T}_H^{(2)}$ . Nesta triangulação existem 8 triângulos com vértice em  $(x_j, y_\ell)$ , sendo nula a contribuição de 4 deles para o coeficiente de  $v_{j,\ell}$ . Vamos considerar seguidamente os 4 restantes.

Seja  $\Delta_7$  o triângulo de vértices

$$(x_j, y_\ell), (x_j, y_{\ell-1}), (x_{j+1}, y_{\ell-1}).$$

De  $\Delta_7$  tem-se o seguinte coeficiente de  $v_{j,\ell}$

$$T_{b,1} = \frac{1}{2} b_{j,\ell-1} (u_{j+1,\ell-1} - u_{j,\ell-1}),$$

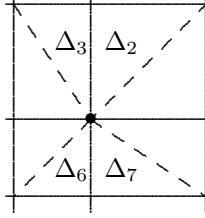


Figura 2.9: Triângulos de  $\mathcal{T}_H^{(2)}$  tais que  $T_{b,\Delta_i}$  contém o factor  $v_{j,\ell}$ .

ou ainda

$$\begin{aligned} T_{b,1} &= \frac{1}{2}b_{j,\ell}(u_{j+1,\ell} - u_{j,\ell}) - \frac{1}{2}[b_{j,\ell}(u_{j+1,\ell} - u_{j,\ell})]_y k_\ell \\ &\quad + \frac{1}{2}[b_{j,\ell}(u_{j+1,\ell} - u_{j,\ell})]_{yy} \frac{k_\ell^2}{2} - \frac{1}{2}[b_{j,\kappa}(u_{j+1,\kappa} - u_{j,\kappa})]_{yyy} \frac{k_\ell^3}{6}, \end{aligned}$$

com  $y_\kappa \in [y_{\ell-1}, y_\ell]$ .

Notemos que também se tem

$$\begin{aligned} T_{b,1} &= \frac{1}{2}b_{j,\ell}(u_{j+1,\ell} - u_{j,\ell}) - |\Delta|[(bu_x)_y]_{j,\ell} \\ &\quad + \frac{1}{2}|\Delta|[k_\ell(bu_x)_{yy} - h_{j+1}(bu_{xx})_y]_{j,\ell} + R_{b,1}, \end{aligned}$$

onde  $R_{b,1}$  satisfaz

$$\begin{aligned} |R_{b,1}| &= -\frac{1}{2}(b_{j,\ell}(u_{xxx})_{\epsilon_1,\ell})_y \frac{h_{j+1}^3}{6} k_\ell + \frac{1}{2}(b_{j,\ell}(u_{xx})_{\epsilon_2,\ell})_{yy} \frac{h_{j+1}^2}{2} \frac{k_\ell^2}{2} \\ &\quad - \frac{1}{2}(b_{j,\ell}(u_x)_{\epsilon_3,\kappa})_{yyy} h_{j+1} \frac{k_\ell^3}{6}, \end{aligned}$$

com  $x_{\epsilon_1}, x_{\epsilon_2}, x_{\epsilon_3} \in [x_j, x_{j+1}]$ .

São obtidas expressões análogas para as contribuições dos outros 3 triângulos.

Consideremos agora a soma sobre os 4 triângulos. Obtemos

$$\begin{aligned} T_{b,2} &= -\omega_{j,\ell}[(bu_x)_y]_{j,\ell} \\ &\quad + \frac{1}{8}(h_j + h_{j+1})(k_\ell^2 - k_{\ell+1}^2)[(bu_x)_{yy}]_{j,\ell} \\ &\quad + \frac{1}{8}(h_j^2 - h_{j+1}^2)(k_\ell + k_{\ell+1})[(bu_{xx})_y]_{j,\ell} \\ &\quad + R_{b,2}, \end{aligned} \tag{2.50}$$



como coeficiente de  $v_{j,\ell}$  em

$$\frac{1}{2}(b_{xy}^{(1)} + b_{xy}^{(2)})(R_H u, v_H). \quad (2.51)$$

$R_{b,2}$  corresponde à soma de  $R_{b,1}$  proveniente dos quatro triângulos.

Com o objectivo de obter (2.51) notamos que, para  $v_{j,n_1} = v_{j,n_2} = 0$ , se tem

$$\begin{aligned} & \sum_{\ell=n_1}^{n_2} [(bu_x)_{yy}]_{j,\ell} (k_\ell^2 - k_{\ell+1}^2) v_{j,\ell} \\ &= \sum_{\ell=n_1-1}^{n_2} k_{\ell+1}^3 [(bu_x)_{yyy}]_{j,\ell+\theta} v_{j,\ell} + k_{\ell+1}^3 [(bu_x)_{yy}]_{j,\ell+1} \frac{v_{j,\ell+1} - v_{j,\ell}}{k_{\ell+1}}. \end{aligned}$$

De facto

$$\begin{aligned} & \sum_{\ell=n_1}^{n_2} [(bu_x)_{yy}]_{j,\ell} (k_\ell^2 - k_{\ell+1}^2) v_{j,\ell} \\ &= \sum_{\ell=n_1}^{n_2} [(bu_x)_{yy}]_{j,\ell} k_\ell^2 v_{j,\ell} - [(bu_x)_{yy}]_{j,\ell} k_{\ell+1}^2 v_{j,\ell} \\ &= \sum_{\ell=n_1-1}^{n_2-1} [(bu_x)_{yy}]_{j,\ell+1} k_{\ell+1}^2 v_{j,\ell+1} - \sum_{\ell=n_1}^{n_2} [(bu_x)_{yy}]_{j,\ell} k_{\ell+1}^2 v_{j,\ell} \\ &= \sum_{\ell=n_1-1}^{n_2} k_{\ell+1}^2 [(bu_x)_{yy}]_{j,\ell+1} - [(bu_x)_{yy}]_{j,\ell} v_{j,\ell} \\ & \quad + k_{\ell+1}^2 [(bu_x)_{yy}]_{j,\ell+1} [v_{j,\ell+1} - v_{j,\ell}], \end{aligned}$$

com  $y_{\ell+\theta} \in [y_\ell, y_{\ell+1}]$ . Da mesma forma se prova que

$$\begin{aligned} & \sum_{j=m_1}^{m_2} [(bu_{xx})_y]_{j,\ell} (h_j^2 - h_{j+1}^2) v_{j,\ell} \\ &= \sum_{j=m_1}^{m_2} h_{j+1}^3 [(bu_{xx})_{yx}]_{j+\xi,\ell} v_{j,\ell} + h_{j+1}^3 [(bu_{xx})_y]_{j+1,\ell} \frac{v_{j+1,\ell} - v_{j,\ell}}{h_{j+1}}, \end{aligned}$$

com  $v_{m_1,\ell} = v_{m_2,\ell} = 0$ ,  $x_{j+\xi} \in [x_j, x_{j+1}]$ .

Multiplicando (2.50) por  $v_{j,\ell}$  e somando em  $\Omega_H$  obtemos

$$\frac{1}{2}(b_{xy}^{(1)} + b_{xy}^{(2)})(R_H u, v_H) = -(R_H (bu_x)_y, v_H)_H + R_b, \quad (2.52)$$

em que  $R_b$  satisfaz

$$|R_b| \leq C \left[ \sum_{\Delta \in \mathcal{T}_H^{(s)}} |\Delta| (h_\Delta^4 + k_\Delta^4) \right. \quad (2.53)$$

$$\left. (\| (bu_x)_{yy} \|_{1,\infty,\Delta}^2 + \| (bu_{xx})_y \|_{1,\infty,\Delta}^2 + \| (bu_{xxx})_y \|_{\infty,\Delta}^2)^{1/2} \| P_H v_H \|_1. \right.$$

Consideremos finalmente os termos de primeira ordem. Seja

$$T_{d,\Delta} = [P_H(dv_H)]_{\Delta,x} \int_{\Delta} (P_H u)_x dx dy.$$

Para  $\Delta$  com vértices  $(x_j, y_\ell), (x_j, y_{\ell+1}), (x_{j+1}, y_\ell)$ , temos

$$T_{d,\Delta} = \frac{d_{j+1,\ell} v_{j+1,\ell} + d_{j,\ell} v_{j,\ell}}{2} \frac{u_{j+1,\ell} - u_{j,\ell}}{h_{j+1}} \frac{h_{j+1} k_{\ell+1}}{2}.$$

Como

$$u_{j+1,\ell} = u_{j,\ell} + (u_x)_{j,\ell} h_{j+1} + (u_{xx})_{j,\ell} \frac{h_{j+1}^2}{2} + (u_{xxx})_{j+\rho_1,\ell} \frac{h_{j+1}^3}{6},$$

e

$$u_{j,\ell} = u_{j+1,\ell} - (u_x)_{j+1,\ell} h_{j+1} + (u_{xx})_{j+1,\ell} \frac{h_{j+1}^2}{2} - (u_{xxx})_{j+\rho_2,\ell} \frac{h_{j+1}^3}{6},$$

com  $x_{j+\rho_1}, x_{j+\rho_2} \in [x_j, x_{j+1}]$ , então

$$T_{d,\Delta} = \left[ \frac{d_{j+1,\ell} v_{j+1,\ell}}{2} (u_x)_{j+1,\ell} + \frac{d_{j,\ell} v_{j,\ell}}{2} (u_x)_{j,\ell} \right. \quad (2.54)$$

$$\left. - \frac{d_{j+1,\ell} v_{j+1,\ell}}{2} (u_{xx})_{j+1,\ell} \frac{h_{j+1}^2}{2} + \frac{d_{j,\ell} v_{j,\ell}}{2} (u_{xx})_{j,\ell} \frac{h_{j+1}^2}{2} \right] \frac{h_{j+1} k_{\ell+1}}{2}$$

$$+ R_{d,1},$$

em que  $R_{d,1}$  satisfaz

$$|R_{d,1}| \leq \frac{h_{j+1}^2}{12} \|d\|_{\infty,\Delta} \|u_{xxx}\|_{\infty,\Delta} |\Delta| (|v_{j+1,\ell}| + |v_{j,\ell}|). \quad (2.55)$$

Somando (2.54) sobre todos os triângulos, obtemos

$$\sum_{\Delta \in \mathcal{T}_H^{(s)}} T_{d,\Delta} = \sum_{(x_j, y_\ell) \in \Omega_H} [\omega_{j,\ell} d_{j,\ell} (u_x)_{j,\ell} v_{j,\ell}$$

$$+ d_{j,\ell} (u_{xx})_{j,\ell} (h_{j+1}^2 - h_j^2) \frac{k_\ell + k_{\ell+1}}{8} v_{j,\ell}] + R_{d,2},$$

em que  $R_{d,2}$  é a soma dos termos correspondentes a (2.55). Ou ainda,

$$\sum_{\Delta \in \mathcal{T}_H^{(s)}} T_{d,\Delta} = \sum_{(x_j, y_\ell) \in \Omega_H} [\omega_{j,\ell} d_{j,\ell}(u_x)_{j,\ell} v_{j,\ell}] + R_d,$$

em que  $R_d$  satisfaz

$$|R_d| \leq C \left[ \sum_{\Delta \in \mathcal{T}_H^{(s)}} |\Delta| h_\Delta^4 (\|d\|_{\infty,\Delta}^2 \|u_{xxx}\|_{\infty,\Delta}^2 + \|(du_{xx})_x\|_{\infty,\Delta}^2) \right]^{1/2} \|P_H v_H\|_1. \quad (2.56)$$

Desta forma concluímos que

$$d^{(s)}(R_H u, v_H) = -(R_H(du_x), v_H)_H + R_d. \quad (2.57)$$

De igual modo se prova que

$$e^{(s)}(R_H u, v_H) = -(R_H(eu_y), v_H)_H + R_e, \quad (2.58)$$

em que para  $R_e$  vale uma estimativa análoga.

Denotemos o diâmetro de  $\Delta$  por  $\text{diam}\Delta$ . A proposição que se segue é consequência imediata do que acabamos de mostrar.

**Proposição 2.10** *Sejam  $u \in C^4(\bar{\Omega})$ ,  $v_H \in \mathring{W}_H$ . Então*

$$a_H(R_H u, v_H) = (R_H(Au), v_H)_H + \tau_H(u, v_H),$$

com

$$|\tau_H(u, v_H)| \leq C \left[ \sum_{\Delta \in \mathcal{T}_H} |\Delta| (\text{diam}\Delta)^4 (\|u_x\|_{3,\infty,\Delta}^2 + \|u_y\|_{3,\infty,\Delta}^2) \right]^{1/2} \|P_H v_H\|_1,$$

em que  $C$  depende dos coeficientes de  $A$  e é independente de  $\mathcal{T}_H$  e  $u$ .

■

Na proposição anterior  $\mathcal{T}_H$  é uma das triangulações definidas em (2.16).

O resultado seguinte resume o que provámos.

**Teorema 2.11** *Suponhamos que o problema variacional (2.10) tem solução única e que a solução  $u$  do problema (2.1) está em  $C^4(\Omega)$ . Então, para  $H_{max}$  suficientemente pequeno, o problema de diferenças finitas (2.8) tem solução única,  $u_H \in \mathring{W}_H$ , que satisfaz*

$$\|P_H u_H - P_H R_H u\|_1 \leq C \left[ \sum_{\Delta \in \mathcal{T}_H} |\Delta| (\text{diam} \Delta)^4 \|u\|_{4, \infty, \Delta}^2 \right]^{1/2}. \quad (2.59)$$

**Demonstração:** A existência e unicidade de solução é consequência do Teorema 1.19. Provemos agora a estimativa (2.59). Atendendo ao Teorema 2.9

$$\begin{aligned} \|P_H u_H - P_H R_H u\|_1 &\leq C \sup_{0 \neq v_H \in \mathring{W}_H} \frac{|a_H(u_H - R_H u, v_H)|}{\|P_H v_H\|_1} \\ &= C \sup_{0 \neq v_H \in \mathring{W}_H} \frac{|a_H(u_H, v_H) - a_H(R_H u, v_H)|}{\|P_H v_H\|_1}, \end{aligned}$$

e portanto pelo Teorema 2.2, vem

$$\begin{aligned} &\|P_H u_H - P_H R_H u\|_1 \leq \\ &C \sup_{0 \neq v_H \in \mathring{W}_H} \frac{|(A_H u_H, v_H)_H - (R_H(Au), v_H)_H + \tau_H(u, v_H)|}{\|P_H v_H\|_1}. \end{aligned}$$

Finalmente, considerando  $u$  e  $u_H$ , respectivamente, as soluções de (2.1) e (2.8), obtemos

$$\begin{aligned} \|P_H u_H - P_H R_H u\|_1 &\leq C \sup_{0 \neq v_H \in \mathring{W}_H} \frac{|(R_H g, v_H)_H - (R_H g, v_H)_H + \tau_H(u, v_H)|}{\|P_H v_H\|_1} \\ &= C \sup_{0 \neq v_H \in \mathring{W}_H} \frac{|\tau_H(u, v_H)|}{\|P_H v_H\|_1}. \end{aligned}$$

■

A convergência quadrática do método de diferenças finitas (2.8) é consequência imediata da desigualdade (2.59). Atendendo a que o erro de truncatura tem ordem inferior a dois, o Teorema 2.11 estabelece a supraconvergência do método (2.8).

A solução  $u_H$  para a qual obtivemos a convergência quadrática é a solução do problema de elementos finitos linear (2.13). Logo esta apresenta convergência quadrática relativamente à norma  $\|\cdot\|_1$ , isto é, o método de elementos finitos (2.13) é superconvergente.

Finalmente observamos que são conhecidas estimativas de erro para a solução de elementos finitos linear que mostram a convergência quadrática relativamente

à norma  $\|\cdot\|_0$  e a convergência linear relativamente à norma  $\|\cdot\|_1$ , para triangulações quase uniformes. Tais estimativas podem ser vistas, por exemplo, em [9]. Mais ainda, em tais estimativas de erro, a constante de erro depende da triangulação, mais especificamente, depende da menor amplitude dos ângulos internos dos triângulos da triangulação.

## Capítulo 3

# Equação de Poisson com condição de Neumann

### 3.1 Introdução

No capítulo anterior estudamos métodos de diferenças finitas para problemas elípticos definidos em domínios poligonais e provamos a supraconvergência da aproximação obtida com tais métodos. Neste capítulo pretendemos estender a métodos de diferenças finitas para problemas elípticos com condição de Neumann para a fronteira, os resultados já estudados, usando os argumentos apresentados no Capítulo 2.

Na Secção 3.2 introduzimos a discretização da equação de Poisson com condição de Neumann definida num domínio rectangular. Na secção seguinte é definida a forma bilinear discreta  $a_H(\cdot, \cdot)$  associada à versão discreta do operador de Laplace,  $\Delta_H$ , e consideramos um operador de fronteira discreto,  $B_\Gamma$ , de modo ser válida uma versão discreta da igualdade de Green (Proposição 3.1). Finalmente, na Secção 3.4, estudamos a estabilidade do operador de diferenças e provamos o teorema de convergência que estabelece a convergência quadrática da aproximação obtida utilizando  $\Delta_H$ .

Observamos que a discretização por diferenças finitas de problemas elípticos com condições de Neumann, definidos em domínios rectangulares, foi anteriormente estudada utilizando uma abordagem diferente, por exemplo em [3], [4] e [23].

### 3.2 Método de diferenças finitas

Consideremos a equação de Poisson com condição de Neumann para a fronteira

$$\begin{cases} -\Delta u = g & \text{em } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = \varphi & \text{em } \Gamma, \end{cases} \quad (3.1)$$

em que  $\Omega = ]0, a[ \times ]0, b[$  e  $\Gamma$  denota a sua fronteira.

Geralmente um problema com condição de fronteira  $\frac{\partial u}{\partial \eta} = \varphi$  em  $\Gamma$  tem solução única. Tal não é verdade para o operador de Laplace  $\Delta$ . Prova-se facilmente que se  $u$  é solução do problema de Poisson (3.1), então

$$\int_{\Omega} g(x, y) \, dx dy = - \int_{\Gamma} \varphi(x, y) \, d\Gamma \quad (3.2)$$

e  $u + c$  também é solução, qualquer que seja a constante  $c$ .

Admitimos no que se segue que vale (3.2).

Com objectivo de definir a discretização do problema, seja  $\Lambda$  uma sucessão de  $N + M - \text{uplos}$  positivos,

$$(h, k) = (h_1, \dots, h_N, k_1, \dots, k_M),$$

que verificam

$$\sum_{j=1}^N h_j = a, \quad \sum_{\ell=1}^M k_{\ell} = b, \quad (3.3)$$

e

$$x_j = x_{j-1} + h_j, \quad j = 1, \dots, N, \quad y_{\ell} = y_{\ell-1} + k_{\ell}, \quad \ell = 1, \dots, M,$$

em que  $x_0 = 0, y_0 = 0$ . Consideramos em  $\bar{\Omega}$  a malha

$$\bar{\Omega}_H = \{(x_j, y_{\ell}) : j = 0, \dots, N, \ell = 0, \dots, M\} \quad (3.4)$$

e tal como anteriormente, seja  $\Gamma_H = \bar{\Omega}_H \cap \Gamma$ .

Iremos considerar posteriormente na definição da discretização da equação de derivadas parciais (3.1) em pontos de  $\Gamma_H$ , os seguintes pontos fictícios

$$(x_{-1}, y_{\ell}), (x_{N+1}, y_{\ell}), \quad \ell = 0, \dots, M,$$

$$(x_j, y_{-1}), (x_j, y_{M+1}), \quad j = 0, \dots, N,$$

em que

$$x_{-1} = x_0 - h_1, \quad x_{N+1} = x_N + h_N, \quad y_{-1} = y_0 - k_1 \quad \text{e} \quad y_{M+1} = y_M + k_M.$$

Seja  $\Gamma_H^*$  o conjunto de pontos fictícios e  $W_H^*$  o espaço as funções  $v_H$  definidas em  $\bar{\Omega}_H \cup \Gamma_H^*$ . Denotamos por  $\Delta_H$ , o seguinte operador de diferenças, versão discreta do operador de Laplace,

$$\Delta_H u_{j,\ell} = \delta_x^{(1/2)}(\delta_x^{(1/2)} u_{j,\ell}) + \delta_y^{(1/2)}(\delta_y^{(1/2)} u_{j,\ell}), \quad u_H \in W_H^*. \quad (3.5)$$

Sejam  $\delta_{\eta_x}$  e  $\delta_{\eta_y}$  os operadores de fronteira definidos por

$$\delta_{\eta_x} u_{j,\ell} = \eta_{x_j} \delta_x u_{j,\ell} \quad (3.6)$$

e

$$\delta_{\eta_y} u_{j,\ell} = \eta_{y_\ell} \delta_y u_{j,\ell}, \quad (3.7)$$

para  $u_H \in W_H^*$ , em que  $(\eta_{x_j}, \eta_{y_\ell})$  denota a normal unitária exterior a  $\Omega$ , em  $(x_j, y_\ell) \in \Gamma_H$ .

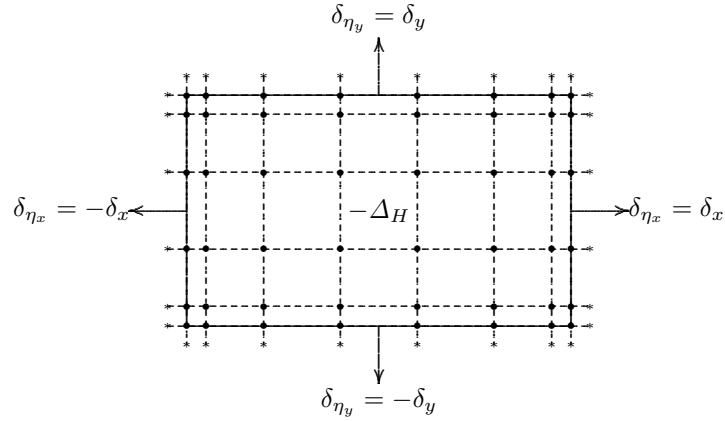


Figura 3.1: Malha  $\bar{\Omega}_H$ ,  $\Gamma_H^*$  e operadores de diferenças.

Discretizando (3.1) com os operadores  $\Delta_H$ ,  $\delta_{\eta_x}$  e  $\delta_{\eta_y}$ , obtemos o problema de diferenças

$$\begin{cases} -\Delta_H u_H = g & \text{em } \bar{\Omega}_H \\ \delta_{\eta_x} u_H + \delta_{\eta_y} u_H = \varphi & \text{em } \Gamma_H. \end{cases} \quad (3.8)$$

Notemos que associámos duas direcções normais aos vértices do rectângulo. A cada um desses pontos correspondem duas equações do tipo

$$\delta_{\eta_x} u_H + \delta_{\eta_y} u_H = \varphi.$$

Por exemplo, para o ponto  $(x, y) = (0, 0)$  consideramos as normais

$$\eta = (0, -1) \text{ e } \eta = (-1, 0),$$



a que correspondem as equações

$$\delta_y u_{0,0} = -\varphi(0^+, 0)$$

e

$$\delta_x u_{0,0} = -\varphi(0, 0^+),$$

em que

$$\varphi(0^+, 0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x, 0) \text{ e } \varphi(0, 0^+) = \lim_{y \rightarrow 0^+} \varphi(0, y).$$

### 3.3 Problema variacional discreto

Sejam

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u(x, y) \cdot \nabla v(x, y) dx dy, \quad \forall u, v \in H^1(\Omega) \quad (3.9)$$

e

$$f(v) = \int_{\Omega} g(x, y)v(x, y) dx dy + \int_{\Gamma} \varphi(x, y)v(x, y) d\Gamma, \quad \forall v \in H^1(\Omega). \quad (3.10)$$

Ao problema (3.1) podemos associar o problema variacional

$$\text{determinar } u \in H^1(\Omega) \text{ tal que } a(u, v) = f(v), \text{ para todo } v \in H^1(\Omega). \quad (3.11)$$

É nosso objectivo definir uma versão discreta do problema variacional anterior.

Sejam  $\mathcal{T}_H$  uma das triangulações de  $\Omega$  definidas por (2.16) e  $a_H(\cdot, \cdot)$  a forma bilinear discreta definida em  $W_H^* \times W_H^*$  por

$$a_H(v_H, w_H) = \sum_{\Delta \in \mathcal{T}_H} \int_{\Delta} [(P_H v_H)_x (P_H w_H)_x + (P_H v_H)_y (P_H w_H)_y] dx dy. \quad (3.12)$$

Consideremos em  $W_H^*$  o produto interno

$$(v_H, w_H)_H = \sum_{(x_j, y_\ell) \in \bar{\Omega}_H} \omega_{j,\ell} v_{j,\ell} w_{j,\ell}, \quad (3.13)$$

em que os pesos  $\omega_{j,\ell}$  são definidos por

$$\omega_{j,\ell} = \frac{h_j + h_{j+1}}{2} \frac{k_\ell + k_{\ell+1}}{2}, \quad j = 1, \dots, N-1, \ell = 1, \dots, M-1,$$

$$\omega_{0,\ell} = \frac{h_1}{2} \frac{k_\ell + k_{\ell+1}}{2}, \quad \omega_{N,\ell} = \frac{h_N}{2} \frac{k_\ell + k_{\ell+1}}{2}, \quad \ell = 1, \dots, M-1,$$

$$\omega_{j,0} = \frac{h_j + h_{j+1}}{2} \frac{k_1}{2}, \omega_{j,M} = \frac{h_j + h_{j+1}}{2} \frac{k_M}{2}, j = 1, \dots, N-1,$$

$$\omega_{0,0} = \frac{h_1}{2} \frac{k_1}{2}, \omega_{0,M} = \frac{h_1}{2} \frac{k_M}{2}, \omega_{N,0} = \frac{h_N}{2} \frac{k_1}{2}, \omega_{N,M} = \frac{h_N}{2} \frac{k_M}{2}.$$

Traçando as mediatrizes dos segmentos de recta que unem pontos adjacentes da malha obtemos uma partição de  $\bar{\Omega}$  em rectângulos, como mostra a figura 3.2. Cada peso  $\omega_{j,\ell}$  corresponde à área do rectângulo ao qual  $(x_j, y_\ell)$  pertence.

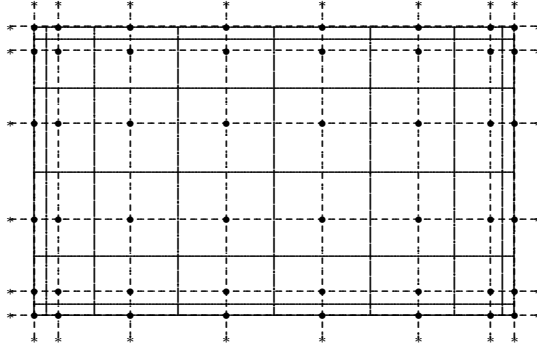


Figura 3.2: Pesos  $\omega_{j,\ell}$ .

É fácil constatar que

$$\begin{aligned} (-\delta_x^{(1/2)}(\delta_x^{(1/2)}v_H), w_H)_H &= \sum_{\Delta \in \mathcal{T}_H} \int_{\Delta} (P_H v_H)_x (P_H w_H)_x \\ &+ \sum_{\ell=1}^{M-1} \frac{k_\ell + k_{\ell+1}}{2} \delta_x v_{0,\ell} w_{0,\ell} \\ &+ \frac{k_1}{2} \delta_x v_{0,0} w_{0,0} + \frac{k_M}{2} \delta_x v_{0,M} w_{0,M} \\ &- \sum_{\ell=1}^{M-1} \frac{k_\ell + k_{\ell+1}}{2} \delta_x v_{N,\ell} w_{N,\ell} \\ &- \frac{k_1}{2} \delta_x v_{N,0} w_{N,0} - \frac{k_M}{2} \delta_x v_{N,M} w_{N,M}, \end{aligned} \tag{3.14}$$

sendo também válida a igualdade análoga para a variável  $y$ .

52CAPÍTULO 3. EQUAÇÃO DE POISSON COM CONDIÇÃO DE NEUMANN

Seja  $L^2(\Gamma_H)$  o espaço das funções de rede definidas em  $\Gamma_H$ . Neste espaço consideramos o produto interno

$$(v_H, w_H)_{\Gamma_H} = \sum_{(x_j, y_\ell) \in \Gamma_H} \omega_{\Gamma_j, \ell} v_{j, \ell} w_{j, \ell}, \quad (3.15)$$

em que

$$\begin{aligned} \omega_{\Gamma_j, \ell} &= \frac{k_\ell + k_{\ell+1}}{2}, \quad j = 0, N, \ell = 1, \dots, M-1, \\ \omega_{\Gamma_j, \ell} &= \frac{h_j + h_{j+1}}{2}, \quad j = 1, \dots, N-1, \ell = 0, M, \\ \omega_{\Gamma_{0,0}} &= \frac{h_1}{2} + \frac{k_1}{2}, \quad \omega_{\Gamma_{N,0}} = \frac{h_N}{2} + \frac{k_1}{2}, \\ \omega_{\Gamma_{0,M}} &= \frac{h_1}{2} + \frac{k_M}{2}, \quad \omega_{\Gamma_{N,M}} = \frac{h_N}{2} + \frac{k_M}{2}. \end{aligned}$$

Seja  $B_\Gamma$  um operador de fronteira definido por

$$B_\Gamma v_{j, \ell} = \begin{cases} \delta_{\eta_x} v_{j, \ell} & \text{se } j = 0, N, \ell = 1, \dots, M-1, \\ \delta_{\eta_y} v_{j, \ell} & \text{se } j = 1, \dots, N-1, \ell = 0, M, \\ \frac{1}{h_1 + k_1} (k_1 \delta_{\eta_x} + h_1 \delta_{\eta_y}) v_{j, \ell} & \text{se } j = 0, \ell = 0, \\ \frac{1}{h_1 + k_M} (k_M \delta_{\eta_x} + h_1 \delta_{\eta_y}) v_{j, \ell} & \text{se } j = 0, \ell = M, \\ \frac{1}{h_N + k_1} (k_1 \delta_{\eta_x} + h_N \delta_{\eta_y}) v_{j, \ell} & \text{se } j = N, \ell = 0, \\ \frac{1}{h_N + k_M} (k_M \delta_{\eta_x} + h_N \delta_{\eta_y}) v_{j, \ell} & \text{se } j = N, \ell = M. \end{cases} \quad (3.16)$$

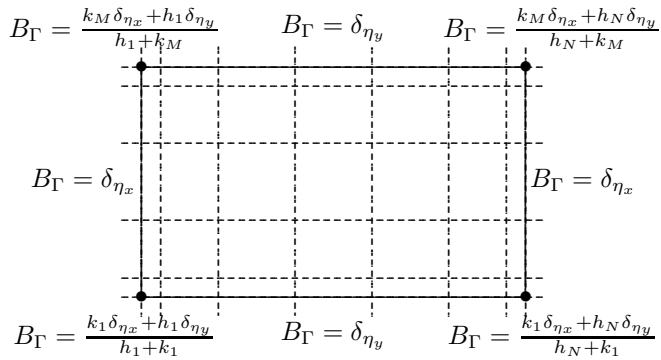


Figura 3.3: Operador de fronteira.

O resultado seguinte é consequência da igualdade (3.14), da correspondente igualdade para a variável  $y$  e da definição do produto interno  $(\cdot, \cdot)_{\Gamma_H}$ .

**Proposição 3.1** *Sejam  $\Delta_H$ ,  $a_H(\cdot, \cdot)$  e  $B_\Gamma$  definidos em (3.5), (3.12) e (3.16), respectivamente. Então*

$$(-\Delta_H v_H, w_H)_H = a_H(v_H, w_H) - (B_\Gamma v_H, w_H)_{\Gamma_H}, \quad (3.17)$$

para  $v_H$  e  $w_H \in W_H^*$ .

■

Atendendo à igualdade (3.17), associamos a (3.8), o seguinte problema variacional

determinar  $u_H \in W_H^*$  tal que

$$a_H(u_H, v_H) = (R_H g, v_H)_H + (\tilde{\varphi}_H, v_H)_{\Gamma_H}, \quad \forall v_H \in W_H^*, \quad (3.18)$$

em que

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_{j,\ell} &= \varphi_{j,\ell}, \quad j = 0, N, \ell = 1, \dots, M-1 \text{ ou } j = 1, \dots, N-1, \ell = 0, M, \\ \tilde{\varphi}_{0,0} &= \frac{k_1 \varphi(0, 0^+) + h_1 \varphi(0^+, 0)}{h_1 + k_1}, \quad \tilde{\varphi}_{N,0} = \frac{k_1 \varphi(1, 0^+) + h_N \varphi(1^-, 0)}{h_N + k_1}, \\ \tilde{\varphi}_{0,M} &= \frac{k_M \varphi(0, 1^-) + h_1 \varphi(0^+, 1)}{h_1 + k_M}, \quad \tilde{\varphi}_{N,M} = \frac{k_M \varphi(1, 1^-) + h_N \varphi(1^-, 1)}{h_N + k_M}. \end{aligned}$$

### 3.4 Estabilidade e convergência

Atendendo a que

$$a(v, v) = \|v\|_1^2 - \|v\|_0^2, \quad \forall v \in H^1(\Omega),$$

então forma bilinear  $a(\cdot, \cdot)$  é  $H^1(\Omega)$ -coerciva.

Para a função constante  $c$

$$a(u, c) = 0, \quad \forall u \in H^1(\Omega),$$

e portanto, uma condição necessária à existência de solução de (3.11) é  $f(1) = 0$ , ou seja,

$$\int_{\Omega} g(x, y) \, dx dy = - \int_{\Gamma} \varphi(x, y) \, d\Gamma,$$

que é a condição (3.2) que admitimos ser válida. Como  $a(\cdot, \cdot)$  é simétrica, pelo Teorema 1.9, temos que (3.2) é, também, uma condição suficiente para que (3.11) tenha solução.

Na proposição seguinte mostramos a unicidade de solução no espaço

$$V = \{v \in H^1(\Omega) : \int_{\Omega} v(x, y) \, dx dy = 0\}.$$

**Proposição 3.2** *A forma bilinear definida em (3.9) é  $V$ -elíptica*

**Demonstração:** Pela desigualdade de Friedrichs ([1]), existe uma constante positiva  $C_\Omega$  que satisfaz

$$\|v - \tilde{v}\|_0 \leq C_\Omega |v|_1 = C_\Omega \sqrt{a(v, v)}, \quad \forall v \in H^1(\Omega), \quad (3.19)$$

em que

$$\tilde{v} = \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega v(x, y) \, dx dy.$$

Se  $v \in V$  então  $\tilde{v} = 0$  e portanto

$$\|v\|_0^2 \leq C_\Omega^2 a(v, v),$$

logo

$$\|v\|_0^2 + |v|_1^2 \leq (1 + C_\Omega^2) a(v, v).$$

Deste modo vem

$$a(v, v) \geq \frac{1}{1 + C_\Omega^2} \|v\|_1^2, \quad \forall v \in V.$$

A continuidade de  $a(\cdot, \cdot)$  é consequência imediata do Teorema 1.17. ■

Vejamos seguidamente um resultado de estabilidade para a forma bilinear  $a_H(\cdot, \cdot)$ .

Seja

$$V_H = \{v_H \in W_H^* : P_H v_H \in V\}. \quad (3.20)$$

Como  $a(\cdot, \cdot)$  é elíptica em  $V$  concluímos o resultado seguinte.

**Proposição 3.3** *Existe uma constante positiva  $C$ , tal que*

$$\|P_H v_H\|_1 \leq C \sup_{0 \neq w_H \in V_H} \frac{|a(P_H v_H, P_H w_H)|}{\|P_H w_H\|_1}, \quad \forall v_H \in V_H. \quad (3.21)$$

■

Atendendo a

$$a_H(v_H, w_H) = a(P_H v_H, P_H w_H), \quad \forall v_H, w_H \in V_H,$$

de imediato obtemos para  $a_H(\cdot, \cdot)$  uma desigualdade análoga a (3.21).

**Teorema 3.4** *Existe uma constante positiva  $C$ , tal que*

$$\|P_H v_H\|_1 \leq C \sup_{0 \neq w_H \in V_H} \frac{|a_H(v_H, w_H)|}{\|P_H w_H\|_1}, \quad v_H \in V_H. \quad (3.22)$$

■

Utilizando a desigualdade (3.22), facilmente obtemos uma estimativa para  $\|P_H R_H u - P_H u_H\|_1$ , com  $u$  e  $u_H$ , respectivamente, as soluções dos problemas (3.1) e (3.8), estimando

$$a_H(R_H u, w_H) - (R_H g, w_H)_H - (\tilde{\varphi}_H, w_H)_{\Gamma_H}.$$

Seja  $u \in C^4(\bar{\Omega})$ . Temos

$$\begin{aligned} & \sum_{\Delta \in \mathcal{T}_H} \int_{\Delta} (P_H R_H u)_x (P_H v_H)_x \, dx dy \\ &= - \sum_{j=1}^N \sum_{\ell=1}^M \left( \frac{u_{j,\ell-1} - u_{j-1,\ell-1}}{h_j} \frac{v_{j,\ell-1} - v_{j-1,\ell-1}}{h_j} \right. \\ & \quad \left. + \frac{u_{j,\ell} - u_{j-1,\ell}}{h_j} \frac{v_{j,\ell} - v_{j-1,\ell}}{h_j} \right) \frac{h_j k_\ell}{2}, \quad \forall v_H \in W_H^*. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Atendendo a

$$\frac{u_{j,\ell} - u_{j-1,\ell}}{h_j} = (u_x)_{j-1,\ell} + (u_{xx})_{j-1,\ell} \frac{h_j}{2} + (u_{xxx})_{j-1,\ell} \frac{h_j^2}{6} + (u_{xxxx})_{j-\zeta_1,\ell} \frac{h_j^3}{24}, \quad (3.24)$$

e

$$\frac{u_{j,\ell} - u_{j-1,\ell}}{h_j} = (u_x)_{j,\ell} - (u_{xx})_{j,\ell} \frac{h_j}{2} + (u_{xxx})_{j,\ell} \frac{h_j^2}{6} - (u_{xxxx})_{j-\zeta_2,\ell} \frac{h_j^3}{24}, \quad (3.25)$$

com  $x_{j-\zeta_1}, x_{j-\zeta_2} \in [x_{j-1}, x_j]$ , substituindo de forma conveniente (3.24) e (3.25) em (3.23), obtemos

$$\begin{aligned} & \sum_{\Delta \in \mathcal{T}_H} \int_{\Delta} (P_H R_H u)_x (P_H v_H)_x \, dx dy = \\ &= - \sum_{j=0}^N \sum_{\ell=0}^M \omega_{j,\ell} (u_{xx})_{j,\ell} v_{j,\ell} \\ & \quad + \sum_{\ell=1}^{M-1} \left[ \frac{k_\ell + k_{\ell+1}}{2} (u_x)_{N,\ell} v_{N,\ell} \right] + \frac{k_1}{2} (u_x)_{N,0} v_{N,0} + \frac{k_M}{2} (u_x)_{N,M} v_{N,M} \\ & \quad - \sum_{\ell=1}^{M-1} \left[ \frac{k_\ell + k_{\ell+1}}{2} (u_x)_{0,\ell} v_{0,\ell} \right] - \frac{k_1}{2} (u_x)_{0,0} v_{0,0} - \frac{k_M}{2} (u_x)_{0,M} v_{0,M} \\ & \quad + R_x, \end{aligned}$$

em que  $R_x$  satisfaz

$$|R_x| \leq C \left[ \sum_{\Delta \in \mathcal{T}_H} |\Delta| h_\Delta^4 (\|u_{xxx}\|_{\infty, \Delta} + \|(u_x)_{xx}\|_{1, \infty, \Delta})^2 \right]^{1/2} \|P_H v_H\|_1.$$

Uma estimativa análoga é válida para

$$\sum_{\Delta \in \mathcal{T}_H} \int_{\Delta} (P_H R_H u)_y (P_H v_H)_y \, dx dy.$$

Provamos, deste modo, o seguinte resultado.

**Proposição 3.5** *Seja  $u \in C^4(\bar{\Omega})$  solução de (3.1). Então*

$$a_H(R_H u, v_H) = (R_H(-\Delta u), v_H)_H + (\tilde{\varphi}_H, v_H)_{\Gamma_H} + \tau_H(u, v_H), \quad (3.26)$$

em que

$$|\tau_H(u, v_H)| \leq C \left[ \sum_{\Delta \in \mathcal{T}_H} |\Delta| (\text{diam} \Delta)^4 (\|u_x\|_{3, \infty, \Delta}^2 + \|u_y\|_{3, \infty, \Delta}^2) \right]^{1/2} \|P_H v_H\|_1, \quad (3.27)$$

com  $C$  independente de  $u$  e da triangulação  $\mathcal{T}_H$ .

■

A estimativa obtida para o erro de truncatura (3.27) e o resultado de estabilidade 3.4 permitem-nos obter uma estimativa para o erro global.

**Teorema 3.6** *Suponhamos que a solução do problema (3.1) pertence a  $C^4(\bar{\Omega})$ . Então o problema (3.18) tem solução única  $u_H \in V_H$  que satisfaz*

$$\|P_H u_H - P_H R_H u\|_1 \leq C \left[ \sum_{\Delta \in \mathcal{T}_H} |\Delta| (\text{diam} \Delta)^4 \|u\|_{4, \infty, \Delta}^2 \right]^{1/2}, \quad (3.28)$$

em que  $u$  é a solução de (3.1) que verifica  $\int_{\Omega} P_H R_H u \, dx dy = 0$ .

**Demonstração:** Pelo Teorema 3.4, vale a seguinte estimativa

$$\begin{aligned} \|P_H u_H - P_H R_H u\|_1 &\leq C \sup_{0 \neq v_H \in V_H} \frac{|a_H(u_H - R_H u, v_H)|}{\|P_H v_H\|_1} \\ &= C \sup_{0 \neq v_H \in V_H} \frac{|a_H(u_H, v_H) - a_H(R_H u, v_H)|}{\|P_H v_H\|_1}. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Atendendo a (3.26) temos

$$\begin{aligned} a_H(u_H, v_H) - a_H(R_H u, v_H) &= (-\Delta_H u_H, v_H)_H + (B_\Gamma u_H, v_H)_{\Gamma_H} \\ &\quad - (R_H(-\Delta u), v_H)_H - (\tilde{\varphi}_H, v_H)_{\Gamma_H} \\ &\quad - \tau_H(u, v_H), \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} a_H(u_H, v_H) - a_H(R_H u, v_H) &= (R_H g, v_H)_H - (\tilde{\varphi}_H, v_H)_{\Gamma_H} \\ &\quad - (R_H g, v_H)_H + (\tilde{\varphi}_H, v_H)_{\Gamma_H} \\ &\quad - \tau_H(u, v_H). \end{aligned} \tag{3.30}$$

Conjugando (3.29) com (3.30), obtemos

$$\|P_H u_H - P_H R_H u\|_1 \leq C \sup_{0 \neq v_H \in V_H} \frac{|\tau_H(u, v_H)|}{\|P_H v_H\|_1}.$$

■

Observamos finalmente que a desigualdade (3.28) traduz a convergência quadrática do método de diferenças finitas (3.8). Atendendo à equivalência entre o método de diferenças e o método de elementos finitos linear (3.18), obtemos ainda a convergência quadrática relativamente à norma  $\|\cdot\|_1$  deste último método.





## Capítulo 4

# Sistemas de equações diferenciais

### 4.1 Introdução

Nos Capítulos 2 e 3 estudámos a convergência de métodos de diferenças finitas para equações com derivadas parciais elípticas. Atendendo à equivalência entre os métodos anteriores e certos métodos de elementos finitos, obtivemos também a convergência quadrática da solução dos últimos métodos.

Na modelação matemática de muitas situações físicas surgem sistemas de equações diferenciais. Atendendo a este facto, os métodos de diferenças finitas para sistemas de equações diferenciais assumem um papel de relevo na resolução numérica de certos problemas.

Neste capítulo pretendemos estender alguns resultados obtidos no Capítulo 2 a métodos de diferenças finitas para sistemas diferenciais. Assim, consideramos um problema de elasticidade característico da Mecânica dos Sólidos e estudamos métodos de diferenças finitas que generalizam os considerados anteriormente. Na Secção 4.2 apresentamos o problema de elasticidade plano e introduzimos um problema variacional associado. Seguindo [1], nesta secção estudamos alguns resultados de existência e unicidade da solução do último problema. Na Secção 4.3 introduzimos o método de diferenças finitas e, utilizando a técnica largamente usada nos capítulos anteriores, estudamos as suas propriedades de convergência.

## 4.2 Problema de elasticidade

Sejam  $v = (v_1, v_2)^t$  e  $\tau = (\tau_{i,j})_{1 \leq i,j \leq 2}$  funções de duas variáveis. Definimos

$$\operatorname{div} v = \partial v_1 / \partial x + \partial v_2 / \partial y, \quad \operatorname{rot} v = -\partial v_1 / \partial y + \partial v_2 / \partial x,$$

$$\operatorname{grad} v = \begin{pmatrix} \partial v_1 / \partial x & \partial v_1 / \partial y \\ \partial v_2 / \partial x & \partial v_2 / \partial y \end{pmatrix},$$

$$\epsilon(v) = \frac{1}{2} (\operatorname{grad} v + (\operatorname{grad} v)^t),$$

e

$$\operatorname{div} \tau = \begin{pmatrix} \partial \tau_{11} / \partial x + \partial \tau_{12} / \partial y \\ \partial \tau_{21} / \partial x + \partial \tau_{22} / \partial y \end{pmatrix}.$$

Consideremos no conjunto das matrizes reais de ordem 2,  $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ , o seguinte produto interno

$$A : B = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 a_{ij} b_{ij},$$

em que  $A = (a_{ij})$  e  $B = (b_{ij})$ . Por  $\operatorname{tr}(A)$  denotamos o traço da matriz  $A$ ,

$$\operatorname{tr}(A) = a_{11} + a_{22},$$

e, finalmente, sejam

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \chi = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Consideremos um material elástico que na ausência de forças externas ocupa a região limitada por  $\bar{\Omega}$  (com fronteira  $\Gamma$  de Lipschitz). Supomos que o material é homogéneo e isótropo, i.e., as propriedades elásticas são as mesmas em todas as direcções.

Admitimos, por simplicidade, que  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  (sendo o tratamento análogo quando  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ).

Representamos por  $u = (u_1, u_2)$  o vector de deslocamento dos pontos de  $\Omega$  quando o corpo está sujeito à acção de uma força  $f = (f_1, f_2)$ .

Por  $\sigma(u)$  denotamos as tensões definidas por

$$\sigma(u) = 2\mu\epsilon(u) + \lambda\operatorname{tr}(\epsilon(u))I,$$

em que  $(\epsilon(u))_{i,j}$ ,  $1 \leq i, j \leq 2$ , representam as componentes de deformação associadas ao deslocamento  $u$  e  $\mu$  e  $\lambda$  denotam as constantes de Lamé.

Se  $g$  descreve o deslocamento dos pontos da fronteira, prova-se que o deslocamento  $u$  é solução do problema de condição de fronteira

$$\begin{cases} -\operatorname{div} \sigma(u) = f & \text{em } \Omega \\ u = g & \text{em } \Gamma. \end{cases} \quad (4.1)$$

Consideremos em  $\mathbf{H}_0^1(\Omega) = H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$  a norma

$$\|v\|_1 = (\|v_1\|_1^2 + \|v_2\|_1^2)^{1/2}, \quad v = (v_1, v_2) \in \mathbf{H}_0^1(\Omega),$$

e em  $\mathbf{L}^2(\Omega) = L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$  a norma

$$\|v\|_0 = (\|v_1\|_0^2 + \|v_2\|_0^2)^{1/2}, \quad v = (v_1, v_2) \in \mathbf{L}^2(\Omega).$$

Definimos seguidamente um problema variacional associado ao problema (4.1). Seja  $u$  a solução de (4.1). Integrando por partes obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f.v \, dx dy &= - \int_{\Omega} \operatorname{div} \sigma(u).v \, dx dy \\ &= \int_{\Omega} \{2\mu\epsilon(u) + \lambda \operatorname{tr}(\epsilon(u))I\} : \operatorname{grad} v \, dx dy, \end{aligned}$$

para todo  $v \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ .

Seja

$$a(u, v) = \int_{\Omega} 2\mu \epsilon(u) : \epsilon(v) + \lambda \operatorname{div} u \operatorname{div} v \, dx dy, \quad u \in \mathbf{H}^1(\Omega), v \in \mathbf{H}_0^1(\Omega). \quad (4.2)$$

Atendendo a que

$$\operatorname{grad} v = \epsilon(v) + \frac{1}{2}(\operatorname{rot} v)\chi,$$

$$\lambda \operatorname{tr}(\epsilon(u)) I : \frac{1}{2}(\operatorname{rot} v)\chi = 0,$$

e

$$\lambda \operatorname{tr}(\epsilon(u)) I : \epsilon(v) = \lambda \operatorname{div} u \operatorname{div} v,$$

associamos ao problema (4.1) o problema variacional

determinar  $u \in \mathbf{H}^1(\Omega)$  tal que  $u|_{\Gamma} = g$  e

$$a(u, v) = \int_{\Omega} f.v \, dx dy, \quad \text{para todo } v \in \mathbf{H}_0^1(\Omega). \quad (4.3)$$

Provemos seguidamente que o problema (4.3) tem solução única.

**Proposição 4.1** *Existe uma constante positiva  $C$  tal que*

$$\int_{\Omega} \epsilon(v) : \epsilon(v) \, dxdy \geq C \|v\|_1^2, \quad \forall v \in \mathbf{H}_0^1(\Omega). \quad (4.4)$$

**Demonstração:** Seja  $v \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ . Temos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \epsilon(v) : \epsilon(v) \, dxdy &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left( \frac{\partial v_1}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_1}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_2}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_2}{\partial y} \right)^2 \, dxdy \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left( \frac{\partial v_1}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial v_1}{\partial y} \frac{\partial v_2}{\partial x} + \left( \frac{\partial v_2}{\partial y} \right)^2 \, dxdy. \end{aligned}$$

Atendendo à igualdade

$$\int_{\Omega} \frac{\partial v_1}{\partial y} \frac{\partial v_2}{\partial x} \, dxdy = \int_{\Omega} \frac{\partial v_1}{\partial x} \frac{\partial v_2}{\partial y} \, dxdy, \quad (4.5)$$

então

$$\int_{\Omega} \left( \frac{\partial v_1}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial v_1}{\partial y} \frac{\partial v_2}{\partial x} + \left( \frac{\partial v_2}{\partial y} \right)^2 \, dxdy = \int_{\Omega} \left( \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} \right)^2 \, dxdy \geq 0$$

e portanto

$$\int_{\Omega} \epsilon(v) : \epsilon(v) \, dxdy \geq \frac{1}{2} (|v_1|_1^2 + |v_2|_1^2).$$

Como  $v_1, v_2 \in H_0^1(\Omega)$  e as normas  $|\cdot|_1$  e  $\|\cdot\|_1$  são equivalentes nesse espaço, concluímos (4.4). ■

Como consequência imediata da proposição anterior obtemos a elípticidade da forma bilinear (4.2).

**Teorema 4.2** *A forma bilinear  $a(\cdot, \cdot)$  definida em (4.2) é  $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$ -elíptica.*

**Demonstração:** Atendendo a

$$a(v, v) = \int_{\Omega} 2\mu \epsilon(v) : \epsilon(v) + \lambda \operatorname{div} v \operatorname{div} v \, dxdy, \quad \forall v \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$$

e, como a segunda parcela é sempre não negativa, pela Proposição 4.1, vem

$$a(v, v) \geq 2\mu C \|v\|_1^2, \quad \forall v \in \mathbf{H}_0^1(\Omega). \quad (4.6)$$

■

Suponhamos que existe  $w \in \mathbf{H}^1(\Omega)$  tal que  $w|_r = g$ . Seja  $u^* = u - w$ . O problema (4.3) é equivalente a determinar  $u^* \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ , tal que

$$a(u^*, v) = \int_{\Omega} f \cdot v \, dxdy - \int_{\Omega} 2\mu \epsilon(w) : \epsilon(v) + \lambda \operatorname{div} w \operatorname{div} v \, dxdy, \quad (4.7)$$

para todo  $v \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ . Pelo Teorema 1.6 concluímos que (4.7) tem solução única, logo (4.3) tem também solução única. Desta forma, provámos o resultado seguinte.

**Teorema 4.3** *Se existe  $w \in \mathbf{H}^1(\Omega)$  tal que  $w|_{\Gamma} = g$  então o problema variacional (4.3) tem solução única.*

■

### 4.3 Método de diferenças finitas

Seja  $\Omega$  uma união de rectângulos e sejam  $\Omega_H$ ,  $\bar{\Omega}_H$  e  $\Gamma_H$  definidos por (2.3). Denotamos por  $\mathbf{W}_H$  o conjunto das funções  $v_H = (v_{1H}, v_{2H})$  definidas em  $\bar{\Omega}_H$ , ou seja,  $\mathbf{W}_H = W_H \times W_H$ .

Atendendo à igualdade

$$-\operatorname{div} \sigma(u) = -(2\mu + \lambda) \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} \end{bmatrix} - \mu \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} \end{bmatrix} - (\mu + \lambda) \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial y} \end{bmatrix},$$

consideramos, na definição de uma aproximação para a solução de (4.1), o seguinte método de diferenças finitas

$$\begin{cases} A_H u_H = f & \text{em } \Omega_H \\ u_H = g & \text{em } \Gamma_H, \end{cases} \quad (4.8)$$

em que

$$\begin{aligned} A_H u_H &= -(2\mu + \lambda) \begin{bmatrix} \delta_x^{(1/2)} (\delta_x^{(1/2)}) u_{1H} \\ \delta_y^{(1/2)} (\delta_y^{(1/2)}) u_{2H} \end{bmatrix} - \mu \begin{bmatrix} \delta_y^{(1/2)} (\delta_y^{(1/2)}) u_{1H} \\ \delta_x^{(1/2)} (\delta_x^{(1/2)}) u_{2H} \end{bmatrix} \\ &\quad - (\mu + \lambda) \begin{bmatrix} \delta_y \delta_x u_{2H} \\ \delta_y \delta_x u_{1H} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Consideremos em  $\bar{\Omega}$  as triangulações  $\mathcal{T}_H^{(s)}$ ,  $s = 1, 2$ , definidas por (2.16). Seja

$$P_H^{(s)} v_H = (P_H^{(s)} v_{1H}, P_H^{(s)} v_{2H}),$$

em que  $P_H^{(s)} v_{iH}$ ,  $i = 1, 2$ , representa o polinómio interpolador segmentado linear de  $v_{iH} \in W_H$  relativamente a  $\mathcal{T}_H^{(s)}$ .

Consideremos a forma bilinear  $a_H(\cdot, \cdot) : \mathbf{W}_H \times \mathbf{W}_H \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$a_H = \frac{1}{2}(a_H^{(1)} + a_H^{(2)}), \quad (4.10)$$

em que

$$\begin{aligned} a_H^{(s)}(u_H, v_H) &= \sum_{\Delta \in \mathcal{T}_H^{(s)}} \int_{\Delta} [2\mu \epsilon(P_H^{(s)} u_H) : \epsilon(P_H^{(s)} v_H) \\ &\quad + \lambda \operatorname{div}(P_H^{(s)} u_H) \operatorname{div}(P_H^{(s)} v_H)] \, dx dy, \end{aligned} \quad (4.11)$$

$u_H, v_H \in \mathbf{W}_H$ ,  $s = 1, 2$ .

Para  $w_H, z_H \in W_H$  consideramos

$$a_{xxH}^{(s)}(w_H, z_H) = \sum_{\Delta \in \mathcal{T}_H^{(s)}} \int_{\Delta} (P_H^{(s)} w_H)_x (P_H^{(s)} z_H)_x \, dx dy,$$

$$a_{yyH}^{(s)}(w_H, z_H) = \sum_{\Delta \in \mathcal{T}_H^{(s)}} \int_{\Delta} (P_H^{(s)} w_H)_y (P_H^{(s)} z_H)_y \, dx dy,$$

$$a_{xyH}^{(s)}(w_H, z_H) = \frac{1}{2} \sum_{\Delta \in \mathcal{T}_H^{(s)}} \int_{\Delta} (P_H^{(s)} w_H)_x (P_H^{(s)} z_H)_y + (P_H^{(s)} w_H)_y (P_H^{(s)} z_H)_x \, dx dy.$$

Atendendo a (4.5), é fácil verificar que

$$\begin{aligned} a_H^{(s)}(u_H, v_H) &= (2\mu + \lambda) a_{xxH}^{(s)}(u_{1H}, v_{1H}) + \mu a_{yyH}^{(s)}(u_{1H}, v_{1H}) \\ &\quad + (\mu + \lambda) a_{xyH}^{(s)}(u_{2H}, v_{1H}) \\ &\quad + (2\mu + \lambda) a_{yyH}^{(s)}(u_{2H}, v_{2H}) + \mu a_{xxH}^{(s)}(u_{2H}, v_{2H}) \\ &\quad + (\mu + \lambda) a_{xyH}^{(s)}(u_{1H}, v_{2H}), \quad u_H \in \mathbf{W}_H, v_H \in \overset{\circ}{\mathbf{W}}_H. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Em  $\mathbf{W}_H$  consideramos o produto interno

$$\begin{aligned} (u_H, v_H)_H &= (u_{1H}, v_{1H})_H + (u_{2H}, v_{2H})_H \\ &= \sum_{(x_j, y_\ell) \in \bar{\Omega}_H} \omega_{j,\ell} (u_{1j,\ell} v_{1j,\ell} + u_{2j,\ell} v_{2j,\ell}), \end{aligned} \quad (4.13)$$

em que

$$\omega_{j,\ell} = \frac{h_j + h_{j+1}}{2} \frac{k_\ell + k_{\ell+1}}{2}. \quad (4.14)$$

Notemos que

$$\begin{aligned}
(A_H u_H, v_H)_H &= -(2\mu + \lambda) \left( \delta_x^{(1/2)} (\delta_x^{(1/2)} u_{1H}), v_{1H} \right)_H \\
&\quad - \mu \left( \delta_y^{(1/2)} (\delta_y^{(1/2)} u_{1H}), v_{1H} \right)_H \\
&\quad - (\mu + \lambda) (\delta_y \delta_x u_{2H}, v_{1H})_H \\
&\quad - (2\mu + \lambda) \left( \delta_x^{(1/2)} (\delta_x^{(1/2)} u_{2H}), v_{2H} \right)_H \\
&\quad - \mu \left( \delta_y^{(1/2)} (\delta_y^{(1/2)} u_{2H}), v_{2H} \right)_H \\
&\quad - (\mu + \lambda) (\delta_y \delta_x u_{1H}, v_{2H})_H. \tag{4.15}
\end{aligned}$$

Atendendo às igualdades (4.12) e (4.15) facilmente podemos generalizar para o caso vectorial os resultados estudados no caso escalar.

**Teorema 4.4** *Sejam  $A_H$  o operador de diferenças definido por (4.9) e  $a_H(\cdot, \cdot)$  a forma bilinear definida por (4.10). Então*

$$(A_H u_H, v_H)_H = a_H(u_H, v_H), \quad \forall u_H \in \mathbf{W}_H, \quad \forall v_H \in \overset{\circ}{\mathbf{W}}_H. \tag{4.16}$$

■

Atendendo a que

$$a_H^{(s)}(v_H, w_H) = a(P_H^{(s)} v_H, P_H^{(s)} w_H), \quad \forall v_H, w_H \in \mathbf{W}_H$$

e  $a(\cdot, \cdot)$  é  $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$ -elíptica, então, pelo Teorema 1.6, concluímos a desigualdade para a estabilidade de  $a_H(\cdot, \cdot)$ .

**Teorema 4.5** *Existe uma constante  $C$  tal que*

$$\|P_H v_H\|_1 \leq C \sup_{0 \neq w_H \in \overset{\circ}{\mathbf{W}}_H} \frac{|a_H(v_H, w_H)|}{\|P_H w_H\|_1}, \quad \forall v_H \in \overset{\circ}{\mathbf{W}}_H. \tag{4.17}$$

■

Atendendo a (4.12), (4.13) e às estimativas deduzidas na Secção 2.5 do Capítulo 2, é fácil provar o resultado seguinte.

**Proposição 4.6** *Sejam  $u \in \mathbf{C}^4(\bar{\Omega}) = C^4(\bar{\Omega}) \times C^4(\bar{\Omega})$  e  $v_H \in \overset{\circ}{\mathbf{W}}_H$ . Então*

$$a_H(R_H u, v_H) = (R_H(-\operatorname{div} \sigma(u)), v_H)_H + \tau_H(u, v_H),$$



com

$$|\tau_H(u, v_H)| \leq C \left[ \sum_{\Delta \in \mathcal{T}_H^{(s)}} |\Delta| (\text{diam} \Delta)^4 \|u\|_{4, \infty, \Delta}^2 \right]^{1/2} \|P_H v_H\|_1,$$

em que  $C$  é independente de  $u$  e de  $\mathcal{T}_H^{(s)}$ ,  $s = 1, 2$ .

■

Conjugando a Proposição 4.6 com o Teorema 4.5 obtemos o resultado de convergência.

**Teorema 4.7** *Suponhamos que a solução  $u$  do problema (4.1) pertence a  $\mathbf{C}^4(\bar{\Omega})$ . Então o problema de diferenças finitas (4.8) tem solução única  $u_H \in \mathbf{W}_H$  e existe uma constante positiva  $C$  tal que*

$$\|P_H^{(s)} u_H - P_H^{(s)} R_H u\|_1 \leq C \left[ \sum_{\Delta \in \mathcal{T}_H^{(s)}} |\Delta| (\text{diam} \Delta)^4 \|u\|_{4, \infty, \Delta}^2 \right]^{1/2}, \quad s = 1, 2, \quad (4.18)$$

$C$  independente de  $u$  e de  $\mathcal{T}_H^{(s)}$ .

**Demonstração:** Como  $a(\cdot, \cdot)$  é elíptica, pelo Teorema 1.19, o problema (4.8) tem solução única. A estimativa para o erro resulta da Proposição 4.6 e da desigualdade para a estabilidade (4.17).

■

O teorema anterior permite concluir que a aproximação  $u_H = (u_{1H}, u_{2H})$ , solução de (4.8), tem convergência quadrática para  $u = (u_1, u_2)$ , solução de (4.1), relativamente à norma  $\|\cdot\|_1$ . Deste modo, as aproximações para as componentes do deslocamento apresentam convergência quadrática relativamente à norma  $\|\cdot\|_1$  e as aproximações para as componentes das tensões e deformações apresentam convergência quadrática relativamente à norma  $\|\cdot\|_0$ .

## Capítulo 5

# Alguns resultados numéricos

### 5.1 Introdução

Neste capítulo pretendemos ilustrar a eficiência dos métodos de diferenças finitas estudados nos capítulos anteriores. Para o efeito consideramos a sua simulação em alguns problemas diferenciais elípticos definidos em domínios de diferentes geometrias. Na Secção 5.2 consideramos a equação de Poisson num domínio poligonal de  $\mathbb{R}^2$ , com condição de Dirichlet para a fronteira. Em seguida o mesmo problema é considerado num domínio rectangular, com condição de Neumann. Finalmente na Secção 5.3 apresentamos a simulação do método estudado no Capítulo 4.

### 5.2 Equação de Poisson

#### 5.2.1 Condição de Dirichlet

Seja  $\Omega = ]0, 1[ \times ]0, 1[$ . Consideremos a equação de Poisson com condição de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{em } \Omega \\ u = \varphi & \text{em } \Gamma, \end{cases} \quad (5.1)$$

e a sua aproximação definida por (2.8), ou seja,

$$\begin{cases} -\Delta_H u_H = f & \text{em } \Omega_H & (a) \\ u_H = \varphi & \text{em } \Gamma_H, & (b) \end{cases} \quad (5.2)$$

em que

$$\Delta_H u_{j,\ell} = \delta_x^{(1/2)}(\delta_x^{(1/2)} u_{j,\ell}) + \delta_y^{(1/2)}(\delta_y^{(1/2)} u_{j,\ell}). \quad (5.3)$$

Obtemos assim uma equação para cada ponto da malha  $(x_j, y_\ell) \in \bar{\Omega}_H$  e portanto uma equação para cada componente da função  $u_H = (u_{j,\ell})_{(x_j, y_\ell) \in \bar{\Omega}_H}$ .

Notamos que o cálculo de  $\Delta_H u_{j,\ell}$  envolve o valor da função  $u_H$  em 5 pontos da malha. Assim, para cada  $x = (x_j, y_\ell) \in \bar{\Omega}_H$  temos

$$-\Delta_H u_H(x) = \sum_{\xi \in \Omega_H} L_{x\xi} u_H(\xi),$$

em que

$$L_{x\xi} := \begin{cases} \frac{2}{h_j h_{j+1}} + \frac{2}{k_\ell k_{\ell+1}} & \text{se } \xi = x \\ \frac{-2}{h_j(h_{j+1} + h_j)} & \text{se } x - \xi = (h_j, 0) \\ \frac{-2}{h_{j+1}(h_{j+1} + h_j)} & \text{se } \xi - x = (h_{j+1}, 0) \\ \frac{-2}{k_\ell(k_{\ell+1} + k_\ell)} & \text{se } x - \xi = (0, k_\ell) \\ \frac{-2}{k_{\ell+1}(k_{\ell+1} + k_\ell)} & \text{se } \xi - x = (0, k_{\ell+1}) \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Como conhecemos o valor de  $u_H$  nos pontos de  $\Gamma_H$ , reduzimos o número de equações a resolver. Usando (5.2b) obtemos o seguinte sistema

$$\sum_{\xi \in \Omega_H} L_{x\xi} u_H(\xi) = q_H(x), \quad x \in \Omega_H, \quad (5.4)$$

em que  $q_H = R_H f + \varphi_H$  e  $\varphi_H = - \sum_{\xi \in \Gamma_H} L_{x\xi} \varphi(\xi)$ .

O sistema anterior pode ainda ser reescrito na forma

$$L_H u_H = q_H,$$

em que  $L_H$  é a matriz

$$L_H = (L_{x\xi})_{x, \xi \in \Omega_H},$$

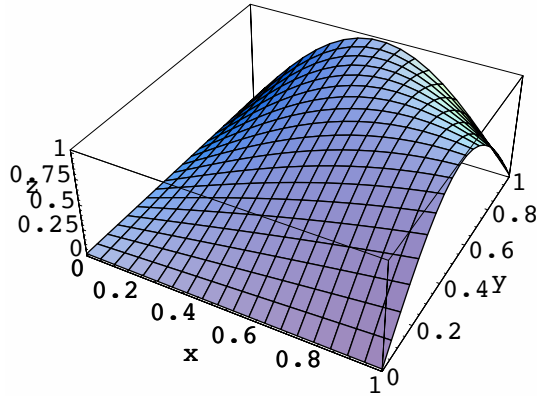
$u_H = (u_H(x))_{x \in \Omega_H}$  e  $q_H = (q_H(x))_{x \in \Omega_H}$ .

Uma vez que os índices  $x \in \Omega_H$  não estão ordenados,  $L_H$  não é uma matriz no sentido usual, apesar de definir uma aplicação linear. Uma possível ordenação é

$$\begin{pmatrix} (x_1, y_1), & (x_1, y_2), & (x_1, y_3), & \dots, & (x_1, y_{M-1}), \\ (x_2, y_1), & (x_2, y_2), & (x_2, y_3), & \dots, & (x_2, y_{M-1}), \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ (x_{N-1}, y_1), & (x_{N-1}, y_2), & (x_{N-1}, y_3), & \dots, & (x_{N-1}, y_{M-1}). \end{pmatrix} \quad (5.5)$$

Consideremos a decomposição do vector  $u_H$ , cujas  $(N-1) \times (M-1)$  componentes estão ordenadas segundo (5.5) em  $N-1$  blocos, correspondendo a cada



Figura 5.1: Solução  $u$ .

Consideremos o domínio  $\bar{\Omega}$  discretizado com uma malha não uniforme  $\bar{\Omega}_{H,1}$ , tal que  $N = M = 8$  e

$$h_1 = h_2 = h_3 = 0.1, \quad h_4 = h_5 = 0.2, \quad h_6 = h_7 = h_8 = 0.1,$$

$$k_1 = k_2 = k_3 = 0.1, \quad k_4 = k_5 = 0.2, \quad k_6 = k_7 = k_8 = 0.1.$$

Seja  $\bar{\Omega}_{H,2}$  a malha representada na figura 5.2, obtida de  $\bar{\Omega}_{H,1}$  traçando uma nova linha entre cada duas e consideremos ainda a malha  $\bar{\Omega}_{H,3}$ , obtida de  $\bar{\Omega}_{H,2}$  pelo mesmo processo.

Figura 5.2: Malha  $\bar{\Omega}_{H,2}$ .

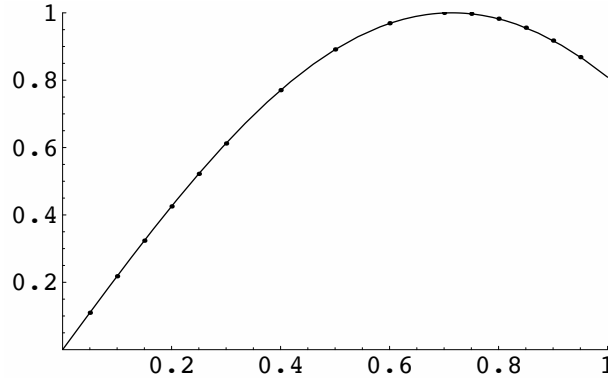


Figura 5.3: Solução do problema, considerando  $y = 0.7$   
 (- solução exacta • solução numérica).

Na tabela 5.1 apresentamos os resultados obtidos.<sup>1</sup>

Malha	Dimensão	$h_{max}^2$	$k_{max}^2$	$\ P_H u_H - P_H R_H u\ _1$
$\bar{\Omega}_{H,1}$	$N = 8, M = 8$	0.04	0.04	0.0113992
$\bar{\Omega}_{H,2}$	$N = 16, M = 16$	0.01	0.01	0.00315622
$\bar{\Omega}_{H,3}$	$N = 32, M = 32$	0.0025	0.0025	0.000819999

Tabela 5.1

Este exemplo ilustra de forma clara a convergência quadrática do método, quando o erro é medido com a norma  $\|\cdot\|_1$ .

**Exemplo 2:** Para este exemplo vamos considerar o domínio poligonal representado na figura 5.4.

A construção das malhas terá de ser de acordo com a condição (Reg). A malha  $\bar{\Omega}_{H,1}$  da figura 5.5 é regular. Seja  $\bar{\Omega}_{H,2}$  a malha obtida de  $\bar{\Omega}_{H,1}$ , traçando uma nova linha entre cada duas.

As matrizes do sistema são semelhantes às obtidas para domínios rectangulares, variando apenas a dimensão das submatrizes (algumas das matrizes  $A_i$  e  $B_i$  terão mais uma linha ou uma coluna de zeros, pois podem não ser quadradas).

<sup>1</sup>Os algoritmos foram implementados no programa *Mathematica, Version 3.0*.

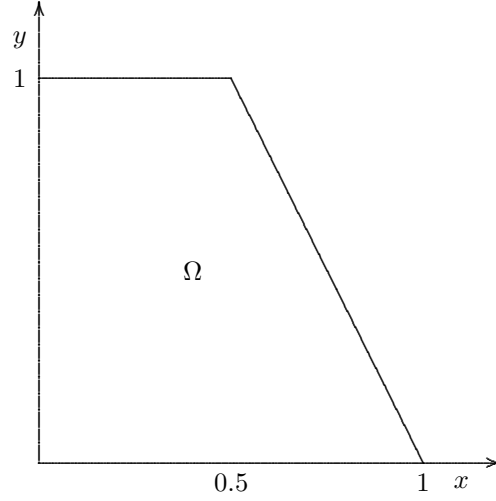


Figura 5.4: Domínio.

O problema (5.1) com as funções  $f$  e  $\varphi$  definidas por

$$f(x, y) = 60x^2 - 40x^3 - 40y + 120xy - 60x^2y + 60y^2 - 120xy^2 - 20y^3$$

e

$$\varphi(x, y) = 0,$$

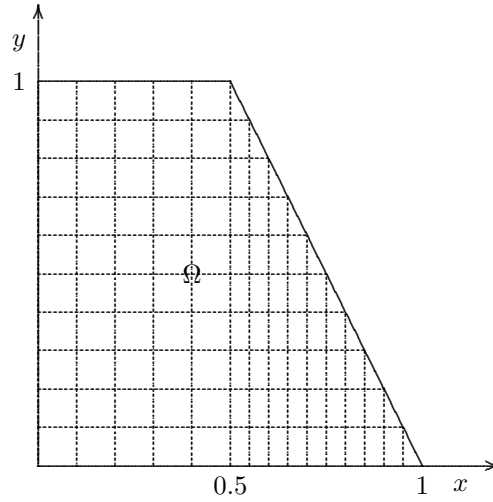
tem solução

$$u(x, y) = 10x^2y(y - 1)(y + 2x - 2).$$

Os resultados obtidos, que figuram na tabela 5.2, ilustram a convergência quadrática estabelecida no Teorema 2.11.

Malha	Dimensão	$h_{max}^2$	$k_{max}^2$	$\ P_H u_H - P_H R_H u\ _1$
$\bar{\Omega}_{H,1}$	$N = 15, M = 10$	0.01	0.01	0.00834092
$\bar{\Omega}_{H,2}$	$N = 30, M = 20$	0.0025	0.0025	0.00219513
$\bar{\Omega}_{H,3}$	$N = 60, M = 40$	0.000625	0.000625	0.000560955

Tabela 5.2

Figura 5.5: Malha  $\bar{\Omega}_{H,1}$ .

### 5.2.2 Condição de Neumann

Consideremos agora a equação de Poisson com condição de Neumann

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{em } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = \varphi & \text{em } \Gamma, \end{cases} \quad (5.9)$$

em que  $\Omega = ]0, 1[ \times ]0, 1[$ .

Estabelecemos no Capítulo 3 as propriedades de convergência do método de diferenças

$$\begin{cases} -\Delta_H u_H = f & \text{em } \bar{\Omega}_H \quad (a) \\ \delta_{\eta_x} u_H + \delta_{\eta_y} u_H = \varphi & \text{em } \Gamma_H. \quad (b) \end{cases} \quad (5.10)$$

Para  $x \in \Gamma_H$ , a igualdade (5.10a) é obtida usando valores em pontos de  $\Gamma_H^*$ . Estes podem ser eliminados através de (5.10b). Obtemos assim um sistema da forma

$$L_H u_H = q_H \quad (5.11)$$

de  $(N+1) \times (M+1)$  incógnitas, que são as componentes de  $u_H(x)$ ,  $x \in \bar{\Omega}_H$ .

Se os pontos de  $x \in \bar{\Omega}_H$  estiverem ordenados como em (5.5), então  $L_H$  é da





Consideremos também a malha  $\bar{\Omega}_{H,2}$  que se obtém pelo refinamento de  $\bar{\Omega}_{H,1}$  traçando uma nova linha entre cada duas linhas. Seja  $\bar{\Omega}_{H,3}$  a malha obtida da mesma forma de  $\bar{\Omega}_{H,2}$ .

Na tabela 5.3 apresentamos os resultados obtidos. Observamos novamente que o erro associado à solução numérica, quando medido com a norma  $\|\cdot\|_1$ , é quadrático.

Malha	Dimensão	$h_{max}^2$	$k_{max}^2$	$\ P_H u_H - P_H R_H u\ _1$
$\bar{\Omega}_{H,1}$	$N = 12, M = 12$	0.01	0.01	0.308177
$\bar{\Omega}_{H,2}$	$N = 24, M = 24$	0.0025	0.0025	0.0878872
$\bar{\Omega}_{H,3}$	$N = 48, M = 48$	0.000625	0.000625	0.0246353

Tabela 5.3

**Exemplo 4:** Podemos escrever a solução  $u$  do problema anterior da forma  $u = u_1 + u_2$ , em que  $u_1$  é a solução de (5.9) com

$$f(x, y) = \pi^2 \sin(\pi y),$$

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{se } (x = 0, 0 < y < 1) \text{ ou } (x = 1, 0 < y < 1) \\ -\pi, & \text{se } (y = 0, 0 < x < 1) \text{ ou } (y = 1, 0 < x < 1), \end{cases}$$

e  $u_2$  é a solução do problema análogo com respeito à variável  $x$ .

Notemos que  $u_1$  e  $u_2$  são constantes ao longo das direções dos eixos coordenados  $xx$  e  $yy$ , respectivamente.

Para a aproximação de  $u_1$ , consideremos as malhas  $\bar{\Omega}_{H,1}$ ,  $\bar{\Omega}_{H,2}$ ,  $\bar{\Omega}_{H,3}$ , em que  $h_j = 0.5$ ,  $j = 1, 2$ , nos três casos e  $k_\ell$ ,  $\ell = 1, \dots, M$ , com os valores do exemplo anterior, para cada uma das malhas.

Na tabela que se segue apresentamos os resultados obtidos para  $u_{H,1}$ .

Malha	Dimensão	$h_{max}^2$	$k_{max}^2$	$\ P_H u_{1,H} - P_H R_H u_1\ _1$
$\bar{\Omega}_{H,1}$	$N = 2, M = 12$	0.25	0.01	0.0903043
$\bar{\Omega}_{H,2}$	$N = 2, M = 24$	0.25	0.0025	0.0224514
$\bar{\Omega}_{H,3}$	$N = 2, M = 48$	0.25	0.000625	0.00559349

Tabela 5.4

Se no cálculo das aproximações para  $u_2$  usarmos malhas correspondentes, obtemos melhores resultados do que no exemplo anterior, resolvendo sistemas de dimensão consideravelmente menor.





$$u_{1,H} = \frac{v_{1,H} + v_{2,H}}{2} \quad \text{e} \quad u_{2,H} = \frac{v_{1,H} - v_{2,H}}{2}.$$

**Exemplo 5:** Vamos considerar no problema (4.1) os seguintes dados :

$$\lambda = 1, \mu = 0.5,$$

$$f_1(x, y) = f_2(x, y) = \pi^2[-0.4 \cos(\pi(x + y)) + 0.1 \cos(\pi(x - y))],$$

$$g_1(x, y) = g_2(x, y) = 0.$$

O problema assim definido tem solução  $u = (u_1, u_2)$ , com

$$u_1(x, y) = u_2(x, y) = \frac{1}{5} \sin(\pi x) \sin(\pi y).$$

Na figura 5.6 estão representados os pontos da malha  $\bar{\Omega}_{H,2}$  na sua posição inicial. Podemos observar a solução numérica na figura 5.7, onde aparecem os mesmos pontos deslocados.

Sejam  $\bar{\Omega}_{H,1}$  a discretização do domínio, com  $N=M=8$ ,

$$h_j = 0.1, j = 1, \dots, 6, \quad h_j = 0.2, j = 7, 8,$$

$$k_\ell = 0.1, \ell = 1, \dots, 6, \quad k_\ell = 0.2, \ell = 7, 8,$$

$\bar{\Omega}_{H,2}$  o refinamento de  $\bar{\Omega}_{H,1}$  e  $\bar{\Omega}_{H,3}$  o refinamento de  $\bar{\Omega}_{H,2}$ , obtidos como nos exemplos anteriores.

Na tabela 5.5 apresentamos os resultados obtidos, que ilustram a estimativa de erro estabelecida no Teorema 4.7.

Malha	Dimensão	$h_{max}^2$	$k_{max}^2$	$\ P_H u_H - P_H R_H u\ _1$
$\bar{\Omega}_{H,1}$	$N = 8, M = 8$	0.04	0.04	0.0427604
$\bar{\Omega}_{H,2}$	$N = 16, M = 16$	0.01	0.01	0.011163
$\bar{\Omega}_{H,3}$	$N = 32, M = 32$	0.0025	0.0025	0.00269675

Tabela 5.5

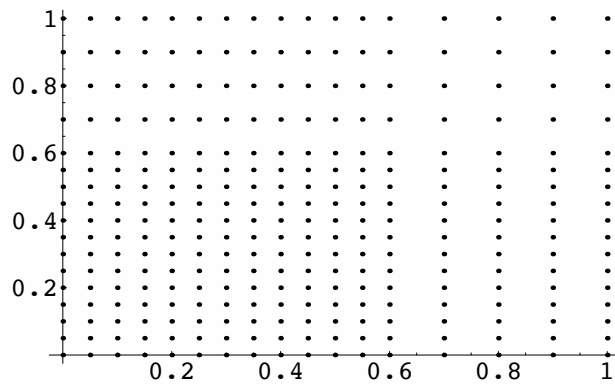
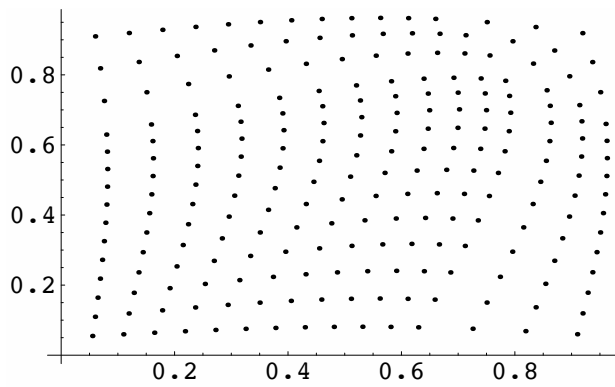
Figura 5.6: Discretização do domínio,  $\bar{\Omega}_{H,2}$ .

Figura 5.7: Solução numérica.



# Bibliografia

- [1] S.C. Brenner, L.R. Scott, 1994, The mathematical theory of finite element methods, Springer.
- [2] B.N. Datta, 1995, Numerical linear algebra and applications, Brooks/Cole Publishing Company.
- [3] J.A. Ferreira, 1994, Adaptive methods for parabolic problems: convergence study, Ph.D. Thesis, University of Coimbra, Portugal.
- [4] J.A. Ferreira, 1997, The negative norms in the supraconvergence of FDM's for two-dimensional domains, Technical Report 97-06.
- [5] J.A. Ferreira, R.D. Grigorieff, 1998, On the supraconvergence of elliptic finite difference schemes, Appl. Num. Math. 28, 275-292.
- [6] P.A. Forsyth, P.H. Sammon, 1988, Quadratic convergence for cell-centered grids, Appl. Num. Math. 4, 377-394.
- [7] B. Garcia-Archila, J.M. Sanz-Serna, 1991, A finite difference formula for the discretization of  $d^3/dx^3$  on nonuniform grids, Math. Comp. 57, 239-257.
- [8] R.D. Grigorieff, 1986, Some stability inequalities for compact finite difference operators, Math. Nach. 135, 93-101.
- [9] W. Hackbusch, 1992, Theory and numerical treatment of elliptic differential equations, Berlin: Springer-Verlag.
- [10] F. de Hoog, D. Jockett, 1985, On the rate of convergence of finite difference schemes on nonuniform grids, J. Austral. Math Soc. Sr. B, 247-256.
- [11] C. Johnson, 1987, Numerical solution of partial differential equations by the finite element method, Cambridge University Press.
- [12] H.O. Kreiss, T.A. Manteuffel, B. Swartz, B. Wendroff, A.B. White Jr., 1986, Supraconvergent schemes on irregular grids, Math. Comp. 47, 537-554.



- [13] L. Lapidus, G.F. Pinder, 1982, Numerical solution of partial differential equations in science and engineering, John Wiley & Sons.
- [14] P.D. Lax, R. D. Richtmeyer, 1956, Survey on the stability of linear difference equations, *Comm. Pure App. Math.* 9, 267-293
- [15] P. Lesaint, M. Zlámal, 1979, Superconvergence of the gradient of finite element solutions, *R.A.I.R.O. Analyse numérique* 13, 139-166.
- [16] C.D. Levermore, T.A. Manteuffel, A.B. White Jr., 1987, Numerical solutions of partial differential equations on irregular grids, *Computational techniques and applications: CTAC-87* (Sydney, 1987), 417-426, North-Holland, Amsterdam-New York.
- [17] T.A. Manteuffel, A.B. White Jr., 1986, The numerical solution of second order boundary value problems on nonuniform meshes, *Math. Comp.* 47, 511-535.
- [18] M.A. Marletta, 1988, Supraconvergence of discretization methods on nonuniform meshes, M. Sc. Thesis, Oxford University.
- [19] K.W. Morton, E. Süli, 1995, Evolution-Galerkin methods and their supraconvergence, *Numer. Math.* 71, 331-355.
- [20] A. Quarteroni, A. Valli, 1997, Numerical approximation of partial differential equations, Springer.
- [21] H.J. Reinhardt, 1985, Analysis of Approximation Methods for Differential and Integral Equations, *Applied Mathematical Sciences* 57, Springer-Verlag, N.Y.
- [22] E. Süli, 1991, Convergence of finite volume schemes for Poisson's equation on nonuniform meshes, *SIAM J. Numer. Anal.* 28, 1419-1430.
- [23] A. Weiser, M.F. Wheeler, 1988, On convergence of block-centered finite differences for elliptic problems, *SIAM J. Numer. Anal.* 25, 351-375.
- [24] B. Wendroff, A.B. White, Jr., 1988, Some supraconvergent schemes for hyperbolic equations on irregular grids, in *Nonlinear hyperbolic equations-theory, computation methods, and applications* (Aachen, 1988), 671-677, *Notes Numer. Fluid Mech.* 24, Vieweg, Braunschweig.
- [25] M. Zlámal, 1978, Superconvergence and reduced integration in finite element method, *Math. Comp.* 32, 663-685.