

SÍLVIA ALEXANDRA ALVES BARBEIRO

NORMAS DUAIS DISCRETAS
EM PROBLEMAS ELÍPTICOS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
UNIVERSIDADE DE COIMBRA
2005

Dissertação apresentada à Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra, para a obtenção do Grau de Doutor em Matemática, especialidade em Matemática Aplicada.

Agradecimentos

Gostaria de expressar a minha gratidão a todos aqueles que, pelo seu apoio e amizade, tornaram possível a concretização deste trabalho. Não podendo mencionar cada um, não posso deixar de particularizar o Professor Doutor José Augusto Mendes Ferreira, da Universidade de Coimbra, e o Professor Doutor Rolf Dieter Grigorieff, da Universidade Técnica de Berlim. Pelo permanente acompanhamento e incentivo que me dispensaram ao longo da realização desta dissertação, pelas críticas, conselhos e sugestões, os meus profundos agradecimentos.

Quero também agradecer ao Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra e à Universidade Técnica de Berlim, pelas condições de trabalho proporcionadas, à Fundação para a Ciência e a Tecnologia, da qual fui bolseira, e ao Centro de Matemática da Universidade de Coimbra.

Prefácio

No estudo da convergência de métodos de diferenças finitas, diversas abordagens têm vindo a ser usadas, sendo a mais amplamente divulgada introduzida em 1956, por Lax e Rychtmeyer ([48]). Nesse trabalho, a análise do erro é baseada nos conceitos de estabilidade e consistência, sendo obtido um majorante para a norma do erro da discretização que depende da norma do erro de truncatura. Esta abordagem apresenta limitações quando o método de diferenças finitas é definido sobre malhas não uniformes. Foi observado em 1962, por Tikhonov e Samarskii ([71]), e mais tarde por Hoog e Jackett ([41]), Kreiss *et al.* ([47]), Lazarov, Makarov e Weinelt ([49]), Levermore, Manteuffel e White ([51]) e Manteuffel e White ([54]), que as estimativas induzidas pelo erro de truncatura podem não revelar as reais propriedades de convergência. De facto, nestes trabalhos, é mostrado que alguns esquemas de diferenças finitas apresentam um erro de discretização global de ordem superior à do erro de truncatura. Esta propriedade foi designada por supraconvergência.

Em 1988 Grigorieff ([39]) recupera, no contexto dos métodos de diferenças finitas para problemas elípticos unidimensionais, definidos a partir de malhas não uniformes, os resultados de Lax e Rychtmeyer. Para o efeito, neste trabalho, a estabilidade é estabelecida recorrendo a normas duais. Deste modo, tal como nos trabalhos anteriormente referidos, foram obtidas, para certos métodos, propriedades de convergência que ficavam “escondidas” na abordagem clássica. Atendendo à generalidade da abordagem, podemos afirmar que este trabalho apresenta uma perspectiva unificadora no estudo da supraconvergência. Note-se que na dedução da desigualdade de estabilidade são fundamentais certos resultados de Teoria da Convergência Discreta. É de realçar que estes argumentos foram anteriormente utilizados, sendo exemplo disso o artigo de Courant, Friedrichs e Lewy ([18]), publicado em 1928, onde, na prova de existência de solução de certos problemas diferenciais, são introduzidas sucessões de aproximações definidas por diferenças finitas e a sua convergência é estabelecida recorrendo a resultados de compacidade.

A utilização de normas duais tem vindo a ser considerada também na análise

de métodos de diferenças finitas para problemas bidimensionais, sendo exemplo disso as publicações de Bojović e Jovanović ([9]), Ferreira ([26]–[29]), Ferreira e Grigorieff ([30]), Jovanović e Popović ([43]), Marletta ([55]). Por exemplo, em [29] e [30] a estabilidade do método considerado e a estimativa supraconvergente do erro, foram estabelecidos a partir da identificação do método de diferenças finitas com um método de elementos finitos segmentado linear adequado. Deste modo, à estimativa supraconvergente, no contexto dos métodos de diferenças finitas, corresponde uma estimativa superconvergente para a solução de elementos finitos.

O fenómeno de superconvergência de soluções de elementos finitos tem sido observado por diversos autores. Em 1969, Oganjesjan e Ruhovec apresentam, em [57], resultados relativos a métodos de elementos finitos para equações elípticas bidimensionais. Na década de 80, surgiram os primeiros estudos de superconvergência do método de elementos finitos misto entre os quais destacamos os apresentados por Arnold e Brezzi ([3]), Douglas e Roberts ([21]), Douglas e Wang ([22]). Finalmente, e sem pretendermos ser exaustivos, referimos outros trabalhos onde o tema da superconvergência é abordado: Brandts ([13], [14]), Douglas, Dupont e Wheeler ([20]), Durán ([24]), Goodsell e Whiteman ([35]), Jovanović, Ivanović e Süli ([42]), Lesaint e Zlámal ([50]), Levine ([52]), Wheeler e Whiteman ([75]), Zlámal ([78], [79]).

Os métodos de diferenças finitas mais amplamente divulgados são os métodos de diferenças finitas centradas nos vértices. No entanto, em certos contextos, como por exemplo a resolução de problemas relacionados com a indústria do petróleo, a maioria dos códigos tem como base outra versão dos métodos de diferenças finitas: os chamados métodos de diferenças finitas centradas nas células. Esta escolha está relacionada com os modelos físicos em relação aos quais o último método é mais conveniente ([63]). A convergência dos métodos de diferenças finitas centradas nas células foi estabelecida por Forsyth e Sammon em [31], Weiser e Wheeler em [74]. No artigo de Manteuffel e White [54], são apresentados teoremas de convergência de segunda ordem para os dois tipos de métodos. Se forem usadas malhas uniformes, os dois processos são idênticos, excepto possivelmente no tratamento da fronteira, e o erro de truncatura é geralmente de segunda ordem se for admitida regularidade suficiente para as funções coeficiente da equação diferencial. Para o caso de malhas não uniformes, o estudo da convergência torna-se mais interessante. Os métodos de diferenças finitas centradas nos vértices têm um erro de truncatura de primeira ordem enquanto que os métodos de diferenças finitas centradas nas células revelam-se localmente inconsistentes.

As propriedades de convergência de métodos de discretização para problemas elípticos assumem relevância no estudo de métodos numéricos para problemas parabólicos. De facto, a construção de métodos para problemas parabólicos com condições iniciais e de fronteira é, muitas vezes, o resultado de duas fases de discretização: a discretização espacial e a discretização temporal. Na primeira fase, o operador diferencial correspondente às derivadas espaciais é discretizado

usando, por exemplo, diferenças finitas. Daqui resulta um sistema diferencial ordinário que é integrado, na segunda fase, de modo aproximado, sendo utilizado um método numérico específico. No estudo das propriedades de convergência da aproximação definida a partir da abordagem referida, tem especial relevo a qualidade da aproximação espacial. Assim, os resultados de convergência de métodos de discretização de problemas elípticos são importantes na dedução das propriedades de convergência de métodos numéricos para problemas parabólicos. São referências clássicas neste contexto os trabalhos [69], de Thomée, e [72], de Verwer e Sanz-Serna, sendo o primeiro relativo a métodos de elementos finitos e o segundo a métodos de diferenças finitas.

O objectivo desta dissertação é o estudo de propriedades de convergência de métodos de discretização, definidos em malhas não uniformes, para equações diferenciais elípticas de segunda ordem. Estabelecemos propriedades supraconvergentes considerando condições de regularidade para as soluções do problema contínuo menos restritivas que as usualmente exigidas na literatura. Embora o estudo incida especialmente sobre métodos de diferenças finitas, as técnicas utilizadas permitem concluir que as propriedades estabelecidas valem também para as soluções de certos métodos de elementos finitos lineares totalmente discretos. São ainda objecto de estudo as propriedades de convergência de aproximações semi-discretas para problemas parabólicos.

Os objectivos propostos na elaboração desta dissertação não incluem considerações relativamente à existência, unicidade e regularidade de solução dos problemas diferenciais.

A divisão em capítulos desta dissertação foi motivada pela técnica utilizada na obtenção dos resultados de estabilidade dos diversos métodos de discretização estudados. Houve necessidade de utilização de diferentes normas duais para estabelecer a estabilidade, consoante o tipo de método em estudo (diferenças finitas centradas nos vértices ou diferenças finitas centradas nas células). Apresentamos seguidamente, de uma forma sumária, os quatro capítulos que constituem este trabalho.

No primeiro, designado por *Método de diferenças finitas centradas nos vértices e norma em $W_h^{-1,2}$* , começamos por apresentar o estudo da discretização por diferenças finitas centradas nos vértices de problemas elípticos unidimensionais, com condições de fronteira de Dirichlet e Robin. Seguidamente é feita referência à extensão dos resultados estabelecidos para o caso unidimensional a problemas bidimensionais. Esses resultados são generalizados a sistemas de equações fortemente elípticos. A abordagem que aqui propomos baseia-se no uso de normas duais. Os métodos de diferenças são interpretados como sendo métodos de elementos finitos lineares, em malhas triangulares, combinados com formas especi-

ais de quadratura. Os métodos considerados têm, em geral, erros de truncatura de primeira ordem, sendo de segunda ordem apenas em malhas uniformes. No entanto, prova-se que as soluções numéricas têm convergência quadrática e são, portanto, supraconvergentes. Para além disso, as estimativas de erro são obtidas considerando a norma no espaço de Sobolev H^1 , o que revela superconvergência no contexto dos métodos de elementos finitos. Os resultados de convergência são obtidos assumindo condições de regularidade mais fracas para as soluções do que, por exemplo, em [39], [41], [47], [54], [64], relativamente ao problema unidimensional, e em [30], relativamente ao problema bidimensional.

Os resultados principais deste capítulo encontram-se publicados ou foram submetidos a publicação. O estudo das equações elípticas unidimensionais encontra-se no trabalho de Barbeiro, Ferreira e Grigorieff, [8]. Relativamente ao caso bidimensional referenciamos [29], de Ferreira. O essencial daquilo que apresentamos em relação ao estudo de sistemas encontra-se publicado em [5] e [6], ambos de Barbeiro e Ferreira.

No segundo capítulo, intitulado *Método de diferenças finitas centradas nas células e norma de Spijker*, estabelecemos resultados de estabilidade e convergência de métodos de diferenças finitas centradas nas células para problemas elípticos, com condições de fronteira de Dirichlet, unidimensionais. Na análise desses métodos, prova-se que o erro de truncatura é de segunda ordem, quando são consideradas malhas uniformes, e é inconsistente, no caso de malhas não uniformes gerais. Este facto foi notado por Tikhonov e Samarskii em [71]. Em [63], Russell e Wheeler mostram a equivalência entre um método de diferenças finitas centradas nas células e um método de elementos finitos misto, combinado com uma forma especial de quadratura. A partir deste resultado provam que o método tem convergência de primeira ordem para a solução e a sua derivada, em malhas gerais, obtendo assim um resultado de supraconvergência. Manteuffel e White, em [54], deduzem a convergência de segunda ordem para vários problemas escalares, considerando métodos de diferenças finitas centradas nos vértices e métodos de diferenças finitas centradas nas células, em malhas não uniformes.

Na abordagem que propomos, as desigualdades de estabilidade desempenham um papel central no estudo do erro. Na obtenção dessas desigualdades usamos resultados de compacidade discreta. Em primeiro lugar, a estabilidade é estabelecida considerando normas do tipo Spijker. Com o objectivo de generalizar o resultado ao caso bidimensional, estabeleceram-se desigualdades de estabilidade a partir de normas de índice negativo. O uso de uma versão discreta da norma definida no espaço H^{-2} no teorema de estabilidade surge naturalmente tendo em conta o resultado inicialmente obtido com normas do tipo Spijker, considerando um resultado de equivalência de normas. A conclusão de que os métodos têm convergência de segunda ordem em malhas não uniformes não é, por si só, inovadora, sendo exemplo disso as referências [54] e [74]. No entanto, o tipo de análise que

desenvolvemos tem a vantagem de poder ser estendida a dimensões superiores. Para além disso é unificadora no sentido em que tem como base desigualdades de estabilidade do tipo das já usadas no capítulo anterior.

No terceiro capítulo, intitulado *Método de diferenças finitas centradas nas células e norma em $W_H^{-2,2}$* , estudamos métodos de diferenças finitas centradas nas células em domínios do plano. Tal como nos capítulos anteriores, a escolha da norma segundo a qual a estabilidade é estabelecida é fundamental no estudo do erro. O uso de uma versão discreta da norma em H^{-2} permite provar convergência quadrática da solução numérica, em malhas não uniformes. Forsyth e Sammon, em [31], e Weiser e Wheeler, em [74], também apresentam convergência de segunda ordem para problemas elípticos, em domínios rectangulares. Nos resultados que aqui apresentamos são considerados operadores e domínios mais gerais que nesses artigos.

No quarto capítulo, designado por *Problemas parabólicos*, apresentamos o estudo da semi-discretização de problemas de evolução parabólicos, cujos estados estacionários são representados pelos problemas elípticos considerados nos capítulos anteriores. Discretizamos o operador diferencial relativo às derivadas espaciais usando os dois tipos operadores de diferenças finitas já considerados: diferenças finitas centradas nos vértices e diferenças finitas centradas nas células. O estabelecimento de estimativas de erro supraconvergentes tem por base as estimativas de erro dos capítulos 1 e 3. Os resultados deste capítulo que dizem respeito à discretização por diferenças finitas centradas nos vértices encontram-se no trabalho de Barbeiro, Ferreira e Brandts ([7]).

Em cada capítulo desta dissertação são apresentados resultados numéricos que ilustram os resultados de supraconvergência. Estes resultados foram obtidos a partir de algoritmos especialmente concebidos para o efeito e implementados no programa *MATLAB* (versão 6).

Este trabalho inclui três apêndices, intitulados *Espaços de Sobolev*, *Operadores elípticos* e *Convergência discreta*, onde apresentamos definições e resultados clássicos que têm um papel relevante nesta dissertação.

Índice

1	Método de diferenças finitas centradas nos vértices e norma em $W_h^{-1,2}$	1
1.1	Caso unidimensional	3
1.1.1	Introdução	3
1.1.2	Problema variacional discreto	5
1.1.3	Estabilidade e convergência	7
1.1.4	Equação diferencial na forma não divergente	14
1.1.5	Aproximação do termo fonte	17
1.1.6	Pós-processamento	19
1.1.7	Resultados numéricos	22
1.2	Caso bidimensional	29
1.2.1	Introdução	29
1.2.2	Problema variacional discreto	31
1.2.3	Estabilidade e convergência	34
1.3	Sistemas elípticos	36
1.3.1	Introdução	37
1.3.2	Problema variacional discreto	38
1.3.3	Estabilidade e convergência	40
1.3.4	Resultados numéricos	42
2	Método de diferenças finitas centradas nas células e norma de Spijker	47
2.1	Introdução	48
2.2	Aproximação discreta de $W_0^{m,p}(0, R)$	52
2.3	Estabilidade	59
2.4	Convergência	67
2.5	Normas de índice negativo e equivalência de normas	74
2.6	Estabilidade na norma em $W_h^{-2,2}$	77
2.7	Resultados numéricos	85

3 Método de diferenças finitas centradas nas células e norma em $W_H^{-2,2}$	87
3.1 Introdução	88
3.2 Aproximação discreta de $W_0^{m,2}(\Omega)$	90
3.3 Estabilidade	97
3.4 Convergência	114
3.5 Resultados numéricos	122
4 Problemas parabólicos	125
4.1 Convergência	126
4.2 Resultados numéricos	135
A Espaços de Sobolev	137
B Operadores elípticos	143
C Convergência discreta	145
Bibliografia	149

Capítulo 1

Método de diferenças finitas centradas nos vértices e norma em $W_h^{-1,2}$

O objectivo deste capítulo é o estudo da supraconvergência de métodos de diferenças finitas centradas nos vértices para problemas elípticos de segunda ordem com coeficientes variáveis. A convergência é estabelecida a partir da estabilidade e da estimativa adequada do erro de truncatura. A desigualdade de estabilidade é deduzida a partir da identificação do operador de diferenças com um operador funcional definido entre um espaço discreto e o seu dual. Deste modo, a estimativa para o erro global relativamente à norma em H^1 obtém-se a partir da estimativa para a norma dual do erro de truncatura. No estabelecimento desta estimativa é fundamental a identificação entre o método de diferenças finitas e um método de elementos finitos segmentado linear. A técnica utilizada permite estabelecer estimativas de erro supraconvergentes relativamente à norma no espaço de Sobolev H^1 , exigindo apenas que a solução do problema diferencial esteja em H^3 . Resultados anteriores, presentes na literatura, exigem maior regularidade. Por exemplo em [41], [47], [54] e [65] é assumido que a solução tem derivadas contínuas até à quarta ordem. É de notar que, atendendo à identificação referida, o resultado de supraconvergência para a solução de diferenças finitas constitui um resultado de superconvergência para a solução de elementos finitos.

Este capítulo tem três secções. Na Secção 1.1 é nosso objectivo estudar as propriedades de estabilidade e convergência, no caso unidimensional. Na Secção 1.2 consideramos a generalização dos resultados da primeira secção a problemas definidos em domínios bidimensionais. Finalmente, na Secção 1.3, apresentamos o estudo da discretização de sistemas elípticos.

Começamos por definir uma aproximação de diferenças finitas, em malhas não uniformes, de um problema unidimensional. Quando consideramos o comportamento do método numa sucessão de malhas com o passo máximo a tender para zero, constatamos que o método tem, em geral, consistência apenas de primeira ordem (é segunda ordem se as malhas forem uniformes). Apesar disso, provamos que a solução discreta é de segunda ordem, sem impôr qualquer restrição à malha. É com base na identificação do método de diferenças finitas com um método de elementos finitos totalmente discreto que se obtém o resultado de estabilidade (Teorema 1.1) cuja consequência é o resultado de convergência (Teorema 1.5). Neste último teorema é estabelecida uma estimativa supraconvergente para a solução de diferenças finitas, o que permite concluir que o método de elementos finitos segmentado linear tem convergência quadrática relativamente à norma no espaço H^1 . Esta propriedade é vulgarmente conhecida por superaproximação do gradiente ([73]) ou superconvergência ([13], [25], [50], [79]). Este estudo ocupa as subsecções 1.1.1–1.1.3.

O resultado de supraconvergência/superconvergência do Teorema 1.5 tem por base a forma divergente da equação diferencial. A questão natural que abordamos na Subsecção 1.1.4 diz respeito à possibilidade de extensão do estudo a uma equação diferencial na forma não divergente. Constatamos que a resposta é afirmativa, introduzindo uma discretização do problema diferencial nessa forma e para a qual obtemos um resultado análogo ao Teorema 1.5.

A discretização do termo fonte da equação diferencial tem um papel de relevo no estabelecimento de estimativas para o erro da aproximação. Na Subsecção 1.1.5 estudamos outro tipo de discretização para este termo, em alternativa a (1.12). A restrição dos valores do termo fonte aos pontos da malha é talvez a discretização mais comum e permite concluir uma estimativa do tipo da apresentada no Teorema 1.5. Para além dessa, consideramos ainda outras possibilidades de discretização desse termo.

Nos resultados de convergência até aqui referidos, são consideradas estimativas do erro do interpolador segmentado linear obtido a partir da solução de diferenças finitas, relativamente à norma no espaço H^1 . No entanto o erro é definido em relação à projecção da solução do problema diferencial no espaço das funções contínuas e lineares por segmentos. Na Subsecção 1.1.6 é introduzido um processo de construção de uma aproximação a partir da solução de diferenças finitas, a que chamamos pós-processamento e que conduz a uma aproximação tal que o erro da solução numérica é de segunda ordem quando comparada com a solução analítica do problema diferencial.

A ilustração do desempenho dos métodos estudados é apresentada Subsecção 1.1.7. Como consequência das estimativas estabelecidas no Teorema 1.5, introduzimos um critério para a definição de malhas não uniformes. Apresentamos resultados numéricos obtidos a partir de malhas que satisfazem este critério e que são comparados com os obtidos a partir de malhas que satisfazem o critério de

equidistribuição do comprimento de arco. São também apresentados resultados numéricos obtidos a partir de malhas do tipo Shishkin.

Os métodos de diferenças finitas centradas nos vértices para problemas bidimensionais merecem também atenção neste capítulo. Ferreira obteve, em [29], resultados de supraconvergência análogos aos apresentados na Secção 1.1 para problemas do plano. Observamos que, embora essa generalização possa parecer simples, a técnica para estimar o erro de truncatura introduzida na demonstração do Teorema 1.5 não permite obter imediatamente uma estimativa superconvergente no caso bidimensional. Na Secção 1.2 apresentamos as definições e resultados fundamentais de [29], mas omitimos as suas demonstrações. Esses resultados são usados no estudo de métodos de diferenças finitas centradas para sistemas elípticos, em domínios bidimensionais (Secção 1.3), e também no estudo de problemas parabólicos (Capítulo 4). Por esta razão pareceu-nos importante a sua inclusão nesta dissertação.

Na Secção 1.3 estendemos alguns dos resultados das secções anteriores a métodos de diferenças finitas para sistemas diferenciais elípticos. Como exemplo de aplicação propomos um problema de elasticidade característico da mecânica dos sólidos e apresentamos alguns resultados numéricos que ilustram o resultado de convergência. As técnicas de demonstração dos resultados aqui apresentados permitem melhorar os resultados de [5] onde, no contexto de problemas de elasticidade, as estimativas são obtidas exigindo condições de regularidade mais fortes para a solução do problema.

1.1 Caso unidimensional

1.1.1 Introdução

Nesta secção estudamos a discretização por diferenças finitas centradas nos vértices da equação diferencial

$$Au := -(au')' + (bu)' + cu = f \quad \text{em } (0, R) \subset \mathbb{R} \quad (1.1)$$

com condições de fronteira de Dirichlet

$$u(0) = \gamma_0, \quad u(R) = \gamma_R, \quad (1.2)$$

ou condições de fronteira de Robin

$$-(au')(0) + \beta_0 u(0) = \gamma_0, \quad (au')(R) + \beta_R u(R) = \gamma_R. \quad (1.3)$$

Assumimos que os coeficientes da equação diferencial são suficientemente regulares,

$$a \in C[0, R], \quad b, c \in W^{2, \infty}(0, R), \quad (1.4)$$

e que $a(x) \geq \underline{a} > 0 \quad \forall x \in (0, R)$.

O método de diferenças finitas que consideramos é definido na malha não uniforme \mathbb{I}_h ,

$$\mathbb{I}_h := \{0 = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = R\},$$

onde h é o vector dos espaçamentos

$$h_j := x_{j+1} - x_j, \quad j = 0, \dots, N-1.$$

Usamos a notação I_j para o intervalo (x_j, x_{j+1}) , $j = 0, \dots, N-1$, e \mathbb{I}'_h para o conjunto de pontos interiores da malha, $\mathbb{I}'_h := \mathbb{I}_h \setminus \{x_0, x_N\}$. Denotamos por W_h o espaço das funções complexas definidas nos pontos da rede \mathbb{I}_h , munido do produto interno

$$(v_h, w_h)_h := \sum_{j=0}^{N-1} \frac{h_j}{2} (v_j \bar{w}_j + v_{j+1} \bar{w}_{j+1}), \quad v_h, w_h \in W_h, \quad (1.5)$$

e por $\overset{\circ}{W}_h$ o subespaço de W_h cujas funções são nulas nos pontos x_0 e x_N . O produto interno (1.5) é uma versão discreta do produto interno de $L^2(0, R)$, correspondente à regra dos trapézios composta. Nos espaços anteriores consideramos os operadores de diferenças centradas δ_c e δ definidos por

$$(\delta_c v_h)_j := \frac{v_{j+1} - v_{j-1}}{x_{j+1} - x_{j-1}}, \quad j = 1, \dots, N-1, \quad (1.6)$$

$$(\delta v_h)_{j+1/2} := \frac{v_{j+1} - v_j}{x_{j+1} - x_j}, \quad j = 0, \dots, N-1, \quad (1.7)$$

onde $v_j := v_h(x_j)$ e $x_{j+1/2} := x_j + h_j/2$. Na composição de operadores usamos ainda a notação

$$(\delta w_h)_j := \frac{w_{j+1/2} - w_{j-1/2}}{x_{j+1/2} - x_{j-1/2}}. \quad (1.8)$$

Pretendemos estabelecer propriedades de convergência da discretização

$$A_h u_h := -\delta(a\delta u_h) + \delta_c(bu_h) + cu_h = f_h \quad \text{em } \mathbb{I}'_h \quad (1.9)$$

com as condições de fronteira

$$u_0 = \gamma_0, \quad u_N = \gamma_R \quad (1.10)$$

ou

$$\begin{aligned} - (a\delta u_h)_{1/2} + \frac{h_0}{2} \left[(\delta(bu_h))_{1/2} + c_0 u_0 - f_0 \right] + \beta_0 u_0 &= \gamma_0, \\ (a\delta u_h)_{N-1/2} + \frac{h_{N-1}}{2} \left[(\delta(bu_h))_{N-1/2} + c_N u_N - f_N \right] + \beta_R u_N &= \gamma_R, \end{aligned} \quad (1.11)$$

sendo (1.10) e (1.11) as discretizações de (1.2) e (1.3), respectivamente. Em (1.9), a função de rede que aproxima o segundo membro de (1.1) é definida por

$$f_j := \frac{2}{h_{j-1} + h_j} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} f(x) dx, \quad j = 0, \dots, N, \quad (1.12)$$

onde $h_{-1} = h_N = 0$, $x_{-1/2} = 0$ e $x_{N+1/2} = R$.

Denotamos por $R_h v$ a restrição da função $v \in C[0, R]$ à malha \mathbb{I}_h . Por vezes, quando é claro pelo contexto que nos referimos à restrição, omitimos o símbolo R_h . Usamos a notação P_h para o operador de interpolação linear nos pontos de \mathbb{I}_h .

Seja Λ uma sucessão de vectores h , com $h_{max} := \max\{h_j, j = 0, \dots, N-1\}$ convergente para zero. Pretendemos analisar o comportamento do método de diferenças em sequências de malhas \mathbb{I}_h , $h \in \Lambda$.

O estudo da estabilidade e convergência do método de diferenças finitas é feito identificando este método com um método de elementos finitos adequado. Na subsecção seguinte apresentamos o problema variacional discreto associado ao referido método de elementos finitos.

1.1.2 Problema variacional discreto

Pretendemos determinar um problema variacional discreto equivalente à discretização já introduzida. Para o efeito consideramos a forma sesquilinear $a_h(\cdot, \cdot)$,

$$\begin{aligned} a_h(v_h, w_h) &:= \sum_{j=0}^{N-1} h_j a_{j+1/2} (P_h v_h)'_{j+1/2} (P_h \bar{w}_h)'_{j+1/2} - (b v_h, (P_h w_h)')_h \\ &+ (c v_h, w_h)_h. \end{aligned} \quad (1.13)$$

No entanto, para as condições de fronteira (1.3), a forma sesquilinear deve também incluir o termo

$$(\beta_0 - b(0))v_0 \bar{w}_0 + (\beta_R + b(R))v_N \bar{w}_N,$$

ou seja, neste caso $a_h(\cdot, \cdot)$ é definida por

$$\begin{aligned} a_h(v_h, w_h) &:= \sum_{j=0}^{N-1} h_j a_{j+1/2} (P_h v_h)'_{j+1/2} (P_h \bar{w}_h)'_{j+1/2} - (b v_h, (P_h w_h)')_h \\ &+ (c v_h, w_h)_h + (\beta_0 - b(0))v_0 \bar{w}_0 + (\beta_R + b(R))v_N \bar{w}_N. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Em (1.13) e (1.14), a função $(P_h w_h)'$ pode ter descontinuidades nos pontos da malha. Para tais funções, o produto interno (1.5) deve ser calculado como a

soma dos termos correspondentes à regra dos trapézios simples em cada intervalo (x_j, x_{j+1}) , usando os limites de $(P_h w_h)'$ correspondentes ao interior nos pontos de quebra.

Determinar a função u_h que verifica (1.9)-(1.10) ou (1.9)-(1.11) é equivalente a determinar, respectivamente, $u_h \in W_h$ tal que $u_0 = \gamma_0$, $u_N = \gamma_N$ e

$$a_h(u_h, v_h) = (f_h, v_h)_h \quad \forall v_h \in \overset{\circ}{W}_h, \quad (1.15)$$

ou $u_h \in W_h$ tal que

$$a_h(u_h, v_h) = (f_h, v_h)_h + \gamma_0 \bar{v}_0 + \gamma_R \bar{v}_N \quad \forall v_h \in W_h. \quad (1.16)$$

Para a demonstração dessa equivalência basta notar que se u_h verifica (1.9)-(1.10) ou (1.9)-(1.11), então satisfaz

$$a_h(u_h, v_h^{(j)}) = (f_h, v_h^{(j)})_h$$

ou

$$a_h(u_h, v_h^{(j)}) = (f_h, v_h^{(j)})_h + \gamma_0 \bar{v}_0^{(j)} + \gamma_R \bar{v}_N^{(j)},$$

respectivamente, para funções $v_h^{(j)} \in W_h$, tais que

$$v_h^{(j)}(x_j) = 1, \quad v_h^{(j)}(x_i) = 0 \text{ para } i \neq j.$$

Atendendo a que qualquer função de W_h é uma combinação linear de funções desse tipo, conclui-se o pretendido.

Note-se que os problemas (1.15) e (1.16) podem ser entendidos como discretizações de problemas variacionais associados aos problemas diferenciais (1.1)-(1.2) e (1.1)-(1.3). Por exemplo, associado ao problema (1.1)-(1.3), consideramos o problema variacional: determinar $u \in H^1(0, R)$ tal que

$$a(u, v) = (f, v)_0 + \gamma_0 \bar{v}(0) + \gamma_L \bar{v}(L) \quad \forall v \in H^1(0, L), \quad (1.17)$$

com

$$\begin{aligned} a(v, w) := & (av', w')_0 - (bv, w')_0 + (cv, w)_0 \\ & + (\beta_0 - b(0))v(0)\bar{w}(0) + (\beta_L + b(L))v(L)\bar{w}(L), \end{aligned} \quad (1.18)$$

$v, w \in H^1(0, R)$. Assim, a forma sesquilinear $a_h(\cdot, \cdot)$ definida por (1.14) pode ser obtida de $a(\cdot, \cdot)$ definida por (1.18) aplicando a regra do ponto médio ao primeiro termo e a regra dos trapézios aos restantes termos. O termo correspondente a $(bv)'$ também se obtém aplicando a regra do ponto médio a $P_h(bv_h)$, isto é,

$$\sum_{j=0}^{N-1} h_j (P_h(bv_h))_{j+1/2} (P_h \bar{w}_h)'_{j+1/2}.$$

1.1.3 Estabilidade e convergência

O principal resultado desta secção, o Teorema 1.5, é consequência do seguinte resultado de estabilidade para $a_h(\cdot, \cdot)$.

Teorema 1.1 *Se o problema variacional associado a (1.1)-(1.2) tem uma única solução, então existe uma constante positiva C independente de h , tal que para $h \in \Lambda$, com h_{max} suficientemente pequeno, se tem*

$$\|P_h v_h\|_{H^1(0,R)} \leq C \sup_{0 \neq w_h \in \mathring{W}_h} \frac{|a_h(v_h, w_h)|}{\|P_h w_h\|_{H^1(0,R)}} \quad \forall v_h \in \mathring{W}_h. \quad (1.19)$$

O resultado anterior pode ser apresentado, de forma alternativa, como um resultado de estabilidade inversa para A_h . De facto, a norma

$$\|v_h\|_{-1,h} := \sup_{0 \neq w_h \in \mathring{W}_h} \frac{|(v_h, w_h)_h|}{\|w_h\|_{1,h}}, \quad v_h \in \mathring{W}_h,$$

com

$$\|v_h\|_{1,h} := \|P_h v_h\|_{H^1(0,R)}, \quad v_h \in \mathring{W}_h,$$

que induz o espaço que denotamos por $W_h^{-1,2}$, pode ser entendida como uma versão discreta da norma $\|\cdot\|_{-1}$ definida em $H^{-1}(0, R)$. Com esta definição e tendo em conta que

$$a_h(v_h, w_h) = (A_h v_h, w_h)_h \quad \forall v_h, w_h \in \mathring{W}_h,$$

concluimos que (1.19) é equivalente a

$$\|v_h\|_{1,h} \leq C \|A_h v_h\|_{-1,h} \quad \forall v_h \in \mathring{W}_h.$$

Esta estimativa mostra que, nas condições do Teorema 1.1, A_h é invertível, $h \in \Lambda'$, em que Λ' denota uma sucessão final de Λ . Para além disso podemos concluir que A_h^{-1} é estável. De facto, A_h^{-1} considerada como uma aplicação de $(W_h^{-1,2}, |\cdot|_{-1,h})$ em $(\mathring{W}_h, |\cdot|_{1,h})$ é limitada uniformemente com respeito a $h \in \Lambda'$.

O Teorema 1.1 também é válido para a discretização (1.16) do problema (1.1)-(1.3), substituindo, em (1.19), \mathring{W}_h por W_h .

A demonstração do Teorema 1.1 é semelhante à do Teorema 2 de [30] e baseia-se no facto de $a(\cdot, \cdot)$ ser coerciva (Teorema 8.2.8 de [40]) e de se verificar a convergência

$$|a_h(v_h, w_h) - a(P_h v_h, P_h w_h)| \longrightarrow 0 \quad (h \in \Lambda),$$

$$v_h, w_h \in \mathring{W}_h.$$

Os três lemas que se seguem são usados na demonstração do teorema de convergência. O Lema de Bramble-Hilbert (Apêndice A) e a estimativa

$$\|v\|_{L^1(I_j)} \leq h_j^{1/2} \|v\|_{L^2(I_j)} \quad \forall v \in L^2(I_j), \quad (1.20)$$

são fundamentais na obtenção da ordem de convergência pretendida.

Lema 1.2 *Para $v \in H^{(1+s)}(I_j)$, $s \in \{1, 2\}$, tem-se*

$$|v'(x_{j+1/2}) - (P_h v)'(x_{j+1/2})| \leq Ch_j^{s-1} \|v^{(s+1)}\|_{L^1(I_j)} \leq Ch_j^{s-1/2} \|v\|_{H^{(1+s)}(I_j)},$$

$j = 0, \dots, N-1$.

Demonstração: Seja w a função definida por

$$w(\xi) := v(x_j + \xi h_j), \quad \xi \in [0, 1]. \quad (1.21)$$

Então vale representação

$$v'(x_{j+1/2}) - (P_h v)'(x_{j+1/2}) = \frac{1}{h_j} \left[w'\left(\frac{1}{2}\right) - w(1) + w(0) \right] = \frac{1}{h_j} \lambda(w), \quad (1.22)$$

em que λ denota a funcional linear

$$\lambda(g) := g'\left(\frac{1}{2}\right) - g(1) + g(0), \quad g \in W^{2,1}(0,1). \quad (1.23)$$

A funcional anterior é limitada em $W^{r,1}(0,1)$, com $r \in \{2, 3\}$, e anula-se para $g = 1, \xi$ e ξ^2 . Logo, pelo Lema de Bramble-Hilbert, existe uma constante positiva C tal que

$$|\lambda(g)| \leq C \|g^{(r)}\|_{L^1(0,1)}.$$

Considerando na estimativa anterior $g = w$, pela desigualdade de Hölder,

$$\begin{aligned} |\lambda(w)| &\leq C \|w^{(r)}\|_{L^1(0,1)} = Ch_j^{r-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} |v^{(r)}(x)| dx \\ &\leq Ch_j^{r-1/2} \left(\int_{x_j}^{x_{j+1}} |v^{(r)}(x)|^2 dx \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Inserindo em (1.22) a estimativa deduzida, resulta

$$|v'(x_{j+1/2}) - (P_h v)'(x_{j+1/2})| \leq Ch_j^{s-1} \|v^{(s+1)}\|_{L^1(I_j)} \leq Ch_j^{s-1/2} \|v^{(s+1)}\|_{L^2(I_j)}.$$

■

Lema 1.3 Para $v \in H^2(I_j)$ tem-se

$$\left| \frac{v(x_j) + v(x_{j+1})}{2} - v(x_{j+1/2}) \right| \leq Ch_j \|v''\|_{L^1(I_j)} \leq Ch_j^{3/2} \|v''\|_{L^2(I_j)},$$

$j = 0, \dots, N-1$.

Demonstração: Seja w definida por (1.21). Vale a igualdade

$$\frac{v(x_j) + v(x_{j+1})}{2} - v(x_{j+1/2}) = \frac{w(0) + w(1)}{2} - w\left(\frac{1}{2}\right).$$

A funcional

$$\lambda(g) := \frac{g(0) + g(1)}{2} - g\left(\frac{1}{2}\right), \quad g \in W^{2,1}(0,1),$$

é limitada em $W^{2,1}(0,1)$ e anula-se para $g = 1$ e $g = \xi$. Logo, pelo Lema de Bramble-Hilbert, obtemos

$$|\lambda(g)| \leq C \|g''\|_{L^1(0,1)}, \quad g \in W^{2,1}(0,1).$$

Atendendo à estimativa anterior e à definição de w , pela desigualdade de Hölder vem,

$$\begin{aligned} |\lambda(w)| &\leq C \|w''\|_{L^1(0,1)} = Ch_j \int_{x_j}^{x_{j+1}} |v''(x)| dx \\ &\leq Ch_j^{3/2} \left(\int_{x_j}^{x_{j+1}} |v''(x)|^2 dx \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

■

Lema 1.4 Para $v \in H^2(I_j)$ valem as estimativas

$$\left| \frac{h_j}{2} (v(x_j) + v(x_{j+1})) - \int_{x_j}^{x_{j+1}} v(x) dx \right| \leq Ch_j^2 \|v''\|_{L^1(I_j)} \leq Ch_j^{5/2} \|v''\|_{L^2(I_j)}$$

e

$$\left| h_j v(x_{j+1/2}) - \int_{x_j}^{x_{j+1}} v(x) dx \right| \leq Ch_j^2 \|v''\|_{L^1(I_j)} \leq Ch_j^{5/2} \|v''\|_{L^2(I_j)},$$

$j = 0, \dots, N-1$.

Demonstração: Seja w definida por (1.21). As funcionais

$$\lambda_1(g) := \frac{g(1) + g(0)}{2} - \int_0^1 g(\xi) d\xi \quad \text{e} \quad \lambda_2(g) := g\left(\frac{1}{2}\right) - \int_0^1 g(\xi) d\xi$$

são limitadas em $W^{2,1}(0, 1)$ e anulam-se com $g = 1$ e $g = \xi$. Pelo Lema de Bramble-Hilbert, tomando $g = w$, vem

$$\begin{aligned} \left| \frac{h_j}{2} (v(x_j) + v(x_{j+1})) - \int_{x_j}^{x_{j+1}} v(x) dx \right| &= \left| h_j \left(\frac{w(0) + w(1)}{2} - \int_0^1 w(\xi) d\xi \right) \right| \\ &\leq Ch_j \|w''\|_{L^1(0,1)} \leq Ch_j^2 \|v''\|_{L^1(I_j)} \leq Ch_j^{5/2} \|v''\|_{L^2(I_j)} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \left| h_j v(x_{j+1/2}) - \int_{x_j}^{x_{j+1}} v(x) dx \right| &= \left| h_j \left(w\left(\frac{1}{2}\right) - \int_0^1 w(\xi) d\xi \right) \right| \\ &\leq Ch_j \|w''\|_{L^1(0,1)} \leq Ch_j^2 \|v''\|_{L^1(I_j)} \leq Ch_j^{5/2} \|v''\|_{L^2(I_j)}. \end{aligned}$$

■

Provemos seguidamente o resultado de supraconvergência.

Teorema 1.5 *Seja $h \in \Lambda$, com h_{max} suficientemente pequeno. Se o problema variacional associado a (1.1)-(1.2) ou (1.1)-(1.3) tem uma única solução, então o problema discreto (1.9)-(1.10) ou (1.9)-(1.11), respectivamente, tem uma única solução u_h . Se a solução u de (1.1)-(1.2) ou (1.1)-(1.3) satisfaz $u \in H^{1+s}(0, R)$, $s \in (1/2, 2]$, tem-se a estimativa*

$$\|P_h(R_h u - u_h)\|_{H^1(0,R)} \leq C \left(\sum_{j=0}^{N-1} h_j^{2s} \|u\|_{H^{1+s}(I_j)}^2 \right)^{1/2} \leq Ch_{max}^s \|u\|_{H^{1+s}(0,R)}, \quad (1.24)$$

com C independente de h .

Demonstração: Apresentamos a demonstração apenas para o problema (1.1)-(1.3). A prova da estimativa (1.24) quando o problema tem condições de fronteira de Dirichlet (1.2) é semelhante e ligeiramente mais simples.

Note-se que o resultado de estabilidade garante a unicidade de solução, quando h_{max} é suficientemente pequeno.

Atendendo a que u_h é solução de (1.16), podemos obter uma estimativa para $\|P_h(R_h u - u_h)\|_{H^1(0,R)}$ considerando, em (1.19), $v_h = R_h u - u_h$. Pelo Teorema 1.1, para $h \in \Lambda$, com h_{max} suficientemente pequeno, deduzimos sucessivamente

$$\begin{aligned} \|P_h(R_h u - u_h)\|_{H^1(0,R)} &\leq C \sup_{0 \neq v_h \in W_h} \frac{|a_h(R_h u - u_h, v_h)|}{\|P_h v_h\|_{H^1(0,R)}} \\ &= C \sup_{0 \neq v_h \in W_h} \frac{|a_h(R_h u, v_h) - (f_h, v_h)_h - \gamma_0 \bar{v}_0 - \gamma_N \bar{v}_N|}{\|P_h v_h\|_{H^1(0,R)}}, \end{aligned} \quad (1.25)$$

com C independente de h . Atendendo à definição de f_h ((1.12)), usando integração por partes e soma por partes, obtém-se

$$(f_h, v_h)_h = - \sum_{j=0}^{N-1} \left[(au')(x_{j+1/2}) - (bu)(x_{j+1/2}) \right] (\bar{v}_{j+1} - \bar{v}_j) \\ + \sum_{j=0}^N \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} cu \, dx \bar{v}_j + \left[(au')(0) - (bu)(0) \right] \bar{v}_0 - \left[(au')(R) - (bu)(R) \right] \bar{v}_N.$$

Pela definição de $a_h(\cdot, \cdot)$ e das condições de fronteira, verificamos que podemos obter um majorante para (1.25) estimando, separadamente, as quantidades

$$T_a := \sum_{j=0}^{N-1} h_j a_{j+1/2} \left[(P_h u)'_{j+1/2} - u'(x_{j+1/2}) \right] (P_h \bar{v}_h)'_{j+1/2}, \quad (1.26)$$

$$T_b := \sum_{j=0}^{N-1} h_j \left[(bu)(x_{j+1/2}) - \frac{(bu)(x_j) + (bu)(x_{j+1})}{2} \right] (P_h \bar{v}_h)'_{j+1/2}, \quad (1.27)$$

$$T_c := \sum_{j=0}^N \left[\frac{h_{j-1} + h_j}{2} (cu)(x_j) - \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} (cu)(x) \, dx \right] \bar{v}_j. \quad (1.28)$$

Observamos que se $s > 1/2$ então $H^s(0, R)$ tem um mergulho compacto em $C[0, R]$. Portanto, se $u \in H^{1+s}(0, R)$ então existe $u'(x)$ para todo $x \in (0, R)$.

Consideramos, em primeiro lugar, $s \in \{1, 2\}$.

Estimativa para T_a : Pelo Lema 1.2, temos que

$$|u'(x_{j+1/2}) - (P_h u)'(x_{j+1/2})| \leq Ch_j^{s-1/2} \|u\|_{H^{1+s}(I_j)}, \quad (1.29)$$

$s \in \{1, 2\}$. Por outro lado, vale

$$h_j (P_h \bar{v}_h)'_{j+1/2} = \int_{x_j}^{x_{j+1}} (P_h \bar{v}_h)'_{j+1/2} \, dx \leq h_j^{1/2} \|P_h v_h\|_{H^1(I_j)}. \quad (1.30)$$

Finalmente, conjugando (1.26), (1.29) e (1.30), obtemos

$$|T_a| \leq C \|a\|_{L^\infty(0, R)} \left(\sum_{j=0}^{N-1} h_j^{2s} \|u\|_{H^{1+s}(I_j)}^2 \right)^{1/2} \|P_h v_h\|_{H^1(0, R)}. \quad (1.31)$$

Estimativa para T_b : Considerando $v = bu$ no Lema 1.3, resulta

$$\left| \frac{(bu)(x_j) + (bu)(x_{j+1})}{2} - (bu)(x_{j+1/2}) \right| \leq Ch_j^{3/2} \|(bu)''\|_{L^2(I_j)}. \quad (1.32)$$

Conjugando (1.27), (1.30) e (1.32) concluimos que

$$|T_b| \leq C \|b\|_{W^{2,\infty}(0,R)} \left(\sum_{j=0}^{N-1} h_j^4 \|u''\|_{L^2(I_j)}^2 \right)^{1/2} \|P_h v_h\|_{H^1(0,R)}. \quad (1.33)$$

Estimativa para T_c : Começemos por notar que vale a representação

$$T_c = (T_1 + T_2)/2$$

com

$$T_1 := \sum_{j=0}^{N-1} \left[\frac{h_j}{2} ((cu)_j + (cu)_{j+1}) - \int_{x_j}^{x_{j+1}} cu \, dx \right] (\bar{v}_j + \bar{v}_{j+1})$$

e

$$T_2 := \sum_{j=0}^{N-1} \left[\frac{h_j}{2} ((cu)_{j+1} - (cu)_j) + \int_{x_j}^{x_{j+1/2}} cu \, dx - \int_{x_{j+1/2}}^{x_{j+1}} cu \, dx \right] (\bar{v}_{j+1} - \bar{v}_j).$$

A estimativa para T_c obtém-se estimando separadamente T_1 e T_2 . Facilmente se deduz uma estimativa para T_1 , uma vez que se trata de uma soma cujos termos

$$\frac{h_j}{2} ((cu)_j + (cu)_{j+1}) - \int_{x_j}^{x_{j+1}} cu \, dx$$

são erros da regra dos trapézios. Pelo Lema 1.4 vem

$$\left| \frac{h_j}{2} ((cu)_j + (cu)_{j+1}) - \int_{x_j}^{x_{j+1}} cu \, dx \right| \leq Ch_j^{5/2} \|(cu)''\|_{L^2(I_j)}.$$

Como $P_h v_h$ é seccionalmente linear, então

$$|(v_j + v_{j+1})| = \frac{2}{h_j} \left| \int_{x_j}^{x_{j+1}} (P_h v_h)(x) \, dx \right| \leq 2h_j^{-1/2} \|P_h v_h\|_{L^2(I_j)}.$$

Das duas desigualdades anteriores e da definição de T_1 , obtemos

$$|T_1| \leq C \|c\|_{W^{2,\infty}(0,R)} \left(\sum_{j=0}^{N-1} h_j^4 \|u\|_{H^2(I_j)}^2 \right)^{1/2} \|P_h v_h\|_{L^2(0,R)}. \quad (1.34)$$

Consideremos agora T_2 . Seja λ a funcional definida por

$$\lambda(g) := \frac{1}{2} (g(1) - g(0)) + \int_0^{1/2} g(\xi) \, d\xi - \int_{1/2}^1 g(\xi) \, d\xi, \quad g \in W^{1,1}(0,1),$$

que é limitada em $W^{1,1}(0,1)$ e que se anula para $g = 1$. Tomando $g = w$, em que

$$w(\xi) = (cu)(x_j + \xi h_j), \quad \xi \in [0, 1],$$

usando o Lema de Bramble-Hilbert, obtemos a estimativa de primeira ordem

$$\begin{aligned} & \left| \frac{h_j}{2} ((cu)_{j+1} - (cu)_j) + \int_{x_j}^{x_{j+1/2}} cu \, dx - \int_{x_{j+1/2}}^{x_{j+1}} cu \, dx \right| \\ &= h_j |\lambda(w)| \leq Ch_j \|w'\|_{L^1(0,1)} \leq Ch_j^{3/2} |cu|_{H^1(I_j)}. \end{aligned}$$

Mas o factor $(\bar{v}_{j+1} - \bar{v}_j)$ permite estimar T_2 com a mesma ordem que T_1 . De facto, note-se que

$$|\bar{v}_{j+1} - \bar{v}_j| = h_j^{1/2} |P_h v_h|_{H^1(I_j)}.$$

Assim,

$$|T_2| \leq C \|c\|_{W^{1,\infty}(0,R)} \left(\sum_{j=0}^{N-1} h_j^4 \|u\|_{H^1(I_j)}^2 \right)^{1/2} \|P_h v_h\|_{H^1(0,R)}. \quad (1.35)$$

A desigualdade (1.24) é consequência imediata de (1.31), (1.33), (1.34) e (1.35).

Provemos agora que a mesma estimativa é válida para $s \in (1/2, 1)$. Consideremos a funcional λ definida por (1.23) com domínio $H^{1+s}(0,1)$. A funcional anterior é limitada neste espaço e anula-se para $g = 1$ e $g = \xi$. Logo, pelo Lema de Bramble-Hilbert (Lema A.6), existe uma constante positiva C tal que

$$|\lambda(g)| \leq C |g|_{H^{1+s}(0,1)} = C |g'|_{H^s(0,1)}. \quad (1.36)$$

Tomando $g = w$, com $w(\xi) := u(x_j + \xi h_j)$, vem

$$\begin{aligned} |\lambda(w)| &\leq C \left(\int_0^1 \int_0^1 \frac{|g'(\xi) - g'(\eta)|^2}{|\xi - \eta|^{1+2s}} \, d\xi d\eta \right)^{1/2} \\ &= C \left(h_j^{1+2s} \int_{I_j} \int_{I_j} \frac{|u'(x) - u'(y)|^2}{|x - y|^{1+2s}} \, dx dy \right)^{1/2} = Ch_j^{s+1/2} |u'|_{H^s(I_j)}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$|u'(x_{j+1/2}) - (P_h u)'(x_{j+1/2})| \leq Ch_j^{s-1/2} \|u\|_{H^{1+s}(I_j)}.$$

Desta forma, obtemos para T_a a estimativa (1.31). De modo análogo, procedendo como anteriormente aquando do estabelecimento das estimativas para (1.33), (1.34) e (1.35), mas definindo as correspondentes funcionais lineares λ em $H^{1+s}(0,1)$, resultam para T_b e T_c as estimativas pretendidas. Obtemos assim a primeira desigualdade de (1.24). A segunda desigualdade resulta de

$$\sum_{j=0}^{N-1} \|u\|_{H^{1+s}(I_j)}^2 \leq \|u\|_{H^{1+s}(0,R)}^2.$$

A demonstração para $s \in (1, 2)$ é semelhante à anterior. Note-se em vez de (1.36) podemos escrever

$$|\lambda(g)| \leq C|g|_{H^{1+s}(0,1)} = C|g''|_{H^{s-1}(0,1)},$$

uma vez que a funcional λ definida por (1.23) também se anula para $g = \xi^2$. ■

Escrevemos de seguida a estimativa do erro (1.24) numa forma mais detalhada, a fim de dar realce à contribuição das funções coeficiente. Atendendo às estimativas deduzidas na demonstração do Teorema 1.5, tem-se

$$\begin{aligned} \|P_h(R_h u - u_h)\|_{H^1(0,R)} \leq C \left[\sum_{j=0}^{N-1} h_j^4 \left(\|a_{j+\frac{1}{2}} u'''\|_{L^2(I_j)}^2 + \|(bu)''\|_{L^2(I_j)}^2 \right. \right. \\ \left. \left. + \|(cu)''\|_{L^2(I_j)}^2 + \|(cu)'\|_{L^2(I_j)}^2 \right) \right]^{1/2}. \end{aligned} \quad (1.37)$$

A estimativa anterior salienta a regularidade das funções coeficiente exigida na dedução do resultado de supraconvergência. Note-se que podemos enfraquecer a condição de regularidade (1.4). Basta que os coeficientes a , b e c verifiquem essa condição apenas seccionalmente, desde que os correspondentes pontos de quebra sejam pontos de \mathbb{I}'_h .

A estimativa (1.37) é usada posteriormente na construção de malhas adaptativas (Subsecção 1.1.7).

1.1.4 Equação diferencial na forma não divergente

O fenómeno de supraconvergência também se verifica mesmo que a equação diferencial não seja apresentada na forma divergente, bastando para isso assumir maior regularidade das funções coeficiente. Por exemplo o método

$$\begin{aligned} -a\delta^2 u_h + b\delta_c u_h + cu_h = f_h \quad \text{em } \mathbb{I}'_h \\ u_0 = \gamma_0, \quad u_N = \gamma_R, \end{aligned} \quad (1.38)$$

conduz a uma aproximação supraconvergente para a solução do problema diferencial

$$\begin{aligned} -au'' + bu' + cu = f \quad \text{em } (0, R), \\ u(0) = \gamma_0, \quad u(R) = \gamma_R, \end{aligned}$$

se $a, b \in W^{3,\infty}(0, R)$, mas mantendo a condição optimal de regularidade $u \in H^3(0, R)$. Note-se que caso b seja a função nula apenas é necessário assumir que

$a \in W^{2,\infty}(0, R)$. Para a demonstração deste facto vamos considerar (1.38) como uma perturbação do método (1.9). Note-se que é suficiente considerar o caso $a \equiv 1$ uma vez que, se $a \neq 1$, divide-se (1.38) por este coeficiente, resultando assim uma equação diferencial cujo termo de segunda ordem é $-u''$ e com alterações correspondentes nos termos b e c . O segundo membro é da forma $R_h a^{-1} f_h$ que, como mostraremos na parte final da Secção 1.1.5, corresponde a uma perturbação de segunda ordem de $(a^{-1} f)_h$, em que $(a^{-1} f)_h(x_j)$ é definido por (1.12) com f substituído por $a^{-1} f$. Assumamos então que $a \equiv 1$. Consideramos (1.38) como uma discretização da equação diferencial

$$-u'' + (bu)' + (c - b')u = f.$$

Da relação

$$b_j(u_{j+1} - u_{j-1}) = (bu)_{j+1} - (bu)_{j-1} - \left[(b_{j+1} - b_j)u_{j+1} + (b_j - b_{j-1})u_{j-1} \right]$$

concluimos que a expressão dentro dos parênteses rectos dividida por $h_{j-1} + h_j$ é uma aproximação para $b'u$. Consequentemente, na análise do erro, aparece o termo adicional \tilde{T}_c em (1.27),

$$\tilde{T}_c = \sum_{j=0}^N \left[\int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} b'u \, dx - \frac{1}{2} \left((b_{j+1} - b_j)u(x_{j+1}) + (b_j - b_{j-1})u(x_{j-1}) \right) \right] \bar{v}_j, \quad (1.39)$$

em que $v_0 = v_N = 0$. Pelo Lema 1.2, obtém-se

$$|b_{j+1} - b_j - h_j b'_{j+1/2}| \leq Ch_j^2 \|b'''\|_{L^1(I_j)},$$

$$|b_j - b_{j-1} - h_{j-1} b'_{j-1/2}| \leq Ch_{j-1}^2 \|b'''\|_{L^1(I_{j-1})}.$$

Por outro lado, usando a regra dos trapézios na discretização de $\int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} b'u \, dx$, pelo Lema 1.4, vem

$$\left| \int_{x_{j-1/2}}^{x_j} b'u \, dx - \frac{h_{j-1}}{4} \left((b'u)(x_{j-1/2}) + (b'u)(x_j) \right) \right| \leq Ch_{j-1}^2 \|(b'u)''\|_{L^1(x_{j-1/2}, x_j)},$$

$$\left| \int_{x_j}^{x_{j+1/2}} b'u \, dx - \frac{h_j}{4} \left((b'u)(x_j) + (b'u)(x_{j+1/2}) \right) \right| \leq Ch_j^2 \|(b'u)''\|_{L^1(x_j, x_{j+1/2})}.$$

Consideremos em (1.39) as estimativas anteriores e ainda as seguintes representações

$$u(x_{j+1}) = u(x_{j+1/2}) + \frac{h_j}{2} u'(x_{j+1/2}) + \int_{x_{j+1/2}}^{x_{j+1}} (x_{j+1} - t) u''(t) \, dt,$$

$$u(x_{j-1}) = u(x_{j-1/2}) - \frac{h_{j-1}}{2} u'(x_{j-1/2}) + \int_{x_{j-1}}^{x_{j-1/2}} (t - x_{j-1}) u''(t) dt.$$

Assim, para estimar \tilde{T}_c , resta considerar o termo

$$\begin{aligned} \tilde{T}_1 := & \frac{1}{4} \sum_{j=0}^N \left[h_j ((b'u)(x_j) - (b'u)(x_{j+1/2})) - h_j^2 (b'u')(x_{j+1/2}) \right. \\ & \left. + h_{j-1} ((b'u)(x_j) - (b'u)(x_{j-1/2})) + h_{j-1}^2 (b'u')(x_{j-1/2}) \right] \bar{v}_j, \end{aligned}$$

uma vez que os outros termos são de segunda ordem. Note-se que

$$\begin{aligned} \tilde{T}_1 = & \frac{1}{4} \sum_{j=0}^N \left[h_j ((b'u)(x_j) - (b'u)(x_{j+1/2}) + h_j (b'u)'(x_{j+1/2})) \right. \\ & + h_{j-1} ((b'u)(x_j) - (b'u)(x_{j-1/2}) - h_{j-1} (b'u)'(x_{j-1/2})) \\ & \left. + h_j^2 ((b'u)' - 2b'u')(x_{j+1/2}) - h_{j-1}^2 ((b'u)' - 2b'u')(x_{j-1/2}) \right] \bar{v}_j. \end{aligned}$$

Sejam

$$w_1(\xi) := (b'u)(x_j - \xi \frac{h_{j-1}}{2}) \text{ e } w_2(\xi) := (b'u)(x_j + \xi \frac{h_j}{2}), \quad \xi \in [0, 1].$$

Então, valem as representações

$$(b'u)(x_j) - (b'u)(x_{j-1/2}) - h_{j-1} (b'u)'(x_{j-1/2}) = w_1(0) - w_1(1) + w_1'(1)$$

e

$$(b'u)(x_j) - (b'u)(x_{j+1/2}) + h_j (b'u)'(x_{j+1/2}) = w_2(0) - w_2(1) + w_2'(1).$$

Aplicando o Lema de Bramble-Hilbert como anteriormente, com o objectivo estimar $\lambda(w_1)$ e $\lambda(w_2)$, em que

$$\lambda(g) := g(0) - g(1) + g'(1),$$

obtemos

$$\begin{aligned} \tilde{T}_1 = & -\frac{1}{8} \sum_{j=0}^N \left[h_j^2 ((b'u)' - 2b'u')(x_{j+1/2}) - h_{j-1}^2 ((b'u)' - 2b'u')(x_{j-1/2}) \right] \bar{v}_j \\ & + S, \end{aligned}$$

onde

$$|S| \leq C \sum_{j=0}^{N-1} h_j^2 \|b'u\|_{H^2(I_j)} \|P_h v_h\|_{L^2(I_j)}.$$

Verificamos facilmente que vale uma estimativa de segunda ordem para

$$\sum_{j=0}^N \left[h_j^2 ((b'u)' - 2b'u')(x_{j+1/2}) - h_{j-1}^2 ((b'u)' - 2b'u')(x_{j-1/2}) \right] \bar{v}_j,$$

bastando para isso utilizar soma por partes de forma a obter, em cada parcela do somatório, a diferença $\bar{v}_{j+1} - \bar{v}_j$.

1.1.5 Aproximação do termo fonte

Uma questão natural que se coloca diz respeito à regularidade do termo fonte em (1.1). É manifesto que tal regularidade condiciona o tipo de discretização. Se o termo fonte f pertence a $H^2(0, R)$, podemos substituir a discretização (1.12) pela restrição aos pontos da malha $R_h f$. A ordem do erro mantém-se. De facto é suficiente mostrar que

$$|(f_h - R_h f, v_h)_h| \leq C h_{max}^2 \|P_h v_h\|_{H^1(0, R)}. \quad (1.40)$$

Atendendo a que

$$\begin{aligned} |(f_h - R_h f, v_h)_h| &= \left| \sum_{j=0}^N \left(\int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} f(x) dx - \frac{h_{j-1} + h_j}{2} f(x_j) \right) \bar{v}_j \right| \\ &\leq C \left(\sum_{j=0}^{N-1} h_j^4 \|f\|_{H^2(I_j)}^2 \right)^{1/2} \|P_h v_h\|_{H^1(0, R)}, \end{aligned}$$

concluimos o pretendido.

No entanto, se $f \in H^1(0, R)$ e tomarmos a discretização do termo fonte $R_h f$ então não podemos garantir que o método seja de segunda ordem. Apresentamos de seguida um método que não apresenta a ordem de convergência anterior, mesmo que a seja malha uniforme, quando o erro $e_h := P_h(R_h u - u_h)$ é medido relativamente à norma de $L^2(0, R)$.

Consideremos o problema

$$-u'' = f \text{ em } (0, R), \quad u(0) = u(R) = 0,$$

que tem uma única solução em $H^3(0, R)$ se $f \in H^1(0, R)$. Assumamos que o método

$$-\delta^2 u_h = f_h \text{ em } \mathbb{I}'_h, \quad u_0 = u_N = 0,$$

é de segunda ordem. Então a sucessão de funções $(E_h)_\Lambda$, $h \in \Lambda$,

$$E_h : H^1(0, R) \longrightarrow L^2(0, R)$$

com

$$E_h(f) := h^{-2}P_h(R_h u - u_h) = h^{-2}e_h,$$

é limitada pontualmente (aqui o símbolo h é usado para denotar o espaçamento uniforme) e é também uniformemente limitada. A solução aproximada u_h pode ser escrita da forma

$$u_h(x_j) = h \sum_{k=1}^{N-1} g(x_j, x_k) f(x_k), \quad j = 0, \dots, N,$$

em que g é a função de Green do problema contínuo,

$$g(x, y) := \begin{cases} (R-x)\frac{y}{R}, & 0 \leq y \leq x \leq R, \\ \frac{x}{R}(R-y), & 0 \leq x < y \leq R. \end{cases}$$

Logo $e_h(x_j)$ é o erro da aproximação do integral

$$u(x_j) = \int_0^R g(x_j, y) f(y) dy$$

pela regra dos trapézios, que admite a seguinte representação

$$e_h(x_j) = \sum_{k=1}^{N-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (x_{k+1/2} - y) (g(x_j, \cdot) f)'(y) dy.$$

Para $h \in \Lambda$, seja $f = f_h$, com f_h tal que $f_h(0) = 0$ e a sua derivada f'_h é uma função escada com valores em $\{-1, 1\}$ e que muda de sinal nos pontos x_k e $x_{k+1/2}$. Não é difícil verificar que $\|f_h\|_{H^1(0,R)}$ é uniformemente limitada enquanto que $\|E_h(f_h)\|_{L^2(0,R)} \rightarrow \infty$ ($h \in \Lambda$), o que contradiz que $(E_h)_\Lambda$ seja uniformemente limitada.

Existem outras possibilidades de discretização do segundo membro de (1.1) sem alterar a ordem de convergência. Se escrevermos f da forma $f = f^{(1)} f^{(2)}$, com $f^{(1)} \in W^{1,\infty}(0,R)$ e $f^{(2)} \in W^{2,\infty}(0,R)$, então obtemos uma estimativa semelhante a (1.40) para $(f_h^{(1)} R_h f^{(2)} - f_h, v_h)_h$. A prova baseia-se na fórmula de Taylor e integração por partes. Note-se que

$$\int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} f^{(1)} f^{(2)} dx = \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \left(f_j^{(2)} + (f^{(2)})'(x_j)(x - x_j) \right) f^{(1)} dx + S_j \quad (1.41)$$

com

$$S_j := \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} f^{(1)} (f^{(2)})''(\xi_j) \frac{(x - x_j)^2}{2} dx,$$

$\xi_j \in (x_{j-1/2}, x_{j+1/2})$. Podemos escrever (1.41) da seguinte forma mais conveniente

$$\begin{aligned} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} f^{(1)} f^{(2)} dx &= f_j^{(2)} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} f^{(1)} dx + \frac{(f^{(2)})'(x_j)}{8} \left(h_j^2 f_{j+1/2}^{(1)} - h_{j-1}^2 f_{j-1/2}^{(1)} \right) \\ &\quad - \frac{(f^{(2)})'(x_j)}{2} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} (x - x_j)^2 (f^{(1)})' dx + S_j. \end{aligned}$$

Depois de multiplicar por \bar{v}_j e somar em ordem a j , verificamos que as duas últimas quantidades já têm a ordem desejada. Para os termos provenientes da expressão entre parênteses rectos, obtemos facilmente uma estimativa de segunda ordem. Para o efeito basta utilizar soma por partes, obtendo o factor $\bar{v}_{j+1} - \bar{v}_j$ em cada parcela do somatório, de forma semelhante ao que fizemos para obter (1.35).

1.1.6 Pós-processamento

No Teorema 1.5 foi estabelecida a convergência quadrática do erro $P_h(R_h u - u_h)$ relativamente à norma $\|\cdot\|_{H^1(0,R)}$. Vejamos seguidamente um processo de construção de uma aproximação contínua para u' , $K_h(P_h u_h)'$, tal que relativamente à norma $\|\cdot\|_{L^2(0,R)}$ o erro $u' - K_h(P_h u_h)'$ é de segunda ordem. Para obtermos o resultado de convergência, temos que assumir que a malha é regular ([17, §3.1]), isto é, que existe uma constante C tal que $h_{max}/h_{min} \leq C$, $h_{min} := \min\{h_j, j = 0, \dots, N-1\}$.

O estudo que fazemos é análogo ao apresentado em [7] para o caso bidimensional.

Começemos por observar que se q é uma função quadrática em $[0, R]$, então

$$(P_h R_h q)'(x_{j+1/2}) = q'(x_{j+1/2}), \quad j = 0, \dots, N-1,$$

e como q' é uma função linear, vale

$$q'(x_j) = \frac{h_j}{h_{j-1} + h_j} (P_h R_h q)'(x_{j-1/2}) + \frac{h_{j-1}}{h_{j-1} + h_j} (P_h R_h q)'(x_{j+1/2}),$$

$$j = 1, \dots, N-1,$$

$$q'(x_0) = \frac{2h_0 + h_1}{h_0 + h_1} (P_h R_h q)'(x_{1/2}) - \frac{h_0}{h_0 + h_1} (P_h R_h q)'(x_{3/2}),$$

$$q'(x_N) = -\frac{h_{N-1}}{h_{N-2} + h_{N-1}} (P_h R_h q)'(x_{N-3/2}) + \frac{h_{N-2} + 2h_{N-1}}{h_{N-2} + h_{N-1}} (P_h R_h q)'(x_{N-1/2}).$$

Estudamos seguidamente o processo de reconstrução a partir da derivada da função interpoladora de uma função de rede arbitrária. Seja $w_h \in W_h$. Denotamos

por K_h o operador linear que faz corresponder a $(P_h w_h)'$ a função linear em cada intervalo $[x_j, x_{j+1}]$, cujos valores nos pontos da malha são obtidos pelo processo que descrevemos anteriormente, isto é, K_h é definido por

$$(K_h(P_h w_h)')(x_j) = \frac{h_j}{h_{j-1} + h_j} \frac{w_j - w_{j-1}}{h_{j-1}} + \frac{h_{j-1}}{h_{j-1} + h_j} \frac{w_{j+1} - w_j}{h_j},$$

$j = 1, \dots, N-1$, e para os pontos da fronteira

$$(K_h(P_h w_h)')(x_0) = \frac{2h_0 + h_1}{h_0 + h_1} \frac{w_1 - w_0}{h_0} - \frac{h_0}{h_0 + h_1} \frac{w_2 - w_1}{h_1},$$

$$\begin{aligned} & (K_h(P_h w_h)')(x_N) \\ &= -\frac{h_{N-1}}{h_{N-2} + h_{N-1}} \frac{w_{N-1} - w_{N-2}}{h_{N-2}} + \frac{h_{N-2} + 2h_{N-1}}{h_{N-2} + h_{N-1}} \frac{w_N - w_{N-1}}{h_{N-1}}. \end{aligned}$$

Pretendemos estabelecer uma estimativa para $\|u' - K_h(P_h u_h)'\|_{L^2(0,R)}$. Note-se que

$$\begin{aligned} & \|u' - K_h(P_h u_h)'\|_{L^2(0,R)} \\ & \leq \|u' - K_h(P_h R_h u)'\|_{L^2(0,R)} + \|K_h(P_h(R_h u - u_h))'\|_{L^2(0,R)}. \end{aligned} \quad (1.42)$$

Assim, a estimativa pretendida obtém-se estimando separadamente cada parcela do segundo membro de (1.42).

Seja \tilde{I}_j o intervalo que contém os pontos envolvidos no cálculo de $(K_h(P_h w_h)')(x)$, $x \in I_j$, isto é,

$$\tilde{I}_0 := [x_0, x_2], \quad \tilde{I}_j := [x_{j-1}, x_{j+2}], \quad j = 1, \dots, N-2, \quad \tilde{I}_{N-1} := [x_{N-2}, x_N].$$

Lema 1.6 Para $w \in H^3(0, R)$, tem-se

$$\|w' - K_h(P_h R_h w)'\|_{L^2(I_j)} \leq C \sqrt{h_j} |\tilde{I}_j|^{3/2} |w|_{H^3(\tilde{I}_j)}.$$

Demonstração: Sejam $w \in H^3(0, R)$ e q um polinómio quadrático em \tilde{I}_j . Então $q' = K_h(P_h R_h q)'$. Pela desigualdade de Hölder obtemos

$$\begin{aligned} & \|w' - K_h(P_h R_h w)'\|_{L^2(I_j)} = \|(w - q)' - K_h(P_h R_h(w - q))'\|_{L^2(I_j)} \\ & \leq \sqrt{h_j} \|(w - q)' - K_h(P_h R_h(w - q))'\|_{L^\infty(I_j)} \\ & \leq \sqrt{h_j} (\|(w - q)'\|_{L^\infty(I_j)} + \|K_h(P_h R_h(w - q))'\|_{L^\infty(I_j)}). \end{aligned}$$

Se $I_j \subset (0, R)$, atendendo a que os extremos de $K_h(P_h R_h w)'$ em I_j são combinações convexas de $(P_h R_h w)'$, vem

$$\|K_h(P_h R_h w)'\|_{L^\infty(I_j)} \leq \|(P_h R_h w)'\|_{L^\infty(\tilde{I}_j)} \leq \|w'\|_{L^\infty(\tilde{I}_j)}.$$

Por outro lado, se I_j é um intervalo em que um dos extremos é 0 ou R , obtemos

$$\|K_h(P_h R_h w)'\|_{L^\infty(I_j)} \leq 2\|(P_h R_h w)'\|_{L^\infty(\tilde{I}_j)} \leq 2\|w'\|_{L^\infty(\tilde{I}_j)}.$$

Logo,

$$\|w' - K_h(P_h R_h w)'\|_{L^2(I_j)} \leq 3\sqrt{h_j}\|(w - q)'\|_{L^\infty(\tilde{I}_j \cup \tilde{I}_{j+1})}. \quad (1.43)$$

No conjunto dos polinómios quadráticos em \tilde{I}_j , seja q a “melhor aproximação” de w em \tilde{I}_j em relação à norma de $W^{1,\infty}(\tilde{I}_j)$. Então, obtemos ([17, Teorema 3.1.5.])

$$\|(w - q)'\|_{L^\infty(\tilde{I}_j)} \leq C|\tilde{I}_j|^{3/2}|w|_{H^3(\tilde{I}_j)}. \quad (1.44)$$

Conjugando a desigualdade anterior com (1.43) e (1.44) resulta o pretendido. \blacksquare

Lema 1.7 *Se a malha é regular então*

$$\|K_h(P_h w_h)'\|_{L^2(I_j)} \leq C\|(P_h w_h)'\|_{L^2(\tilde{I}_j)} \quad \forall w_h \in W_h. \quad (1.45)$$

Demonstração: Consideremos a passagem à norma do supremo

$$\|K_h(P_h w_h)'\|_{L^2(I_j)} \leq \sqrt{h_j}\|K_h(P_h w_h)'\|_{L^\infty(I_j)}.$$

A partir das desigualdades

$$\|K_h(P_h w_h)'\|_{L^\infty(I_j)} \leq \|(P_h w_h)'\|_{L^\infty(\tilde{I}_j)}, \quad j = 1, \dots, N-2,$$

$$\|K_h(P_h w_h)'\|_{L^\infty(I_j)} \leq 2\|(P_h w_h)'\|_{L^\infty(\tilde{I}_j)} \quad j = 0, N-1,$$

obtém-se

$$\|K_h(P_h w_h)'\|_{L^2(I_j)} \leq 2\sqrt{h_j}\|(P_h w_h)'\|_{L^\infty(\tilde{I}_j)}.$$

Como $(P_h w_h)'$ é constante em cada intervalo I_j , resulta

$$\|(P_h w_h)'\|_{L^2(\tilde{I}_j)}^2 = \sum_{I_k \subset \tilde{I}_j} h_k \|(P_h w_h)'\|_{L^\infty(I_k)}^2. \quad (1.46)$$

Atendendo a que a malha é regular então

$$\|(P_h w_h)'\|_{L^\infty(\tilde{I}_j)} \leq C|I_j|^{-1/2}\|(P_h w_h)'\|_{L^2(\tilde{I}_j)},$$

o que conclui a demonstração. \blacksquare

Como corolário dos lemas anteriores obtém-se o resultado seguinte.

Teorema 1.8 *Se a malha é regular, nas condições do Teorema 1.5, tem-se a estimativa*

$$\begin{aligned} \|u' - K_h(P_h u_h)'\|_{L^2(0,R)} &\leq C \left(h_{max}^2 \|u\|_{H^3(0,R)} + \|P_h(R_h u - u_h)\|_{H^1(0,R)} \right) \\ &\leq C h_{max}^2 \|u\|_{H^3(0,R)}. \end{aligned}$$

1.1.7 Resultados numéricos

Nesta secção pretendemos ilustrar a estimativa do Teorema 1.5. Para o efeito, apresentamos resultados numéricos para dois problemas usando diferentes estratégias para a selecção de malhas.

Consideremos em primeiro lugar o problema de convecção-difusão

$$-\varepsilon u''(x) - u'(x) + 2u(x) = e^{x-1} \quad \text{em } (0, 1), \quad (1.47)$$

com $u(0) = u(1) = 0$.

Para o primeiro exemplo, seja $\varepsilon = 0.5$. A Figura 1.1 ilustra o comportamento do erro da solução numérica determinada com o método (1.9)-(1.10), considerando 500 malhas geradas aleatoriamente ($N - 1$ pontos aleatórios do intervalo $(0, 1)$), onde N varia de 500 a 3000.

No gráfico, no eixo das abcissas consideramos o logaritmo do passo máximo e o eixo das ordenadas corresponde ao logaritmo da norma do erro $\|e_h\|_{H^1(0,R)}$, $e_h := P_h R_h u - P_h u_h$. A linha corresponde à recta dos mínimos quadrados e tem declive 2.0815, o que confirma estimativas do Teorema 1.5.

Se $0 < \varepsilon \ll 1$ a solução do problema (1.47) tem uma camada limite em $x = 0$ e então é importante considerar malhas adaptadas à natureza do problema. Destas, destacamos as malhas Shishkin ([44], [46], [61]), malhas Bakhvalov ([44], [46]), malhas Bakhvalov-Shishkin ([61]) e malhas baseadas em critérios de equidistribuição ([45], [53], [58],[62]). Convém referir que o método (1.9)-(1.10) não é especialmente indicado para problemas com camada limite, uma vez que a discretização do termo de convecção introduz soluções numéricas com oscilações. Na literatura existem métodos adequados a problemas singularmente perturbados ([45], [46] e outras referências aí apresentadas), onde o termo de convecção aparece discretizado por diferenças “upwind”. Mas por vezes, impondo restrições à malha, surgem também discretizações com diferenças centradas neste contexto (por exemplo em [44]). O motivo que nos leva a apresentar resultados numéricos para um problema com camada limite é o facto de ser conveniente usar malhas fortemente não uniformes, o que permite ilustrar o desempenho do método relativamente a esse aspecto. Em

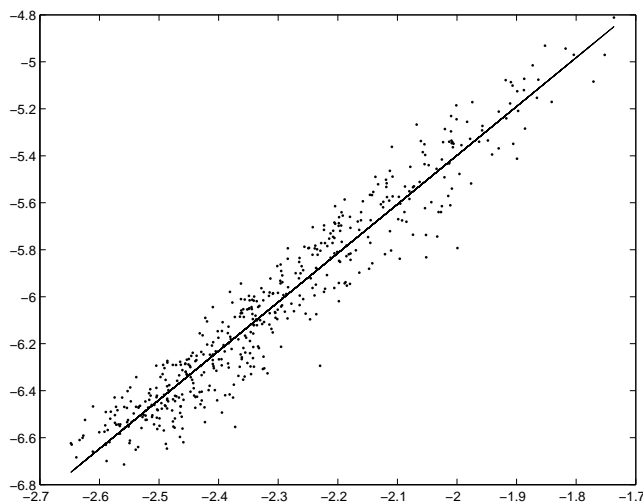


Figura 1.1: Problema (1.47): $\log(\|e_h\|_{H^1(0,R)})$ versus $\log(h_{max})$.

[36] são apresentados resultados numéricos para um problema deste tipo e comparadas várias formas de discretização para o termo de convecção, incluindo a que nós consideramos.

As malhas adaptativas podem ser divididas em duas classes principais: malhas escolhidas *a priori* e malhas que são construídas através de um processo iterativo que começa, em geral, com uma malha uniforme. Um exemplo de malhas do primeiro grupo são as malhas Shishkin definidas por

$$x_i := \begin{cases} \tau_0 \varepsilon \varphi(i/N), & i = 0, 1, \dots, N/2, \\ 1 - (1 - \tau_0 \varepsilon \ln N) \frac{2(N-i)}{N}, & i = N/2 + 1, \dots, N, \end{cases} \quad (1.48)$$

em que

$$\varphi(t) = 2(\ln N)t.$$

Nas tabelas 1.1 e 1.2 apresentamos resultados obtidos com malhas Shishkin, tomando, em (1.48), $\tau_0 = 2$. Para a construção das tabelas 1.3 e 1.4 foram usadas malhas Bakhvalov-Shishkin que são também definidas por (1.48), mas com

$$\varphi(t) = -\ln(1 - 2(1 - N^{-1})t).$$

Os resultados correspondem à solução numérica de (1.47) usando o método (1.9)-(1.10) e estão de acordo com a estimativa do Teorema 1.5. São também apresentados os resultados correspondentes ao método de elementos finitos *standard* obtidos em [61], onde o erro é calculado usando a norma pesada

$$\|v\|_\varepsilon^2 := \varepsilon \|v'\|_{L^2(0,R)}^2 + \|v\|_{L^2(0,R)}^2.$$

Para que os métodos possam ser facilmente comparados, calculamos também o erro correspondente à solução numérica obtida pelo método (1.9)-(1.10) relativamente a essa norma.

N	Método (1.9)-(1.10)					
	h_{max}	h_{min}	$\ e_h\ _{H^1}$	razão	$\ e_h\ _\varepsilon$	razão
32	6.246e-02	4.332e-05	1.561e-01	1.40	1.678e-03	1.46
64	3.122e-02	2.599e-05	5.918e-02	1.51	6.120e-04	1.54
128	1.561e-02	1.516e-05	2.073e-02	1.59	2.110e-04	1.60
256	7.804e-03	8.664e-06	6.888e-03	1.64	6.959e-05	1.65
512	3.901e-03	4.874e-06	2.205e-03	1.68	2.219e-05	1.69
1024	1.950e-03	2.708e-06	6.861e-04	1.72	6.889e-06	1.72
2048	9.751e-04	1.489e-06	2.088e-04	1.74	2.094e-06	1.74
4096	4.875e-04	8.123e-07	6.240e-05	1.76	6.252e-07	1.76
8192	2.437e-04	4.400e-07	1.837e-05	1.78	1.840e-07	1.78
16384	1.218e-04	2.369e-07	5.342e-06	-	5.347e-08	-

Tabela 1.1: Malha Shishkin , $\varepsilon=1e-04$.

N	Método (1.9)-(1.10)						MEF ([61])
	h_{max}	h_{min}	$\ e_h\ _{H^1}$	razão	$\ e_h\ _\varepsilon$	razão	
32	6.250e-02	4.332e-09	1.561e+01	1.40	1.678e-03	1.46	
64	3.125e-02	2.599e-09	5.918e+00	1.51	6.119e-04	1.54	
128	1.562e-02	1.516e-09	2.073e+00	1.59	2.109e-04	1.60	
256	7.812e-03	8.664e-10	6.889e-01	1.64	6.958e-05	1.65	1.624e-04
512	3.906e-03	4.874e-10	2.205e-01	1.68	2.219e-05	1.69	5.151e-05
1024	1.953e-03	2.708e-10	6.863e-02	1.72	6.890e-06	1.72	1.592e-05
2048	9.766e-04	1.489e-10	2.089e-02	1.74	2.094e-06	1.74	4.818e-06
4096	4.883e-04	8.123e-11	6.245e-03	1.76	6.257e-07	1.76	1.434e-06
8192	2.441e-04	4.400e-11	1.841e-03	1.77	1.843e-07	1.78	4.211e-07
16384	1.221e-04	2.369e-11	5.382e-04	-	5.384e-08	-	1.221e-07

Tabela 1.2: Malha Shishkin , $\varepsilon=1e-08$.

N	Método (1.9)-(1.10)					
	h_{max}	h_{min}	$\ e_h\ _{H^1}$	razão	$\ e_h\ _\varepsilon$	razão
32	6.246e-02	1.249e-05	1.576e-02	2.03	6.458e-04	1.99
64	3.122e-02	6.249e-06	3.850e-03	1.99	1.626e-04	2.00
128	1.561e-02	3.125e-06	9.718e-04	1.95	4.067e-05	2.00
256	7.804e-03	1.562e-06	2.510e-04	1.94	1.018e-05	2.00
512	3.901e-03	7.812e-07	6.526e-05	1.92	2.552e-06	1.99
1024	1.950e-03	3.906e-07	1.723e-05	1.88	6.404e-07	1.99
2048	9.751e-04	1.953e-07	4.688e-06	1.83	1.611e-07	1.98
4096	4.875e-04	9.766e-08	1.315e-06	1.85	4.071e-08	1.98
8192	2.437e-04	4.883e-08	3.639e-07	13.29	1.029e-08	13.37
16384	2.197e-04	2.441e-08	9.182e-08	-	2.576e-09	-

Tabela 1.3: Malha Bakhvalov-Shishkin, $\varepsilon=1e-04$.

A razão de convergência é determinada através da fórmula

$$\text{razão} := \log_2 \left(\frac{\|P_h R_h u - P_h u_h\|_{H^1(0,R)}}{\|P_{\tilde{h}} R_{\tilde{h}} u - P_{\tilde{h}} u_{\tilde{h}}\|_{H^1(0,R)}} \right),$$

onde u_h e $u_{\tilde{h}}$ são soluções numéricas correspondentes a malhas com $N+1$ e $2(N+1)$ pontos, respectivamente.

N	Método (1.9)-(1.10)						MEF ([61])
	h_{max}	h_{min}	$\ e_h\ _{H^1}$	razão	$\ e_h\ _\varepsilon$	razão	$\ e_h\ _\varepsilon$
32	6.250e-02	1.249e-09	1.561e+00	2.05	6.472e-04	1.99	
64	3.125e-02	6.249e-10	3.767e-01	2.03	1.632e-04	2.00	
128	1.562e-02	3.125e-10	9.229e-02	2.02	4.090e-05	2.00	
256	7.812e-03	1.562e-10	2.283e-02	2.01	1.023e-05	2.00	5.382e-06
512	3.906e-03	7.812e-11	5.672e-03	2.01	2.559e-06	2.00	1.353e-06
1024	1.953e-03	3.906e-11	1.410e-03	2.02	6.391e-07	2.01	3.393e-07
2048	9.766e-04	1.953e-11	3.487e-04	2.06	1.591e-07	2.03	8.497e-08
4096	4.883e-04	9.766e-12	8.364e-05	2.26	3.904e-08	2.11	2.126e-08
8192	2.441e-04	4.883e-12	1.746e-05	3.20	9.048e-09	2.51	5.317e-09
16384	1.221e-04	2.441e-12	1.902e-06	-	1.591e-09	-	1.321e-09

Tabela 1.4: Malha Bakhvalov-Shishkin, $\varepsilon=1e-08$.

Observamos que a razão tem um valor assintótico próximo de 2. Notamos também que os resultados obtidos são semelhantes aos retirados de [61]. Tal facto não é surpreendente uma vez que o método (1.9)-(1.10) é uma variante do método de elementos finitos segmentado linear.

Nas tabelas 1.5 e 1.6 apresentamos resultados relativos ao segundo tipo de malhas adaptativas que referimos anteriormente. As malhas têm um número fixo de nós, $N + 1$, e são inicialmente uniformes. Os pontos são movidos de acordo com os seguintes critérios: equidistribuição do comprimento de arco (Tabela 1.7) ou equidistribuição baseada nos termos que constituem a expressão do erro (1.37) (Tabela 1.8). Para cada malha \mathbb{I}_h consideramos

$$\ell_j := h_j \sqrt{1 + \left(\frac{u_{j+1} - u_j}{h_j} \right)^2} \approx \int_{x_j}^{x_{j+1}} (1 + u'^2)^{1/2} dx,$$

no primeiro caso, e

$$\ell_j \approx h_j^5 \left(|au''''|_{j+\frac{1}{2}}^2 + |(bu)''|_{j+\frac{1}{2}}^2 + |(cu)''|_{j+\frac{1}{2}}^2 + |(cu)'|_{j+\frac{1}{2}}^2 \right), \quad (1.49)$$

no segundo caso. As aproximações para as derivadas de ordem dois ou três são obtidas directamente de (1.47) exprimindo u'' e u''' em função de u e u' , enquanto que u e u' são aproximadas pela solução discreta. Assim, seja C_j uma aproximação para

$$|au''''|_{j+\frac{1}{2}}^2 + |(bu)''|_{j+\frac{1}{2}}^2 + |(cu)''|_{j+\frac{1}{2}}^2 + |(cu)'|_{j+\frac{1}{2}}^2$$

determinada do modo descrito. Tomamos

$$\ell_j = h_j^5 C_j, \quad j = 0, \dots, N-1.$$

O processo de equidistribuição é iterativo e consiste em obter (x_j, u_j) tais que

$$\ell_{j-1} \approx \ell_j, \quad j = 1, \dots, N-1.$$

Nos dois casos apresentados o critério de paragem usado foi

$$\frac{c_0}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \ell_j \geq \max_j \ell_j,$$

para algum $c_0 > 1$. Note-se que quanto maior for c_0 menor é o número de iterações necessário. Os valores das tabelas correspondem a $c_0 = 2$.

N	Método (1.9)-(1.10)					
	h_{max}	h_{min}	$\ e_h\ _{H^1}$	razão	$\ e_h\ _\varepsilon$	razão
32	4.053e-02	3.092e-05	1.118e+00	1.57	1.685e-02	1.96
64	2.028e-02	1.219e-05	3.757e-01	-0.17	4.342e-03	-0.01
128	1.014e-02	5.354e-06	4.225e-01	1.73	4.369e-03	1.77
256	5.073e-03	2.207e-06	1.272e-01	0.52	1.281e-03	0.53
512	2.535e-03	1.250e-06	8.870e-02	1.77	8.893e-04	1.77
1024	1.267e-03	5.596e-07	2.607e-02	1.99	2.610e-04	1.99
2048	6.337e-04	2.741e-07	6.558e-03	1.47	6.560e-05	1.47
4096	3.168e-04	1.365e-07	2.370e-03	2.12	2.370e-05	2.12
8192	1.584e-04	6.816e-08	5.458e-04	1.65	5.459e-06	1.65
16384	7.921e-05	4.446e-08	1.739e-04	-	1.740e-06	-

Tabela 1.5: Equidistribuição do comprimento de arco, $\varepsilon=1e-04$.

N	Método (1.9)-(1.10)					
	h_{max}	h_{min}	$\ e_h\ _{H^1}$	razão	$\ e_h\ _\varepsilon$	razão
32	3.125e-02	3.125e-02	6.457e+00	-0.72	8.982e-02	-0.38
64	1.562e-02	1.562e-02	1.061e+01	-3.40	1.172e-01	-3.49
128	4.572e-02	4.732e-05	2.763e-01	2.74	2.764e-03	2.74
256	1.719e-02	1.245e-05	1.887e-02	2.10	1.889e-04	2.10
512	7.134e-03	4.839e-06	2.982e-03	2.35	2.985e-05	2.35
1024	2.293e-03	1.325e-06	2.069e-04	2.11	2.070e-06	2.11
2048	1.174e-03	6.456e-07	5.040e-05	1.24	5.042e-07	1.24
4096	5.851e-04	4.573e-07	2.121e-05	2.86	2.121e-07	2.86
8192	3.001e-04	1.608e-07	3.145e-06	1.74	3.146e-08	1.74
16384	1.412e-04	8.915e-08	8.470e-07	-	8.473e-09	-

Tabela 1.6: Equidistribuição baseada na estimativa (1.37), $\varepsilon=1e-04$.

A Figura 1.2 ilustra o comportamento da solução numérica obtida com uma, três e cinco iterações do algoritmo da equidistribuição do comprimento de arco.

Observamos, nas tabelas 1.5 e 1.6, que os resultados obtidos considerando a equidistribuição baseada em (1.37) são mais precisos que os obtidos com o critério que considera o comprimento de arco.

Apresentamos seguidamente resultados numéricos para o problema

$$-\left(\frac{1}{\alpha} + \alpha(x - \bar{x})^2\right)u' = 2 + (2\alpha(x - \bar{x}))(\arctan(\alpha(x - \bar{x})) + \arctan(\alpha\bar{x})) \quad (1.50)$$

com condição de fronteira de Dirichlet $u(0) = u(1) = 0$, onde \bar{x} e α são parâmetros. O problema anterior, retirado de [16], tem por solução

$$u(x) = (1 - x)(\arctan(\alpha(x - \bar{x})) + \arctan(\alpha\bar{x})).$$

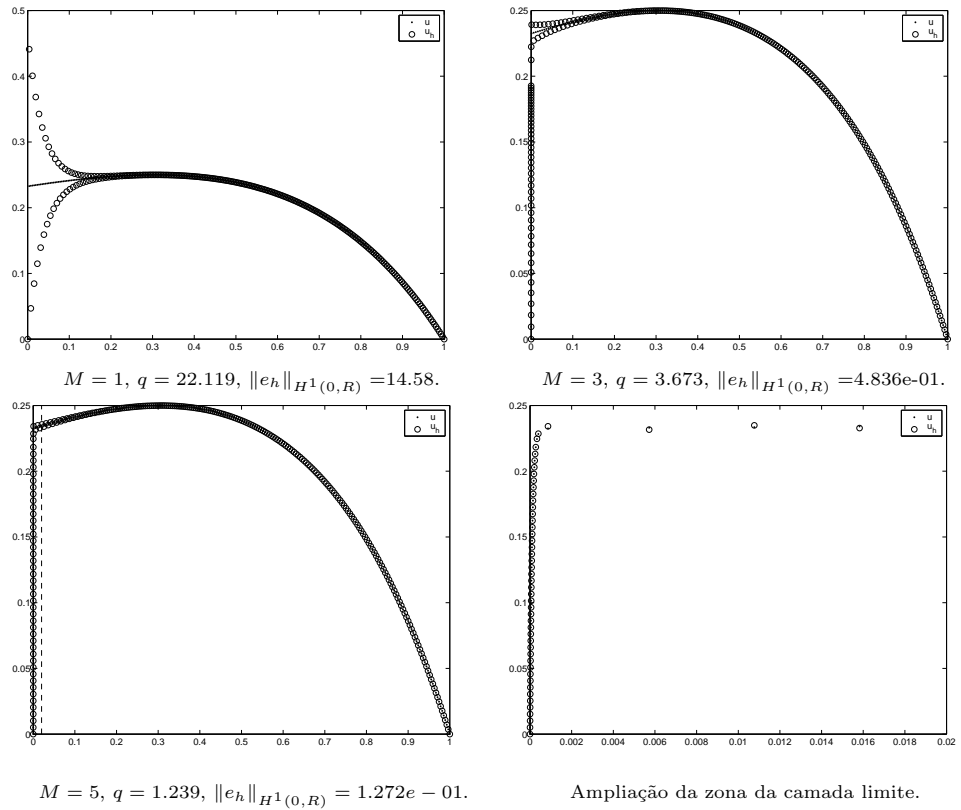


Figura 1.2: Movimento da malha com equidistribuição do comprimento de arco, $N = 256$, $\varepsilon = 1e-4$.

No primeiro exemplo escolhemos $\bar{x} = 0.36388$ e $\alpha = 1$. Na Figura 1.3 apresentamos o comportamento do erro da solução numérica em 500 malhas geradas aleatoriamente, onde N varia de 500 a 3000. A recta dos mínimos quadrados para a nuvem de pontos tem declive 2.085, o que ilustra a estimativa do Teorema 1.5.

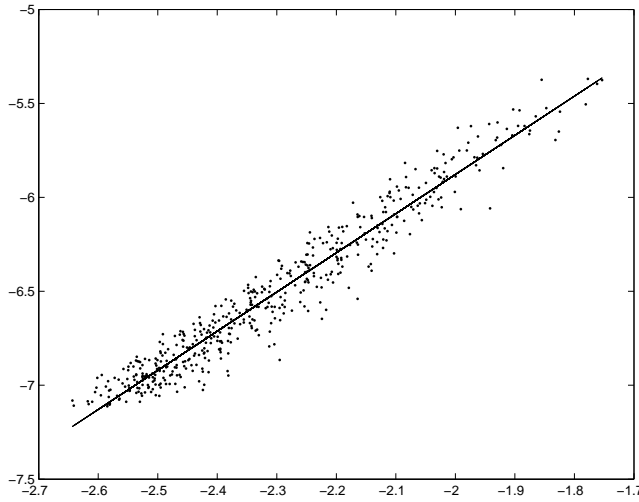


Figura 1.3: Problema (1.50): $\log(\|e_h\|_{H^1(0,R)})$ versus $\log(h_{max})$.

No segundo exemplo tomamos $\alpha = 100$ e $\alpha = 1000$. Para valores elevados de α a solução tem uma camada limite interior na vizinhança de $x = \bar{x}$.

Nas tabelas 1.7 e 1.8 apresentamos resultados relativos a malhas adaptativas. Neste caso, em vez de (1.49), usamos

$$\ell_j \approx h_j^5 \left(|au'''|_{j+\frac{1}{2}}^2 + |(bu)''|_{j+\frac{1}{2}}^2 + |(cu)''|_{j+\frac{1}{2}}^2 + |(cu)'|_{j+\frac{1}{2}}^2 \right)^{1/2},$$

ou seja, no processo de equidistribuição, em vez de (1.37) usamos a sua raiz quadrada. Esta alteração diminui a influência dos valores da expressão nos intervalos o que permitiu obter melhores resultados para valores pequenos de N . Esta estratégia de suavização da influência das derivadas foi considerada, por exemplo, em [36].

Mais uma vez, as tabelas mostram um valor assintótico para a ordem de convergência próximo de 2.

N	$\alpha=100$				$\alpha=10000$			
	h_{max}	h_{min}	$\ e_h\ _{H^1}$	razão	h_{max}	h_{min}	$\ e_h\ _{H^1}$	razão
32	1.190e-01	2.665e-03	4.461e-01	2.11	1.379e-01	2.401e-05	1.231e+01	0.92
64	5.883e-02	1.078e-03	1.033e-01	1.35	6.879e-02	1.110e-05	6.521e+00	1.51
128	2.940e-02	4.763e-04	4.066e-02	1.86	3.436e-02	5.489e-06	2.296e+00	1.63
256	1.470e-02	2.431e-04	1.120e-02	1.93	1.715e-02	2.860e-06	7.400e-01	1.56
512	7.353e-03	1.191e-04	2.935e-03	1.98	8.578e-03	1.350e-06	2.516e-01	1.54
1024	3.676e-03	5.938e-05	7.447e-04	1.99	4.287e-03	6.729e-07	8.667e-02	2.05
2048	1.838e-03	2.970e-05	1.872e-04	2.00	2.144e-03	3.370e-07	2.099e-02	1.91
4096	9.198e-04	1.485e-05	4.687e-05	2.00	1.072e-03	1.685e-07	5.581e-03	1.98
8192	4.607e-04	7.423e-06	1.172e-05	2.00	5.359e-04	1.038e-07	1.412e-03	1.97
16384	2.304e-04	3.711e-06	2.930e-06	-	2.680e-04	4.364e-08	3.602e-04	-

Tabela 1.7: Equidistribuição do comprimento de arco.

N	$\alpha=100$				$\alpha=10000$			
	h_{max}	h_{min}	$\ e_h\ _{H^1}$	razão	h_{max}	h_{min}	$\ e_h\ _{H^1}$	razão
32	2.306e-01	2.408e-03	1.419e-01	1.98	2.997e-01	3.449e-05	3.301e+00	2.06
64	1.524e-01	1.271e-03	3.592e-02	1.71	1.955e-01	1.822e-05	7.892e-01	1.93
128	1.023e-01	6.300e-04	1.101e-02	2.17	1.679e-01	9.133e-06	2.069e-01	1.99
256	6.675e-02	3.406e-04	2.442e-03	1.93	1.520e-01	4.538e-06	5.219e-02	1.99
512	4.428e-02	1.701e-04	6.410e-04	1.92	1.234e-01	2.236e-06	1.311e-02	1.96
1024	2.926e-02	8.502e-05	1.692e-04	1.92	9.168e-02	1.105e-06	3.371e-03	1.99
2048	1.926e-02	4.250e-05	4.485e-05	1.85	6.366e-02	5.518e-07	8.459e-04	1.92
4096	1.264e-02	2.125e-05	1.246e-05	1.93	3.898e-02	2.931e-07	2.233e-04	2.00
8192	8.284e-03	1.063e-05	3.276e-06	1.97	2.545e-02	1.471e-07	5.571e-05	1.99
16384	5.424e-03	5.313e-06	8.357e-07	-	1.634e-02	7.322e-08	1.400e-05	-

Tabela 1.8: Equidistribuição baseada em (1.37).

1.2 Caso bidimensional

Apresentamos seguidamente a extensão natural dos resultados principais da Secção 1.1 a problemas elípticos definidos em domínios do plano.

1.2.1 Introdução

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um domínio poligonal limitado. Consideremos o problema diferencial elíptico, de segunda ordem

$$Au := -(au_x)_x - (bu_x)_y - (bu_y)_x - (cu_y)_y + (du)_x + (eu)_y + fu = g \quad \text{em } \Omega \quad (1.51)$$

com condição de fronteira de Dirichlet

$$u = \psi \quad \text{em } \partial\Omega, \quad (1.52)$$

ou condição de fronteira de Robin

$$Bu := (au_x + bu_y)\eta_x + (bu_x + cu_y)\eta_y + \alpha u = \psi \quad \text{em } \partial\Omega, \quad (1.53)$$

onde (η_x, η_y) denota a normal unitária exterior de $\partial\Omega$.

Suponhamos que A é um operador uniformemente elíptico e que as funções coeficiente são suficientemente regulares ($a, b, c \in W^{3,\infty}(\Omega)$, $d, e, f \in W^{2,\infty}(\Omega)$) e $\alpha \in W^{2,\infty}(\partial\Omega)$ ¹. Estas condições de regularidade são necessárias na obtenção do resultado de convergência do método de diferenças finitas que definimos de seguida.

Seja $H = (h, k)$, onde $h = (h_j)_{\mathbf{Z}}$ e $k = (k_\ell)_{\mathbf{Z}}$ são duas sequências de números positivos. Consideramos a malha

$$\mathbb{R}_H := \mathbb{R}_1 \times \mathbb{R}_2 \subset \mathbb{R}^2,$$

onde

$$\mathbb{R}_1 := \{x_j \in \mathbb{R} : x_{j+1} = x_j + h_j, j \in \mathbb{Z}\},$$

com $x_0 \in \mathbb{R}$ dado, e \mathbb{R}_2 é definida analogamente com o vector de espaçamentos k em vez de h .

Consideramos os conjuntos

$$\Omega_H := \Omega \cap \mathbb{R}_H, \quad \partial\Omega_H := \partial\Omega \cap \mathbb{R}_H, \quad \bar{\Omega}_H := \bar{\Omega} \cap \mathbb{R}_H.$$

Os pontos de $\partial\Omega_H$ definem uma partição de $\partial\Omega$. Por \mathcal{T}_H^b denotamos os segmentos dessa partição.

Assumimos que a malha satisfaz a seguinte condição de compatibilidade em relação à região Ω .

(Geo) A intersecção de $\partial\Omega$ com qualquer rectângulo $(x_j, x_{j+1}) \times (y_\ell, y_{\ell+1})$ formado pela malha \mathbb{R}_H ou é vazia ou é uma diagonal do rectângulo.

Representamos por W_H o espaço das funções definidas nos pontos da malha $\bar{\Omega}_H$.

Definimos operadores de diferenças centradas δ_{cx} , δ_x , δ_{cy} e δ_y de forma análoga a (1.6)–(1.8), em que os dois primeiros correspondem a diferenças relativas à variável x e os últimos correspondem a diferenças relativas à variável y .

Seja A_H o operador de diferenças

$$\begin{aligned} A_H u_H &:= -\delta_x(a\delta_x u_H) - \delta_{cx}(b\delta_{cy} u_H) - \delta_{cy}(b\delta_{cx} u_H) - \delta_y(c\delta_y u_H) + \delta_{cx}(d u_H) \\ &\quad + \delta_{cy}(e u_H) + f u_H. \end{aligned} \quad (1.54)$$

A discretização da equação diferencial (1.51) usando o operador A_H conduz à equação de diferenças

$$A_H u_H = g_H \text{ em } \Omega_H, \quad (1.55)$$

¹Com a notação $\alpha \in W^{2,\infty}(\partial\Omega)$ queremos afirmar que $\alpha \in W^{2,\infty}(\Gamma)$ para cada segmento Γ de $\partial\Omega$.

em que

$$g_H(x_j, y_\ell) := \frac{1}{|\square_{j,\ell}|} \int_{\square_{j,\ell}} g(x, y) dx dy, \quad (x_j, y_\ell) \in \bar{\Omega}_H, \quad (1.56)$$

onde $\square_{j,\ell} := (x_{j-1/2}, x_{j+1/2}) \times (y_{\ell-1/2}, y_{\ell+1/2}) \cap \Omega$, com $x_{j-1/2} := x_j - h_{j-1}/2$, $x_{j+1/2} := x_j + h_j/2$, sendo $y_{\ell-1/2}$ e $y_{\ell+1/2}$ definidos analogamente, e $|\square_{j,\ell}|$ denota a área de $\square_{j,\ell}$.

Consideremos (1.55) com a condição

$$u_H = \psi_H \quad \text{em} \quad \partial\Omega_H,$$

com $\psi_H = R_H\psi$ quando o problema diferencial tem condição de fronteira de Dirichlet. A discretização da condição de fronteira (1.53) é definida de modo a ser válida a equivalência entre o método de diferenças finitas e um método de elementos finitos que apresentamos na secção seguinte. Em [29] é apresentada a discretização anterior que aqui omitimos, uma vez (1.63) constitui uma forma mais simples de descrever o método.

1.2.2 Problema variacional discreto

Nesta secção apresentamos um método de elementos finitos apenas para o problema (1.51)-(1.53). O caso da condição de Dirichlet para a fronteira é análogo mas mais simples.

Seja $a(\cdot, \cdot)$ a forma sesquilinear

$$\begin{aligned} a(v, w) := & (av_x, w_x)_0 + (bv_x, w_y)_0 + (bv_y, w_x)_0 + (cv_y, w_y)_0 - (dv, w_x)_0 \\ & - (ev, w_y)_0 + (fv, w)_0 + (dv\eta_x + ev\eta_y + \alpha v, w)_{L^2(\partial\Omega)}, \end{aligned} \quad (1.57)$$

$v, w \in H^1(\Omega)$. Ao problema diferencial (1.51)-(1.53) associamos o problema variacional: determinar $u \in H^1(\Omega)$ tal que

$$a(u, v) = (g, v)_0 + (\psi, v)_{L^2(\partial\Omega)} \quad \forall v \in H^1(\Omega). \quad (1.58)$$

De seguida definimos uma versão discreta do problema variacional anterior.

Seja \mathcal{T}_H uma triangulação definida em $\bar{\Omega}$ tal que os vértices de \mathcal{T}_H coincidem com $\bar{\Omega}_H$. Os pontos de $\partial\Omega_H$ definem uma partição de $\partial\Omega$ e denotamos o conjunto formado pelos segmentos desta partição por \mathcal{T}_H^b .

Seja P_H o operador de interpolação segmentado linear induzido pela triangulação \mathcal{T}_H .

Considere-se a_H a soma de formas sesquilineares

$$a_H := a + b + c + d + e + f + \gamma, \quad (1.59)$$

em que cada parcela está associada ao correspondente termo de (1.57). As aproximações anteriores são construídas tendo por base os elementos finitos lineares combinados com fórmulas de integração convenientes. Seja $\Delta \in \mathcal{T}_H$. Representamos por $a_{\Delta,x}$ o valor da função a no ponto médio do lado de Δ paralelo ao eixo xx . Tomamos

$$a(v_H, w_H) := \sum_{\Delta \in \mathcal{T}_H} a_{\Delta,x} \int_{\Delta} (P_H v_H)_x (P_H \bar{w}_H)_x dx dy, \quad (1.60)$$

$v_H, w_H \in W_H$. De forma análoga, define-se $c_{\Delta,y}$ como o valor da função c no ponto médio do lado de Δ paralelo com o eixo yy e

$$c(v_H, w_H) := \sum_{\Delta \in \mathcal{T}_H} c_{\Delta,y} \int_{\Delta} (P_H v_H)_y (P_H \bar{w}_H)_y dx dy.$$

Seja

$$(P_H v_H)_{\Delta,x} := P_H v_H(x_{\Delta}, y_{\Delta}), \quad \Delta \in \mathcal{T}_H,$$

onde (x_{Δ}, y_{Δ}) é o ponto médio do lado de Δ paralelo ao eixo xx . De igual modo, introduzimos $(P_H v_H)_{\Delta,y}$, em que (x_{Δ}, y_{Δ}) , neste caso, representa o ponto médio do lado de Δ paralelo ao eixo yy . A aproximação dos termos de primeira ordem define-se do modo seguinte

$$d(v_H, w_H) := - \sum_{\Delta \in \mathcal{T}_H} [P_H(dv_H)]_{\Delta,x} \int_{\Delta} (P_H \bar{w}_H)_x dx dy,$$

$$e(v_H, w_H) := - \sum_{\Delta \in \mathcal{T}_H} [P_H(ev_H)]_{\Delta,y} \int_{\Delta} (P_H \bar{w}_H)_y dx dy.$$

Tomamos ainda

$$f(v_H, w_H) := \sum_{(x_j, y_{\ell}) \in \bar{\Omega}_H} |\square_{j,\ell}| f(x_j, y_{\ell}) v_{j,\ell} \bar{w}_{j,\ell}.$$

A definição do termo da forma sesquilinear associado às derivadas mistas, no caso em que o domínio apresenta pelo menos um lado não paralelo aos eixos coordenados, requer a construção de duas triangulações, que denotamos por $\mathcal{T}_H^{(1)}$ e $\mathcal{T}_H^{(2)}$. Estas são obtidas a partir da união disjunta

$$\mathbb{R}_H = \mathbb{R}_H^{(1)} \dot{\cup} \mathbb{R}_H^{(2)},$$

sendo $\mathbb{R}_H^{(1)}$ e $\mathbb{R}_H^{(2)}$ os conjuntos de pontos $(x_j, y_{\ell}) \in \mathbb{R}_H$ tais que a soma dos índices $j + \ell$ é par e ímpar, respectivamente. Para simplificar a notação introduzimos ainda $\mathbb{R}_H^{(3)} := \mathbb{R}_H^{(1)}$. A cada pontos $(x_j, y_{\ell}) \in \mathbb{R}_H$ associamos os triângulos $\Delta_{j,\ell}^{(i)}$, $i =$

1, 2, 3, 4, que têm um ângulo rectângulo em (x_j, y_ℓ) e dois dos pontos vizinhos mais próximos de (x_j, y_ℓ) como restantes vértices. Definimos as triângulações

$$\mathcal{T}_H^{(s)} := \mathcal{T}_{H,1}^{(s)} \cup \mathcal{T}_{H,2}^{(s)} \quad , \quad s = 1, 2,$$

com

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{H,1}^{(s)} &:= \left\{ \Delta_{j,\ell}^{(i)} \subset \bar{\Omega} \quad , \quad (x_j, y_\ell) \in \mathbb{R}_H^{(s)} \quad , \quad i \in \{1, 2, 3, 4\} \right\} \\ \mathcal{T}_{H,2}^{(s)} &:= \left\{ \Delta_{j,\ell}^{(i)} \subset \left(\bar{\Omega} \setminus \bigcup_{\Delta \in \mathcal{T}_{H,1}^{(s)}} \overset{\circ}{\Delta} \right) \quad , \quad (x_j, y_\ell) \in \mathbb{R}_H^{(s+1)} \quad , \quad i \in \{1, 2, 3, 4\} \right\} \end{aligned}$$

onde $\overset{\circ}{\Delta}$ representa o interior de Δ . Na Figura 1.4 apresentamos um exemplo de uma triângulação deste tipo. Os triângulos assinalados com a letra T correspondem a triângulos de $\mathcal{T}_{H,2}^{(s)}$.

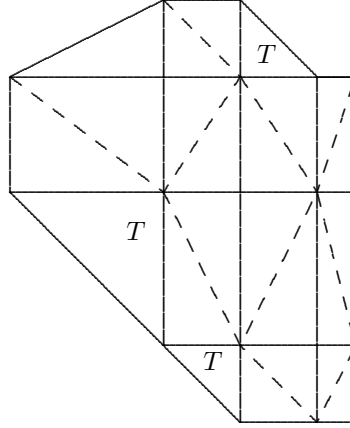


Figura 1.4: Triângulação.

Por $P_H^{(s)}$ denotamos o operador de interpolação segmentado linear associado à triângulação $\mathcal{T}_H^{(s)}$.

Com o objectivo de definir $b(v_H, w_H)$ introduzimos $b_\Delta := b(x_\Delta, y_\Delta)$, em que (x_Δ, y_Δ) é o vértice de Δ associado com o ângulo recto de Δ . Seja $b_H(\cdot, \cdot)$ a seguinte forma sesquilinear

$$b(v_H, w_H) := \frac{1}{2} \left(b_H^{(1)}(v_H, w_H) + b_H^{(2)}(v_H, w_H) \right),$$

em que

$$b^{(s)}(v_H, w_H) := \sum_{\Delta \in \mathcal{T}_H^{(s)}} b_\Delta \int_\Delta \left[(P_H^{(s)} v_H)_x (P_H^{(s)} \bar{w}_H)_y + (P_H^{(s)} v_H)_y (P_H^{(s)} \bar{w}_H)_x \right] dx dy,$$

está associada à triangulação $\mathcal{T}_H^{(s)}$, $s = 1, 2$.

A discretização da função ψ da condição de fronteira (1.53) é dada por

$$\psi_H(x_j, y_\ell) = \frac{1}{\sigma_{j\ell}} \int_{\Gamma_{j\ell}} \psi(x, y) d\sigma, \quad (x_j, y_\ell) \in \partial\Omega_H, \quad (1.61)$$

em que $\sigma_{j\ell} := |\Gamma_{j\ell}|$, com $\Gamma_{j\ell} := (x_{j-1/2}, x_{j+1/2}) \times (y_{\ell-1/2}, y_{\ell+1/2}) \cap \partial\Omega$.

Na definição de uma versão discreta do problema variacional (1.58) consideramos os seguintes produtos internos

$$(v_H, w_H)_H := \sum_{(x_j, y_\ell) \in \bar{\Omega}_H} |\square_{j,\ell}| v_H(x_j, y_\ell) w_H(x_j, y_\ell), \quad (1.62)$$

no espaço das funções de rede definidas em $\bar{\Omega}_H$, e

$$\langle \varphi_H, \chi_H \rangle_H := \sum_{(x_j, y_\ell) \in \partial\Omega_H} \sigma_{j\ell} \varphi_{j,\ell} \bar{\chi}_{j,\ell},$$

no espaço funções de rede definidas em $\partial\Omega_H$, que constituem discretizações dos produtos internos de $L^2(\Omega)$ e $L^2(\partial\Omega)$, respectivamente.

A versão discreta do último termo em (1.57) é definida por

$$\gamma(v_H, w_H) := \langle dv_H \eta_x + ev_H \eta_y + \alpha v_H, w_H \rangle_H, \quad v_H, w_H \in W_H.$$

Estamos agora em condições de definir a solução de elementos finitos completamente discreta $u_H \in W_H$ e que é solução do problema variacional

$$a_H(u_H, v_H) = (g_H, v_H)_H + \langle \psi_H, v_H \rangle_H \quad \forall v_H \in W_H. \quad (1.63)$$

O problema (1.63) é equivalente ao método de diferenças finitas (1.55) com as condições de fronteira adequadas (deduzidas em [29]).

1.2.3 Estabilidade e convergência

Apresentamos seguidamente os resultados de estabilidade e convergência.

Note-se que é necessário assumir que o problema (1.58) homogêneo, isto é, com $g = 0$ e $\psi = 0$, tem uma única solução.

Teorema 1.9 *Assuma-se que as malhas $\bar{\Omega}_H$ satisfazem a condição (Geo) e que o problema variacional (1.58) homogéneo tem uma única solução. Então existe uma constante C independente de H tal que, para $H \in \Lambda$, com H_{max} suficientemente pequeno, se tem*

$$\|P_H v_H\|_{H^1(\Omega)} \leq C \sup_{0 \neq w_H \in W_H} \frac{|a_H(v_H, w_H)|}{\|P_H w_H\|_{H^1(\Omega)}} \quad \forall v_H \in W_H.$$

Para a solução de elementos finitos (1.63) tem-se o seguinte resultado de convergência.

Teorema 1.10 *Assuma-se que as malhas $\bar{\Omega}_H$ satisfazem a condição (Geo) e que o problema variacional (1.58) homogéneo tem uma única solução. Então, para H_{max} suficientemente pequeno, o problema discreto (1.63) tem uma única solução. Seja $s \in [2, 3]$.*

1. *Seja u a solução de (1.51)-(1.52).*

(a) *Se Ω é uma união de rectângulos e $u \in H_0^s(\Omega)$, então*

$$\begin{aligned} \|P_H(R_H u - u_H)\|_{H^1(\Omega)} &\leq C \left(\sum_{\Delta \in \mathcal{T}_H} (\text{diam} \Delta)^{2(s-1)} \|u\|_{H^s(\Delta)}^2 \right)^{1/2} \\ &\leq C H_{max}^{s-1} \|u\|_{H^s(\Omega)}. \end{aligned}$$

(b) *Se Ω tem pelo menos um lado oblíquo e $u \in H_0^s(\Omega) \cap W^{2,\infty}(\Omega)$, então*

$$\|P_H(R_H u - u_H)\|_{H^1(\Omega)} \leq H_{max}^{s-1} \|u\|_{H^s(\Omega)} + H_{max}^{3/2} \|u\|_{W^{2,\infty}(\Omega)}.$$

2. *Seja a solução u de (1.51)-(1.53) tal que u pertence a $H^s(\Omega)$, em que Ω é uma união de rectângulos.*

(a) *Se ψ_H é definido por (1.61), então*

$$\|P_H(R_H u - u_H)\|_{H^1(\Omega)} \leq \mathcal{E}_{\mathcal{T}_H, r}(u, u_H) + \mathcal{E}_{\mathcal{T}_H^b, r}(u, u_H)$$

com

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\mathcal{T}_H, r}(u, u_H) &:= C \left(\sum_{\Delta \in \mathcal{T}_H} (\text{diam} \Delta)^{2(s-1)} \|u\|_{H^s(\Delta)}^2 \right)^{1/2} \\ &\leq C H_{max}^{s-1} \|u\|_{H^s(\Omega)} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} & \mathcal{E}_{\mathcal{T}_H^b, r}(u, u_H) \\ & := C \left(\sum_{\Sigma \in \mathcal{T}_H^b} |\Sigma|^3 \left(\|u_x\|_{L^2(\Sigma)}^2 + \|u_y\|_{L^2(\Sigma)}^2 \right) + |\Sigma|^4 \|u_{xy}\|_{L^2(\Sigma)}^2 \right)^{1/2} \\ & \leq C \left(H_{max}^{3/2} (\|u_x\|_{L^2(\partial\Omega)} + \|u_y\|_{L^2(\partial\Omega)}) + H_{max}^2 \|u_{xy}\|_{L^2(\partial\Omega)} \right). \end{aligned}$$

(b) Se $\psi_H = R_H\psi$, então

$$\|P_H(R_H u - u_H)\|_{H^1(\Omega)} \leq \mathcal{E}_{\mathcal{T}_H, r}(u, u_H) + \mathcal{E}_{\mathcal{T}_H^b, r}(u, u_H) + \mathcal{E}_{\mathcal{T}_H^b, r}(\psi)$$

com

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\mathcal{T}_H^b, r}(\psi) & := C \left(\sum_{\Sigma \in \mathcal{T}_H^b} |\Sigma|^3 \|\psi'\|_{L^2(\Sigma)}^2 + |\Sigma|^4 \|\psi''\|_{L^2(\Sigma)}^2 \right)^{1/2} \\ & \leq C \left(H_{max}^{3/2} \|\psi'\|_{L^2(\partial\Omega)} + H_{max}^2 \|\psi''\|_{L^2(\partial\Omega)} \right). \end{aligned}$$

O teorema anterior é uma generalização do correspondente resultado apresentado em [30], onde é estabelecida a mesma ordem de convergência mas admitindo que a solução contínua pertence a $C^4(\Omega)$. Mais ainda, notamos que no trabalho referido são consideradas apenas condições de fronteira de Dirichlet.

1.3 Sistemas elípticos

Nesta secção pretendemos estender o teorema de convergência da secção anterior para equações elípticas escalares, a sistemas de equações elípticas.

1.3.1 Introdução

Consideramos o sistema de n equações de derivadas parciais

$$\sum_{\kappa=1}^n \ell_{i\kappa} u_{\kappa} = g_i \quad \text{em } \Omega, \quad i = 1, \dots, n, \quad (1.64)$$

com condições de fronteira de Dirichlet

$$u_{\kappa} = 0 \quad \text{em } \partial\Omega, \quad \kappa = 1, \dots, n, \quad (1.65)$$

em que Ω representa um domínio como na secção anterior. Em (1.64) $\ell_{i\kappa}$ denota o operador diferencial de segunda ordem

$$\begin{aligned} \ell_{i\kappa} v_{\kappa} := & -(a_{i\kappa}(v_{\kappa})_x)_x - (b_{i\kappa}(v_{\kappa})_x)_y - (b_{i\kappa}(v_{\kappa})_y)_x - (c_{i\kappa}(v_{\kappa})_y)_y \\ & + (d_{i\kappa}v_{\kappa})_x + (e_{i\kappa}v_{\kappa})_y + f_{i\kappa}v_{\kappa}. \end{aligned} \quad (1.66)$$

Assumimos que o sistema de equações de derivadas parciais é uniformemente e fortemente elíptico, isto é, verifica (B.3), as funções coeficiente são suficientemente regulares ($a_{i\kappa}, b_{i\kappa}, c_{i\kappa} \in W^{3,\infty}(\Omega)$, $d_{i\kappa}, e_{i\kappa}, f_{i\kappa} \in W^{2,\infty}(\Omega)$) e $g_i \in H^1(\Omega)$, $i = 1 \dots n$.

Seja $u_H \in \mathbf{W}_H := W_H \times \dots \times W_H$ (n -vezes), tal que

$$\begin{aligned} A_H u_H &= g_H \quad \text{em } \Omega_H \\ u_H &= 0 \quad \text{em } \partial\Omega_H, \end{aligned} \quad (1.67)$$

onde

$$A_H u_H := [A_{H,i} u_H]_{i=1,\dots,n}, \quad A_{H,i} u_H := \sum_{\kappa=1}^n A_{H,i\kappa} u_{H,\kappa} \quad (1.68)$$

e

$$\begin{aligned} A_{H,i\kappa} u_{H,\kappa} := & -\delta_x(a_{i\kappa}\delta_x u_{H,\kappa}) - \delta_{cy}(b_{i\kappa}\delta_{cx} u_{H,\kappa}) - \delta_{cx}(b_{i\kappa}\delta_{cy} u_{H,\kappa}) \\ & -\delta_y(c_{i\kappa}\delta_y u_{H,\kappa}) + \delta_{cx}(d_{i\kappa}u_{H,\kappa}) + \delta_{cy}(e_{i\kappa}u_{H,\kappa}) + f_{i\kappa}u_{H,\kappa}. \end{aligned}$$

No segundo membro de (1.67) tomamos $g_H := [g_{H,i}]_{i=1,\dots,n}$,

$$g_{H,i}(x_j, y_\ell) := \frac{1}{|\square_{j,\ell}|} \int_{\square_{j,\ell}} g_i(x, y) dx dy.$$

Observamos que, se Ω tem pelo menos um lado oblíquo, então existem pontos $(x_j, y_\ell) \in \Omega_H$ tais que dois dos seus pontos vizinhos pertencem à parte oblíqua da fronteira. Atendendo a que para esses pontos o cálculo de $A_H u_H$ envolve pontos

que estão fora do domínio, temos que considerar pontos auxiliares. Por exemplo, se $(x_j, y_\ell) \in \Omega_H$ é tal que $(x_{j-1}, y_\ell), (x_j, y_{\ell+1}) \in \partial\Omega_H$ e $(x_{j-1}, y_{\ell+1}) \notin \tilde{\Omega}_H$, temos que considerar a condição auxiliar

$$2 \sum_{\kappa=1}^n b_{i\kappa}(x_j, y_\ell) u_{H,\kappa}(x_j, y_\ell) = - \sum_{\kappa=1}^n \left(b_{i\kappa}(x_j, y_{\ell+1}) u_{H,\kappa}(x_{j-1}, y_{\ell+1}) + b_{i\kappa}(x_{j-1}, y_\ell) u_{H,\kappa}(x_{j-1}, y_{\ell+1}) \right).$$

Para os outros pontos nas mesmas circunstâncias definem-se condições de fronteira análogas, introduzindo as alterações naturais. Por exemplo, se $b_{i\kappa}$ são funções constantes, então temos apenas que considerar

$$u_{H,\kappa}(P) = -u_{H,\kappa}(Q),$$

onde P e Q são vértices de um rectângulo formado pela malha, estando um fora do domínio e outro no interior (sendo os outros dois vértices do rectângulo pontos da fronteira).

1.3.2 Problema variacional discreto

O resultado de convergência da aproximação definida por (1.67) é obtido como consequência da estabilidade e da estimação do erro de truncatura. A estabilidade de A_H , $H \in \Lambda$, é estabelecida a partir da identificação entre esse operador e um operador linear de \mathbf{W}_H no seu espaço dual. Com o objectivo de concluir a propriedade anterior introduzimos seguidamente um método de elementos finitos segmentado linear completamente discreto.

Consideramos, para $s \in \mathbb{N}_0$, o espaço de Hilbert $\mathbf{H}^s(\Omega) := H^s(\Omega) \times \dots \times H^s(\Omega)$ (n -vezes) munido do produto interno

$$(v, w)_{\mathbf{H}^s(\Omega)} = \sum_{i=1}^n (v_i, w_i)_s,$$

$v, w \in \mathbf{H}^s(\Omega)$, e usamos também a notação $\mathbf{L}^2(\Omega) := \mathbf{H}^0(\Omega)$. Representamos por $\|\cdot\|_{\mathbf{H}^s(\Omega)}$ a norma induzida pelo produto interno anterior.

Associado ao problema (1.64) consideramos o problema variacional: determinar $u \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ tal que

$$a(u, v) = (g, v)_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \quad \forall v \in \mathbf{H}_0^1(\Omega), \quad (1.69)$$

em que a forma sesquilinear $a(\cdot, \cdot)$ em $\mathbf{H}^1(\Omega) \times \mathbf{H}^1(\Omega)$ é definida por

$$\begin{aligned} a(v, w) := & \sum_{i, \kappa=1}^n \left[(a_{i\kappa}(v_\kappa)_x, (w_i)_x)_0 + (b_{i\kappa}(v_\kappa)_x, (w_i)_y)_0 + (b_{i\kappa}(v_\kappa)_y, (w_i)_x)_0 \right. \\ & \left. + (c_{i\kappa}(v_\kappa)_y, (w_i)_y)_0 + (d_{i\kappa}v_\kappa, (w_i)_x)_0 + (e_{i\kappa}v_\kappa, (w_i)_y)_0 + (f_{i\kappa}v_\kappa, w_i)_0 \right]. \end{aligned} \quad (1.70)$$

Introduzimos seguidamente a versão discreta do problema (1.69). Consideremos o espaço \mathbf{W}_H munido do produto interno $(\cdot, \cdot)_H$,

$$(v_H, w_H)_H := \sum_{i=1}^n \sum_{(x_j, y_\ell) \in \Omega_H} |\square_{j,\ell}| v_{H,i}(x_j, y_\ell) w_{H,i}(x_j, y_\ell),$$

$v_H, w_H \in \mathbf{W}_H$. Denotamos por $\overset{\circ}{\mathbf{W}}_H$ o conjunto das funções de \mathbf{W}_H nulas em $\partial\Omega$. Representamos por \mathbf{P}_H o interpolador contínuo e linear por secções, relativamente à triangulação \mathcal{T}_H ,

$$\mathbf{P}_H v_H := (P_H v_{H,1}, \dots, P_H v_{H,n}),$$

$v_H \in \mathbf{W}_H$. Seja $a_H(\cdot, \cdot)$ a forma sesquilinear

$$\begin{aligned} a_H(v_H, w_H) := & \sum_{i, \kappa=1}^n [a_{i\kappa}(v_H, w_H) + b_{i\kappa}(v_H, w_H) + c_{i\kappa}(v_H, w_H) \\ & + d_{i\kappa}(v_H, w_H) + e_{i\kappa}(v_H, w_H) + f_{i\kappa}(v_H, w_H)], \end{aligned} \quad (1.71)$$

$v_H, w_H \in \overset{\circ}{\mathbf{W}}_H$, em que $a_{i\kappa}$, $b_{i\kappa}$, $c_{i\kappa}$, $d_{i\kappa}$, $e_{i\kappa}$ e $f_{i\kappa}$ são definidas de forma semelhante a a, b, c, d, e e f de (1.59), respectivamente, fazendo as devidas adaptações. Por exemplo, $a_{i\kappa}$ obtém-se de (1.60) substituindo a_Δ por $a_{i\kappa, \Delta}$, v_H por $v_{H, \kappa}$ e w_H por $w_{H, i}$. Assim

$$a_{i\kappa}(v_H, w_H) = \sum_{\Delta \in \mathcal{T}_H} a_{i\kappa, \Delta} \int_{\Delta} (P_H v_{H, \kappa})_x (P_H w_{H, i})_x \, dx dy.$$

Estas definições conduzem à seguinte versão discreta de (1.69): determinar $u_H \in \overset{\circ}{\mathbf{W}}_H$ tal que

$$a_H(u_H, v_H) = (g_H, v_H)_H \quad \forall v_H \in \overset{\circ}{\mathbf{W}}_H. \quad (1.72)$$

No resultado seguinte é estabelecida a equivalência dos problemas (1.67) e (1.72).

Teorema 1.11 *Sejam A_H e $a_H(\cdot, \cdot)$ definidas respectivamente por (1.68) e (1.71). Então*

$$a_H(v_H, w_H) = (A_H v_H, w_H)_H \quad \forall v_H, w_H \in \overset{\circ}{\mathbf{W}}_H.$$

1.3.3 Estabilidade e convergência

A análise do erro é feita a partir do resultado de estabilidade que estabelecemos no Teorema 1.15. Na sua demonstração tem um papel de relevo a propriedade de estabilidade da forma sesquilinear contínua que induziu o problema variacional discreto (Teorema 1.13), bem conhecido para formas sesquilineares coercivas.

O Teorema 1.12 estabelece que a forma sesquilinear $a(.,.)$, definida em (1.70), é $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$ -coerciva, isto é, satisfaz a desigualdade de Gårding

$$a(v, v) \geq C_E \|v\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 - C_K \|v\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 \quad \forall v \in \mathbf{H}_0^1(\Omega), \quad (1.73)$$

para algum $C_K \in \mathbb{R}$ e $C_E > 0$.

Teorema 1.12 *Suponha-se que o sistema de equações de derivadas parciais (1.64) é uniformemente e fortemente elíptico. Então a forma sesquilinear $a(.,.)$ definida por (1.70) é $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$ -coerciva.*

O Teorema 1.12 permite concluir que $a(.,.)$ verifica as hipóteses do Teorema 8.2.8 de [40], isto é, é válida a condição de estabilidade (1.74). A sua demonstração pode ser consultada por exemplo em [56].

Teorema 1.13 *Se o problema variacional homogêneo (1.69) tem uma única solução $u = 0$, então existe uma constante C tal que, para $H \in \Lambda$, com H_{max} suficientemente pequeno, se tem*

$$\|P_H v_H\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \leq C \sup_{0 \neq w_H \in \mathring{\mathbf{W}}_H} \frac{|a(P_H v_H, P_H w_H)|}{\|P_H w_H\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}} \quad \forall v_H \in \mathring{\mathbf{W}}_H. \quad (1.74)$$

A relação entre as formas sesquilineares $a_H(.,.)$ e $a(.,.)$ é estabelecida no resultado que se segue.

Proposição 1.14 *Sejam $v_H, w_H \in \mathring{\mathbf{W}}_H$, com $H \in \Lambda$, duas sucessões tais que*

$$\|P_H v_H\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \leq 1 \quad e \quad \|P_H w_H\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \leq 1.$$

Então

$$|a_H(v_H, w_H) - a(P_H v_H, P_H w_H)| \longrightarrow 0 \quad (H \in \Lambda). \quad (1.75)$$

Demonstração Sejam $v_{H,\kappa}, w_{H,i} \in \mathring{W}_H$, $i, \kappa = 1, \dots, n$. Pelos lemas 1, 2 e 4 de [30], temos que

$$a_{i\kappa}^{(s)}(v_{H,\kappa}, w_{H,i}) - \left(a_{i\kappa}(P_H^{(s)}v_{H,\kappa})_x, (P_H^{(s)}w_{H,i})_x \right)_0 \longrightarrow 0 \quad (H \in \Lambda),$$

e as relações correspondentes para $b_{i\kappa}$, $c_{i\kappa}$, $d_{i\kappa}$, $e_{i\kappa}$ e $f_{i\kappa}$. Somando em relação a i e κ resulta (1.75). ■

Tendo em conta este resultado, o teorema de estabilidade obtém-se facilmente a partir do Teorema 1.13.

Teorema 1.15 *Nas condições do Teorema 1.13, existe uma constante C tal que, para $H \in \Lambda$, com H_{max} suficientemente pequeno, se tem*

$$\|P_H v_H\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \leq C \sup_{0 \neq w_H \in \mathring{W}_H} \frac{|a_H(v_H, w_H)|}{\|P_H w_H\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}}, \quad (1.76)$$

$v_H \in \mathring{W}_H$.

Sejam u_H e u as soluções de (1.67) e (1.69), respectivamente. Podemos obter uma estimativa para o erro $\|P_H u_H - P_H R_H u\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}$, a partir do Teorema 1.15, substituindo, em (1.76), $P_H v_H$ por $P_H u_H - P_H R_H u$. Como $a_H(u_H, w_H) = (g_H, w_H)_H$, o resultado de convergência obtém-se majorando $|a_H(R_H u, w_H) - (g_H, w_H)_H|$. Seguindo a demonstração do Teorema 3 de [5] e usando o Teorema 1.10 da secção anterior relativo ao caso escalar, obtemos o seguinte resultado.

Teorema 1.16 *Se o problema variacional homogéneo (1.69) tem uma única solução, então, para $H \in \Lambda$, com H_{max} suficientemente pequeno, o método (1.67) tem uma única solução que satisfaz*

$$\begin{aligned} & \|P_H u_H - P_H R_H u\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \\ & \leq C \left(\sum_{\Delta \in \mathcal{T}_H} (\text{diam} \Delta)^4 \|u\|_{\mathbf{H}^3(\Delta)}^2 \right)^{1/2} + H_{max}^{3/2} \|u\|_{\mathbf{W}^{2,\infty}(\Omega)}, \end{aligned} \quad (1.77)$$

desde que $u \in \mathbf{H}^3(\Omega)$.

Se $\partial\Omega$ não tem segmentos oblíquos, ou seja, se Ω é uma união de rectângulos, então obtemos a estimativa de segunda ordem

$$\|P_H u_H - P_H R_H u\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \leq C \left(\sum_{\Delta \in \mathcal{T}_H} (\text{diam} \Delta)^4 \|u\|_{\mathbf{H}^3(\Delta)}^2 \right)^{1/2}.$$

1.3.4 Resultados numéricos

Nesta subsecção apresentamos dois exemplos que ilustram o desempenho do método (1.67) quando aplicado a problemas de elasticidade.

Consideremos um material elástico que na ausência de forças externas ocupa a região limitada $\bar{\Omega}$. Supomos que o material é homogêneo e isotrópico. Representamos por $u = (u_1, u_2)$ o vector de deslocamento dos pontos de Ω quando o corpo está sujeito à acção de uma força $f = (f_1, f_2)$. Por $\sigma(u)$ denotamos as tensões definidas por

$$\sigma(u) := 2\mu\epsilon(u) + \lambda\text{tr}(\epsilon(u))I_2,$$

em que $(\epsilon(u))_{i,j}$, $1 \leq i, j \leq 2$, representam as componentes de deformação associadas ao deslocamento u ,

$$\epsilon(u) := \frac{1}{2}(\text{grad}(u) + \text{grad}(u)^t),$$

com

$$\text{grad}(u) := \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x} & \frac{\partial u_1}{\partial y} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x} & \frac{\partial u_2}{\partial y} \end{bmatrix},$$

μ e λ denotam as constantes de Lamé e I_2 representa a matriz identidade.

Se u_0 descreve o deslocamento dos pontos da fronteira, prova-se que o deslocamento u é solução do problema de condição de fronteira

$$\begin{aligned} -\text{div } \sigma(u) &= g & \text{em } \Omega, \\ u &= u_0 & \text{em } \partial\Omega. \end{aligned} \quad (1.78)$$

Note-se que vale a igualdade

$$-\text{div } \sigma(u) = -(2\mu + \lambda) \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} \end{bmatrix} - \mu \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} \end{bmatrix} - (\mu + \lambda) \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial y} \end{bmatrix}.$$

Vejamos seguidamente que valem as hipóteses do Teorema 1.16. O sistema (1.78) é uniformemente fortemente elíptico uma vez que satisfaz a condição (B.3) com $C_0 = \mu$. Por outro lado, a primeira desigualdade de Korn permite-nos concluir que a forma sesquilinear associada

$$a(v, w) := \int_{\Omega} (2\mu\epsilon(v) : \epsilon(w) + \lambda \text{div}(v)\text{div}(w)) \, dx dy,$$

é elíptica em $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$. Portanto o problema variacional correspondente tem uma única solução. Assim, o sistema (1.78) verifica as condições do Teorema 1.16. O nosso objectivo é ilustrar o desempenho do método (1.67) e observar experimentalmente a estimativa (1.77) quando este é aplicado ao problema (1.78), considerando diferentes domínios.

No primeiro exemplo consideramos $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$, $\lambda = 1$, $\mu = 0.5$, $u_0 = 0$ e g tal que o problema (1.78) tem solução u , de componentes

$$u_1(x, y) = u_2(x, y) = 0.1 \sin(2\pi x) \sin(2\pi y).$$

A Figura 1.5 ilustra o comportamento do erro da solução numérica em 500 malhas geradas aleatoriamente, sendo essa malhas formadas por $N - 1 \times M - 1$ pontos em Ω , com N e M a variar de 10 a 110. A recta dos mínimos quadrados da nuvem de pontos tem declive 1.8381.

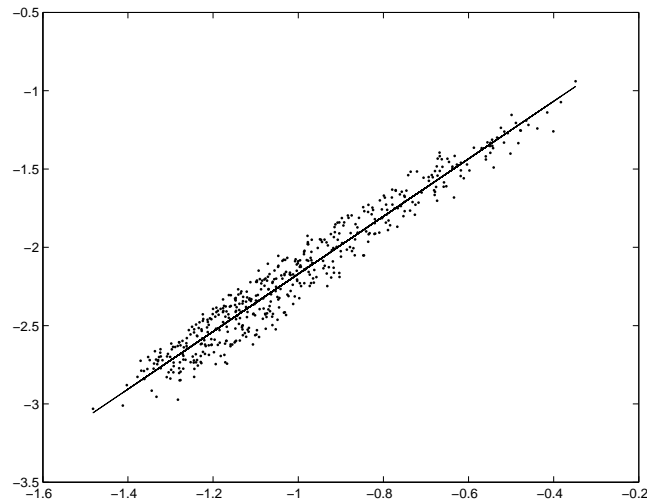


Figura 1.5: Problema (1.78), $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$: $\log(|P_H u_H - P_H R_H u|_{\mathbf{H}^1(\Omega)})$ versus $\log(H_{max})$.

No segundo exemplo consideramos o domínio poligonal

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \geq 0, x \leq 1, y \leq -\frac{1}{2}x + 1\}$$

e a função g tal que o problema (1.78) tem solução de componentes

$$u_1(x, y) = 4xy(x - 1)(y + 0.5x - 1), \quad u_2(x, y) = 6x^2y(x - 1)(y + 0.5x - 1).$$

Apresentamos os resultados obtidos na Tabela 1.9. As malhas $\bar{\Omega}_{H,1}$ e $\bar{\Omega}_{H,2}$ são tais que $x_0 = y_0 = 0$ com espaçamentos

$$\begin{aligned} h_j &= 0.1, \quad j = 1, \dots, 10, \\ k_\ell &= 0.1, \quad \ell = 1, \dots, 5, \quad k_\ell = 0.05, \quad \ell = 6, \dots, 15, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} h_j &= 0.075, \quad j = 1, \dots, 4, 13, \dots, 16, \quad h_j = 0.05, \quad j = 5, \dots, 12, \\ k_\ell &= 0.075, \quad \ell = 1, \dots, 6, \quad k_7 = 0.05, \quad k_\ell = 0.0375, \quad \ell = 8, \dots, 11, 20, \dots, 23, \\ k_\ell &= 0.025, \quad \ell = 12, \dots, 19, \end{aligned}$$

respectivamente. As malhas $\bar{\Omega}_{H,j}$, $j = 3, 4$, foram geradas a partir de $\bar{\Omega}_{H,1}$ e $\bar{\Omega}_{H,2}$, respectivamente, introduzindo uma nova linha entre duas linhas que definem a malha. As malhas $\bar{\Omega}_{H,j}$, $j = 5, 6$, são obtidas da mesma forma a partir de $\bar{\Omega}_{H,3}$ e $\bar{\Omega}_{H,4}$. Note-se que a condição (Geo) se verifica para todas as malhas $\bar{\Omega}_{H,j}$, $j = 1, \dots, 6$.

malha	número de pontos	H_{max}	$\ e_H\ _{\mathbf{H}^1(\Omega)}$
$\bar{\Omega}_{H,1}$	$N = 10, M = 15$	0.1	0.00868943
$\bar{\Omega}_{H,2}$	$N = 16, M = 23$	0.075	0.00506237
$\bar{\Omega}_{H,3}$	$N = 20, M = 30$	0.05	0.00280741
$\bar{\Omega}_{H,4}$	$N = 32, M = 46$	0.0375	0.00165363
$\bar{\Omega}_{H,5}$	$N = 40, M = 60$	0.025	0.000981383
$\bar{\Omega}_{H,6}$	$N = 64, M = 92$	0.01875	0.000590199

Tabela 1.9: Problema (1.78) num domínio poligonal.

A Figura 1.6 estão representados os dados da tabela anterior e ainda valores que correspondem a outras malhas que verificam a condição (Geo). A recta dos mínimos quadrados da nuvem de pontos tem declive 1.536, que é um valor esperado atendendo à estimativa (1.77).

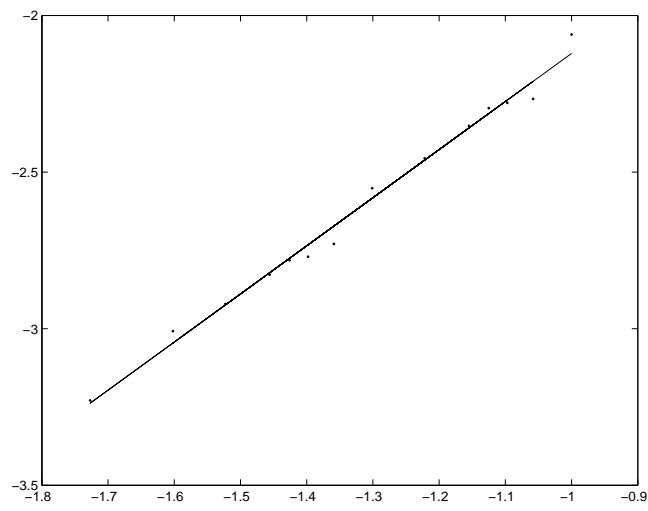


Figura 1.6: Problema (1.78) num domínio poligonal: $\log(\|P_H u_H - P_H R_H u\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)})$ versus $\log(h_{max})$.

Capítulo 2

Método de diferenças finitas centradas nas células e norma de Spijker

Neste capítulo pretendemos estudar a discretização de problemas elípticos de segunda ordem unidimensionais, por métodos de diferenças finitas centradas nas células, definidos a partir de malhas não uniformes.

Começamos por verificar, pela análise do erro de truncatura, que os métodos de diferenças finitas considerados são inconsistentes. O nosso objectivo é provar a convergência quadrática e, conseqüentemente, a supraconvergência. Uma questão fundamental que se coloca é a da escolha de normas convenientes para o estabelecimento dos resultados de estabilidade. Na Secção 2.2 definimos versões discretas dos espaços de Sobolev $W_0^{m,p}(0, R)$ e provamos um resultado de compacidade discreta relativo a esses espaços. Na Secção 2.3 estabelecemos o resultado de estabilidade relativamente a normas análogas às introduzidas por Spijker em [66]. A partir desse resultado é deduzida, na Secção 2.4, a convergência quadrática do método. As normas de Spijker não nos parecem permitir estender os resultados aqui apresentados a domínios bidimensionais. Por esta razão, e com o objectivo de introduzir a técnica de análise que consideramos no capítulo seguinte, reformulamos os resultados fundamentais no contexto de normas duais. Assim, na Secção 2.5, definimos normas de índice negativo e estabelecemos uma relação de equivalência entre estas normas e normas definidas a partir dos adjuntos dos operadores que induzem as primeiras. Na Secção 2.6, consideramos as referidas normas na formulação do teorema de estabilidade e apresentamos o resultado de convergência. A finalizar o capítulo apresentamos, na Secção 2.7, dois exemplos que ilustram o

desempenho do método.

Notamos que nos resultados de convergência assumimos que a solução do problema contínuo pertence a $H^4(0, R)$.

2.1 Introdução

Consideremos o seguinte problema diferencial

$$Au := -u'' + bu' + cu = f \quad \text{em } (0, R) \subset \mathbb{R}, \quad (2.1)$$

com condições de fronteira de Dirichlet

$$u(0) = \gamma_0, \quad u(R) = \gamma_R. \quad (2.2)$$

Admitimos que $f \in C[0, R]$, $b \in H^1(0, R)$ e $c \in H^2(0, R)$.

Seja

$$G_h := \{0 = x_0 < x_1 < \dots < x_N = R\}$$

uma malha que define uma partição do domínio em células. No capítulo anterior considerámos aproximações de diferenças finitas para os valores da solução nos pontos da malha G_h . Nesta secção estamos interessados em aproximações para a solução nos pontos médios de cada célula, ou seja, para os pontos do conjunto

$$\mathbb{I}_h := \{x_{1/2}, x_{3/2}, \dots, x_{N-1/2}\},$$

em que

$$x_{j-1/2} := \frac{x_{j-1} + x_j}{2}, \quad j = 1, \dots, N.$$

Usamos a notação

$$h_{j-1/2} := x_{j+1/2} - x_{j-1/2}, \quad j = 0, \dots, N,$$

onde $x_{-1/2} = x_0$ e $x_{N+1/2} = x_N$. Em relação ao vector de espaçamentos correspondente à malha G_h e aos intervalos definidos pelos pontos dessa malha, mantemos a notação do capítulo anterior. Consideramos ainda $x_{-1} = x_0$, $x_{N+1} = x_N$ e

$$h_{-1} := x_0 - x_{-1} = 0, \quad h_N := x_{N+1} - x_N = 0.$$

Denotamos por W_h o conjunto das funções de rede definidas em $\mathbb{I}_h := \mathbb{I}_h \cup \{x_0, x_N\}$ e por \mathring{W}_h o subconjunto de W_h das funções nulas em x_0 e x_N .

Com o objectivo de definir o método de diferenças finitas centradas nos vértices para o problema (2.1)-(2.2), introduzimos o operador de média

$$(M_h w_h)_{j-1/2} := \frac{w_{j-1} + w_j}{2}, \quad j = 2, \dots, N-1,$$

$$(M_h w_h)_{1/2} := \frac{w_0}{4} + \frac{w_1}{2}, \quad (M_h w_h)_{N-1/2} := \frac{w_{N-1}}{2} + \frac{w_N}{4},$$

onde w_h é uma função de rede definida em G_h . A forma particular de $M_h w_h$ nos pontos $x_{1/2}$ e $x_{N-1/2}$ é induzida pela definição da imagem de w_h pelo operador de diferenças centradas de segunda ordem nos pontos $x_{1/2}$ e $x_{N-1/2}$. A discretização das derivadas do problema diferencial é definida a partir dos operadores de diferenças

$$(\delta v_h)_j := \frac{v_{j+1/2} - v_{j-1/2}}{h_{j-1/2}}, \quad j = 0, \dots, N,$$

e

$$(\delta w_h)_{j-1/2} := \frac{w_j - w_{j-1}}{h_{j-1}}, \quad j = 1, \dots, N,$$

onde $v_h \in W_h$ e w_h é uma função de rede definida em G_h .

Sejam R_{G_h} e R_h operadores de restrição pontual às malhas G_h e $\bar{\mathbb{I}}_h$, respectivamente. O operador \tilde{R}_h é definido como R_h no conjunto $\mathbb{I}_h \setminus \{x_{1/2}, x_{N-1/2}\}$ mas, no entanto, nos pontos $x_{1/2}$ e $x_{N-1/2}$ toma a forma

$$(\tilde{R}_h v_h)_{1/2} := v_{1/2} - \frac{v_0}{4} \quad \text{e} \quad (\tilde{R}_h v_h)_{N-1/2} := v_{N-1/2} - \frac{v_N}{4}.$$

Para simplificar a notação e quando é possível deduzir pelo contexto que nos referimos a um operador de restrição, omitimos os símbolos R_{G_h} e R_h . Consideremos a solução de diferenças finitas $u_h \in W_h$ tal que

$$A_h u_h := -\delta^2 u_h + M_h(b\delta u_h) + \tilde{R}_h(cu_h) = M_h R_{G_h} f \quad \text{em} \quad \mathbb{I}_h, \quad (2.3)$$

e que verifica as condições de fronteira

$$u_0 = \gamma_0, \quad u_N = \gamma_R. \quad (2.4)$$

Observamos que a componente $u_{j-1/2}$ da solução de (2.3)-(2.4) pode ser interpretada como uma aproximação para o valor médio de u na célula (x_{j-1}, x_j) enquanto que as componentes u_{j-1} e u_j da solução de (1.9)-(1.10) são aproximações para os valores de u nos extremos do intervalo.

Pretendemos analisar o comportamento da sucessão $(u_h)_\Lambda$, u_h solução de (2.3)-(2.4), em sequências de malhas \mathbb{I}_h , $h \in \Lambda$.

Começemos por observar que o método introduzido é inconsistente com o problema diferencial. Sejam u e u_h soluções de (2.1)-(2.2) e (2.3)-(2.4), respectivamente. Note-se que

$$(\delta^2 u_h)_{j+1/2} = \frac{1}{h_j} \left(\frac{u_{j+3/2} - u_{j+1/2}}{h_{j+1/2}} - \frac{u_{j+1/2} - u_{j-1/2}}{h_{j-1/2}} \right)$$

não é de facto, em geral, uma aproximação consistente com $u''(x_{j+1/2})$. O erro de truncatura $T_h := A_h(R_h u) - M_h(R_{G_h} f)$, num ponto $x_{j+1/2}$, $j = 1, \dots, N-2$, é dado por

$$\begin{aligned} (T_h)_{j+1/2} &= \left(\frac{h_{j-1/2} - 2h_j + h_{j+1/2}}{2h_j} \right) u''(x_{j+1/2}) \\ &\quad + \frac{h_{j+1/2}^2 - h_{j-1/2}^2}{6h_j} u'''(x_{j+1/2}) \\ &\quad + b_j \frac{h_j - h_{j-1}}{4} u''(x_j) + b_{j+1} \frac{h_{j+1} - h_j}{4} u''(x_{j+1}) \\ &\quad + \mathcal{O}(h_{max}^2), \end{aligned} \tag{2.5}$$

em que os dois primeiros termos estão associados com a aproximação de $u''(x_{j+1/2})$. O erro de truncatura é portanto geralmente de ordem zero em malhas não uniformes. Mas, por exemplo,

$$\frac{4}{h_{j-1} + 2h_j + h_{j+1}} \left(\frac{u_{j+3/2} - u_{j+1/2}}{h_{j+1/2}} - \frac{u_{j+1/2} - u_{j-1/2}}{h_{j-1/2}} \right)$$

é uma aproximação consistente com $u''(x_{j+1/2})$.

Mostramos seguidamente que embora o método seja inconsistente com o problema diferencial, é consistente com o problema diferencial que se obtém do primeiro por integração sobre as células da malha. Consideremos o caso mais simples do problema (2.1)-(2.2),

$$-u'' = f \quad \text{em } (0, R) \subset \mathbb{R}, \tag{2.6}$$

com condições de fronteira de Dirichlet homogéneas, e o método de diferenças finitas

$$-\delta^2 u_h = M_h R_{G_h} f \quad \text{em } \mathbb{I}_h, \tag{2.7}$$

$$u_0 = u_N = 0. \tag{2.8}$$

Note-se que tomando a aproximação do fluxo na célula

$$\begin{aligned} F_j &:= -\frac{u_{j+1/2} - u_{j-1/2}}{h_{j-1/2}}, \quad j = 1, \dots, N-1, \\ F_0 &:= -\frac{u_{1/2}}{h_0/2}, \quad F_N := \frac{u_{N-1/2}}{h_{N-1}/2}, \end{aligned}$$

podemos escrever (2.7) da forma

$$F_{j+1} - F_j = h_j(M_h R_{G_h} f)_{j+1/2}, \quad j = 0, \dots, N-1.$$

A aproximação do fluxo, F_j , é consistente com $-u'(x_j)$ uma vez que, assumindo que $u \in C_0^2([0, R])$, se tem

$$F_j = -u'(x_j) + \mathcal{O}(h_{max}), \quad j = 0, \dots, N.$$

Por outro lado, integrando ambos os membros de (2.6) em cada célula I_j , obtém-se

$$-u'(x_{j+1}) + u'(x_j) = \int_{I_j} f(x) dx, \quad j = 0, \dots, N-1.$$

Atendendo a que $h_j(M_h R_{G_h} f)_{j+1/2}$ é consistente com $\int_{I_j} f(x) dx$, $j = 0, \dots, N-1$, concluímos o pretendido, isto é, que o método (2.7)-(2.8) é efectivamente consistente no contexto dos métodos de volumes finitos.

Os factores de maior influência no erro da truncatura (2.5) são as quantidades

$$\frac{h_{j-1/2} - 2h_j + h_{j+1/2}}{h_j}$$

que são pequenas em média. De facto, se denotarmos por I um intervalo de amplitude $|I|$ que pode ser particionado em intervalos I_j , tem-se

$$\sum_{I_j \subset I} \frac{h_{j-1/2} - 2h_j + h_{j+1/2}}{h_j} h_j = \sum_{I_j \subset I} (h_{j-1/2} + h_{j+1/2}) - 2|I| = \mathcal{O}(h_{max}).$$

A constatação anterior constitui a base do resultado de convergência apresentado em [31].

O objectivo desta secção é estabelecer a convergência quadrática do método definido por (2.3)-(2.4), sem que sejam impostas quaisquer restrições à malha. Para o efeito introduzimos o problema variacional discreto: determinar $u_h \in \mathring{W}_h$ tal que

$$a_h(u_h, v_h) = (f_h, v_h)_h \quad \forall v_h \in \mathring{W}_h, \quad (2.9)$$

onde

$$a_h(u_h, v_h) := \sum_{j=0}^N h_{j-1/2} (\delta u_h)_j (\delta \bar{v}_h)_j, \quad f_h := M_h R_{G_h} f$$

e

$$(f_h, v_h)_h := \sum_{j=0}^{N-1} h_j (f_h)_{j+1/2} (\bar{v}_h)_{j+1/2}.$$

É fácil verificar que os métodos (2.7)-(2.8) e (2.9) são equivalentes. No entanto não nos foi possível obter para $|a_h(u_h, v_h) - (f_h, v_h)_h|$ uma estimativa do tipo (1.31), quando consideramos malhas não uniformes gerais. Por este motivo, a análise de convergência utilizada no capítulo anterior, no contexto dos métodos de diferenças finitas centradas nos vértices, não permite estabelecer a mesma ordem de convergência quando aplicada no contexto dos métodos de diferenças finitas centradas nas células.

A desigualdade de estabilidade desempenha um papel central no estudo do erro. Na sua demonstração usamos argumentos da Teoria da Convergência Discreta, nomeadamente os conceitos de convergência discreta, aproximação discreta, consistência e estabilidade. Na Secção 2.2 definimos os espaços de funções de rede que vamos utilizar e demonstramos um teorema de compacidade discreta relativamente a esses espaços. Este resultado é fundamental para provar a desigualdade para a estabilidade inversa, na Secção 2.3.

2.2 Aproximação discreta de $W_0^{m,p}(0, R)$

Introduzimos seguidamente versões discretas dos espaços de Sobolev $W_0^{m,p}(0, R)$. Denotamos por $\mathring{W}_h^{m,p}$, $m = 0, 1, 2$, e $p \in [1, \infty[$, os espaços das funções definidas em $\bar{\mathbb{I}}_h$, nulas em 0 e R , com a norma

$$\|v_h\|_{W_h^{m,p}} := \left(\sum_{\ell=0}^m |v_h|_{W_h^{\ell,p}}^p \right)^{1/p},$$

em que

$$\begin{aligned} |v_h|_{W_h^{0,p}}^p &:= \sum_{j=1}^N h_{j-1} |v_{j-1/2}|^p, \\ |v_h|_{W_h^{1,p}}^p &:= \sum_{j=0}^N h_{j-1/2} |(\delta v_h)_j|^p, \\ |v_h|_{W_h^{2,p}}^p &:= \sum_{j=1}^N h_{j-1} |(\delta^2 v_h)_{j-1/2}|^p. \end{aligned}$$

Se $p = \infty$, consideramos o espaço $\mathring{W}_h^{m,\infty}$ com a norma

$$\|v_h\|_{W_h^{m,\infty}} := \max_{0 \leq \ell \leq m} |v_h|_{W_h^{\ell,\infty}},$$

em que

$$\begin{aligned} |v_h|_{W_h^{0,\infty}} &:= \max_{1 \leq j \leq N} |(v_h)_{j-1/2}|, \\ |v_h|_{W_h^{1,\infty}} &:= \max_{0 \leq j \leq N} |(\delta v_h)_j|, \\ |v_h|_{W_h^{2,\infty}} &:= \max_{1 \leq j \leq N} |(\delta^2 v_h)_{j-1/2}|. \end{aligned}$$

O espaço $\mathring{W}_h^{0,p}$ é denotado por \mathring{L}_h^p e a norma correspondente por $\|\cdot\|_{L_h^p}$.

Consideremos seguidamente as aproximações discretas dos espaços $W_0^{m,p}(0, R)$, $1 \leq p < \infty$, e $C_0^m[0, R]$, respectivamente, $(W_0^{m,p}(0, R), \Pi \mathring{W}_h^{m,p})$ e $(C_0^m[0, R], \Pi \mathring{W}_h^{m,\infty})$. Na primeira aproximação a convergência discreta é definida por

$$v_h \rightarrow v \text{ em } (W_0^{m,p}(0, R), \Pi \mathring{W}_h^{m,p}) \quad (h \in \Lambda) \quad (2.10)$$

se para cada $\epsilon > 0$ existe $\varphi \in C_0^\infty[0, R]$ tal que

$$\|v - \varphi\|_{W^{m,p}(0,R)} \leq \epsilon \quad \text{e} \quad \limsup\{\|v_h - R_h \varphi\|_{W_h^{m,p}}, h \in \Lambda\} \leq \epsilon,$$

enquanto que na segunda aproximação a convergência discreta é definida por

$$v_h \rightarrow v \text{ em } (C_0^m[0, R], \Pi \mathring{W}_h^{m,\infty}) \quad (h \in \Lambda) \quad (2.11)$$

se

$$\|v_h - R_h v\|_{W_h^{m,\infty}} \rightarrow 0 \quad (h \in \Lambda).$$

O teorema fundamental desta secção, o Teorema 2.2, estabelece que toda a sucessão em $\mathring{W}_h^{m,p}$, $m = 1, 2$, limitada, tem uma subsucessão convergente em $(W_0^{m-1,q}(0, R), \Pi \mathring{W}_h^{m-1,q})$, e tem um papel central na demonstração no resultado de estabilidade. Observamos que Grigorieff apresenta, em [38], um resultado similar (Teorema II). No entanto, para o caso de malhas não uniformes, os espaços discretos normados aí consideradas não coincidem com os espaços que aqui definimos. Consideremos, em primeiro lugar, o seguinte lema.

Lema 2.1 *Seja $(v_h)_\Lambda \in \Pi \mathring{W}_h^{1,p}$ uma sucessão limitada, com $1 \leq p < \infty$. Considere-se a função escada*

$$w_h(x) := v_h(x_{j-1/2}), \quad x \in]x_{j-1}, x_j], \quad j = 1, \dots, N,$$

e que é nula fora desses intervalos. Seja I um intervalo que contém (x_0, x_N) . Então, qualquer que seja $\tau \in \mathbb{R}$,

$$\int_I |w_h(x + \tau) - w_h(x)|^p dx \leq 3(|\tau| + h_{max})^p |v_h|_{W_h^{1,p}}^p. \quad (2.12)$$

Demonstração: Para $\tau > 0$, tem-se

$$\begin{aligned} \int_I |w_h(x + \tau) - w_h(x)|^p dx &\leq \int_0^{R-\tau} |w_h(x + \tau) - w_h(x)|^p dx \\ &\quad + \int_{-\tau}^0 |w_h(x + \tau)|^p dx + \int_{R-\tau}^R |w_h(x)|^p dx. \end{aligned}$$

Seja l uma função definida por

$$l(x) := j, \quad x \in]x_{j-1}, x_j].$$

Então tem-se

$$\begin{aligned} &\int_0^{R-\tau} |w_h(x + \tau) - w_h(x)|^p dx \\ &\leq \int_0^{R-\tau} \left(\sum_{k=l(x)}^{l(x+\tau)-1} |w_h(x_{k+1/2}) - w_h(x_{k-1/2})| \right)^p dx \\ &\leq \int_0^{R-\tau} \left(\sum_{k=l(x)}^{l(x+\tau)-1} h_{k-1/2} |(\delta v_h)_k| \right)^p dx \\ &\leq \int_0^{R-\tau} \left(\sum_{k=l(x)}^{l(x+\tau)-1} h_{k-1/2} \right)^{p-1} \sum_{k=l(x)}^{l(x+\tau)-1} h_{k-1/2} |(\delta v_h)_k|^p dx. \end{aligned}$$

Como $\sum_{k=l(x)}^{l(x+\tau)-1} h_{k-1/2} \leq \tau + h_{max}$, obtemos

$$\begin{aligned} &\int_0^{R-\tau} |w_h(x + \tau) - w_h(x)|^p dx \\ &\leq (\tau + h_{max})^{p-1} \sum_{j=0}^{N_{R-\tau}} \left(h_{j-1} \sum_{k=j}^{l(x_j+\tau)-1} h_{k-1/2} |(\delta v_h)_k|^p \right) \\ &\leq (\tau + h_{max})^{p-1} \sum_{k=0}^N \left(h_{k-1/2} |(\delta v_h)_k|^p \sum_{j=s(k)}^k h_{j-1} \right), \end{aligned}$$

onde $N_{R-\tau}$ e $s(k)$ são, respectivamente, o maior inteiro e o menor inteiro tais que

$$\sum_{i=1}^{N_{R-\tau}} h_{i-1} \leq R - \tau$$

e

$$l(x_{s(k)} + \tau) - 1 \geq k.$$

Como

$$x_k - x_{s(k)} < \tau$$

e

$$\sum_{j=s(k)}^k h_{j-1} = x_k - x_{s(k)} + x_{s(k)} - x_{s(k)-1} < \tau + h_{max},$$

concluimos que

$$\int_0^{R-\tau} |w_h(x + \tau) - w_h(x)|^p dx \leq (\tau + h_{max})^p |v_h|_{W_h^{1,p}}^p. \quad (2.13)$$

Por outro lado, tem-se

$$\int_{-\tau}^0 |w_h(x + \tau)|^p dx = \int_0^{\tau} |w_h(x)|^p dx \leq \sum_{j=1}^{N_\tau} h_{j-1} |w_h(x_{j-1/2})|^p,$$

onde N_τ é o menor inteiro tal que

$$\sum_{i=1}^{N_\tau} h_{i-1} \geq \tau.$$

Atendendo a que $v_h(x_{-1/2}) = 0$, resulta

$$\begin{aligned} \int_{-\tau}^0 |w_h(x + \tau)|^p dx &\leq \sum_{j=1}^{N_\tau} h_{j-1} \left(\sum_{k=0}^{j-1} |v_h(x_{j+1/2}) - v_h(x_{j-1/2})| \right)^p \\ &= \sum_{j=1}^{N_\tau} h_{j-1} \left(\sum_{k=0}^{j-1} h_{k-1/2} |(\delta v_h)_k| \right)^p. \end{aligned}$$

Como $\sum_{j=1}^{N_\tau} h_{j-1} \leq \tau + h_{max}$ e, para $j \leq N_\tau$, $\sum_{k=0}^{j-1} h_{k-1/2} \leq \tau + h_{max}$, então

$$\int_{-\tau}^0 |w_h(x + \tau)|^p dx \leq (\tau + h_{max})^p |v_h|_{W_h^{1,p}}^p. \quad (2.14)$$

Da mesma forma que anteriormente, tem-se

$$\begin{aligned} \int_{R-\tau}^R |w_h(x)|^p dx &\leq \sum_{j=N_{R-\tau}}^N h_{j-1} |w_h(x_{j-1/2})|^p \\ &\leq \sum_{j=N_{R-\tau}}^N h_{j-1} \left(\sum_{k=j}^N h_{k-1/2} |(\delta v_h)_k| \right)^p. \end{aligned}$$

Atendendo a que $\sum_{j=N_{R-\tau}}^N h_{j-1} \leq \tau + h_{max}$ e $\sum_{k=j}^N h_{k-1/2} \leq \tau + h_{max}$, para $j \geq N_{R-\tau}$, resulta

$$\int_{R-\tau}^R |w_h(x)|^p \leq (\tau + h_{max})^p |v_h|_{W_h^{1,p}}^p. \quad (2.15)$$

De (2.13), (2.14) e (2.15) concluímos (2.12).

A demonstração da desigualdade no caso em que $\tau < 0$ é análoga. ■

Teorema 2.2 *A sucessão de mergulhos $(J_h)_\Lambda$, $h \in \Lambda$,*

$$J_h : \mathring{W}_h^{m,p} \rightarrow \mathring{W}_h^{m-1,q},$$

$m = 1, 2$ e $1 \leq p, q \leq \infty$, com $q < \infty$ se $p = 1$, é discretamente compacta.

Demonstração: Começemos por provar que sucessão de mergulhos $(J_h)_\Lambda$, $J_h : \mathring{W}_h^{1,p} \rightarrow \mathring{L}_h^q$, é discretamente compacta. Seja $(v_h)_\Lambda \in \Pi \mathring{W}_h^{1,p}$ limitada.

Provemos que $(w_h)_\Lambda \in \Pi W_0^{1,p}(0, R)$ tal que

$$w_h(x_{j-1/2}) := v_h(x_{j-1/2}), \quad j = 0, \dots, N+1,$$

e que é linear em cada intervalo $[x_{j-1/2}, x_{j+1/2}]$, $j = 0, \dots, N$, é limitada. Se $p = \infty$, então

$$\|w_h\|_{W^{1,p}(0,R)} = \|v_h\|_{W_h^{1,p}}. \quad (2.16)$$

Consideremos agora $1 \leq p < \infty$. Atendendo a que $\|\cdot\|_{W^{1,p}(0,R)}$ e $|\cdot|_{W^{1,p}(0,R)}$ são normas equivalentes em $W_0^{1,p}(0, R)$, então

$$\|w_h\|_{W^{1,p}(0,R)} \leq C |w_h|_{W^{1,p}(0,R)}. \quad (2.17)$$

Para $|w_h|_{W^{1,p}(0,R)}$ vale a igualdade

$$|w_h|_{W^{1,p}(0,R)} = \left(\int_0^R |w'(x)|^p dx \right)^{1/p} = \left(\sum_{j=0}^N h_{j-1/2} |(\delta v_h)_j|^p \right)^{1/p} = |v_h|_{W_h^{1,p}(0,R)}. \quad (2.18)$$

Atendendo a que $(v_h)_\Lambda$ é limitada em $\Pi \mathring{W}_h^{1,p}$, de (2.16)–(2.18), concluímos que $(w_h)_\Lambda$ é limitada em $\Pi W_0^{1,p}(0, R)$.

Se $p > 1$, o mergulho de $W^{1,p}(0, R)$ em $C[0, R]$ é compacto e logo existem uma subsucessão $\Lambda' \subseteq \Lambda$ e uma função $w \in C_0[0, R]$, tais que

$$\max_{x \in (0,R)} |w_h(x) - w(x)| \rightarrow 0 \quad (h \in \Lambda')$$

e portanto

$$v_h \rightarrow w \text{ em } (C_0[0, R], \Pi \mathring{L}_h^\infty) \quad (h \in \Lambda').$$

Finalmente, atendendo a que

$$\|v_h - R_h w\|_{L_h^q} \leq C \|v_h - R_h w\|_{L_h^\infty},$$

com $C = R^{1/q}$, $1 \leq q < \infty$, concluímos também a convergência

$$v_h \rightarrow w \text{ em } (L^q(0, R), \Pi \mathring{L}_h^q) \quad (h \in \Lambda').$$

Consideremos agora o caso $p = 1$. Como o mergulho de $W^{1,1}(0, R)$ em $L^q(0, R)$ é compacto, existem uma subsucessão $\Lambda' \subseteq \Lambda$ e $w \in L^q(0, R)$ tais que

$$w_h \rightarrow w \text{ em } L^q(0, R) \quad (h \in \Lambda').$$

Provemos que $v_h \rightarrow w$ em $(L^q(0, R), \Pi \mathring{L}_h^q)$ ($h \in \Lambda'$). Para $\epsilon > 0$, existe $\varphi \in C_0^\infty[0, R]$ tal que

$$\|w - \varphi\|_{L^q(0,R)} \leq \epsilon.$$

Consideremos a função ψ_h ,

$$\psi_h(x) := \varphi(x_{j-1/2}), \quad j = 0, \dots, N+1,$$

e que é linear em cada intervalo $[x_{j-1/2}, x_{j+1/2}]$, $j = 0, \dots, N$, para a qual se tem

$$\|v_h - R_h \varphi\|_{L_h^q}^q \leq \int_0^R |w_h - \psi_h|^q dx \rightarrow \int_0^R |w - \varphi|^q dx \quad (h \in \Lambda').$$

Aqui usamos a convergência $\psi_h \rightarrow \varphi$ em $L^q(0, R)$. Assim, tem-se

$$\limsup \{ \|v_h - R_h \varphi\|_{L_h^q}, h \in \Lambda' \} \leq \epsilon.$$

Concluimos desta forma a primeira parte da demonstração, isto é, provamos que a sucessão de mergulhos $(J_h)_\Lambda$, $J_h : \overset{\circ}{W}_h^{1,p} \rightarrow \overset{\circ}{L}_h^q$, é discretamente compacta.

Consideremos agora a sucessão de mergulhos $(J_h)_\Lambda$, $J_h : \overset{\circ}{W}_h^{2,p} \rightarrow \overset{\circ}{W}_h^{1,q}$. Sejam $(v_h)_\Lambda \in \Pi \overset{\circ}{W}_h^{2,p}$ limitada e w_h definida por

$$w_h(x_j) := (\delta v_h)_j, \quad j = 0, \dots, N,$$

e linear em cada intervalo $[x_j, x_{j+1}]$, $j = 0, \dots, N-1$. Tal como anteriormente, prova-se que existe $C > 0$ tal que

$$\|w_h\|_{W^{1,p}(0,R)} \leq C \|v_h\|_{W_h^{2,p}},$$

ou seja, $(w_h)_\Lambda$ é limitada em $\Pi W^{1,p}(0,R)$. Se $p > 1$, pelo Teorema de Rellich-Kondrachov, existem uma subsucessão Λ'' de Λ e $w_1 \in C[0,R]$ tais que

$$\max_{0 \leq j \leq N} |(\delta v_h)_j - w_1(x_j)| \rightarrow 0 \quad (h \in \Lambda'').$$

Seja $w_0(x) := \int_0^x w_1(t) dt$. Atendendo a que $v_0 = w_0(x_0) = 0$, então

$$v_{j-1/2} - w_0(x_{j-1/2}) = \sum_{i=0}^{j-1} ((\delta v)_i - (\delta w_0)_i), \quad j = 0, \dots, N+1,$$

e portanto

$$\begin{aligned} |v_{j-1/2} - w_0(x_{j-1/2})| &\leq \sum_{i=0}^N |(\delta v)_i - w_1(x_i)| + \sum_{i=0}^N |w_1(x_i) - (\delta w_0)_i| \\ &\leq R \max_{0 \leq i \leq N} |(\delta v)_i - w_1(x_i)| + R \max_{0 \leq i \leq N} |w_1'(x_i) - (\delta w_0)_i|, \end{aligned}$$

$j = 0, \dots, N+1$. Logo

$$\max_{0 \leq j \leq N+1} |v_{j-1/2} - w_0(x_{j-1/2})| \rightarrow 0 \quad (h \in \Lambda'').$$

Assim, concluimos que

$$v_h \rightarrow w_0 \quad (h \in \Lambda') \text{ em } (C_0^1[0,R], \Pi \overset{\circ}{W}_h^{1,\infty}).$$

A demonstração para o caso $p = 1$ segue os passos apresentados anteriormente na primeira parte da demonstração. ■

2.3 Estabilidade

Na investigação das propriedades de métodos para problemas de condição inicial ordinários, Spijker constatou, em [66], que esquemas aparentemente inconsistentes produzem soluções convergentes. A justificação para o facto anterior foi obtida introduzindo normas convenientes para medir o erro de truncatura.

O nosso objectivo é, utilizando normas do tipo das introduzidas por Spijker, estabelecer uma desigualdade para a estabilidade que permita o uso das referidas normas na aferição do erro de truncatura e do erro global.

Consideremos os operadores soma

$$\begin{aligned} \left(\Sigma_h^{(1)}v_h\right)_0 &:= 0, & \left(\Sigma_h^{(1)}v_h\right)_j &:= \sum_{k=1}^j h_{k-1}v_{k-1/2}, & j &= 1, \dots, N, \\ \left(\Sigma_h^{(2)}v_h\right)_0 &:= 0, & \left(\Sigma_h^{(2)}v_h\right)_{j-1/2} &:= \sum_{k=0}^{j-1} h_{k-1/2}v_k, & j &= 1, \dots, N+1, \end{aligned}$$

que constituem versões discretas do operador de integração

$$\Sigma v(x) := \int_0^x v(y) dy.$$

Definimos os operadores $\widehat{\Sigma_h^{(2)}\Sigma_h^{(1)}} : \mathring{L}_h^p \rightarrow \mathring{L}_h^p$ e $\widehat{\Sigma^2} : L^p(0, R) \rightarrow L^p(0, R)$, $1 \leq p \leq \infty$, respectivamente, por

$$\left(\widehat{\Sigma_h^{(2)}\Sigma_h^{(1)}}v_h\right)_{j-1/2} := \left(\Sigma_h^{(2)}\Sigma_h^{(1)}v_h\right)_{j-1/2} - \frac{1}{R} \left(\Sigma_h^{(2)}\Sigma_h^{(1)}v_h\right)_N x_{j-1/2}, \quad (2.19)$$

e

$$\widehat{\Sigma^2}v(x) := \int_0^x \int_0^z v(y) dy dz - \frac{x}{R} \int_0^R \int_0^z v(y) dy dz,$$

$j = 1, \dots, N$, $x \in [0, R]$.

Observamos, pela expressão do erro de truncatura (2.5), que o método (2.3)-(2.4) é inconsistente com o problema diferencial, relativamente à norma $\|\cdot\|_{L_h^\infty}$. No entanto, na parte final desta subsecção, provamos que

$$\left\| \widehat{\Sigma_h^{(2)}\Sigma_h^{(1)}}(A_h(R_h u) - f_h) \right\|_{L_h^\infty} \rightarrow 0 \quad (h \in \Lambda).$$

Assim, o estabelecimento de uma desigualdade de estabilidade envolvendo a norma anterior permite concluir a convergência.

Grigorieff apresenta, em [39], desigualdades de estabilidade para métodos de diferenças finitas usando normas análogas às de Spijker. A desigualdade (15) de

[39] inspirou a dedução de um resultado de estabilidade, Teorema 2.7, onde é usada a composição dos operadores definida por (2.19).

Nos lemas seguintes apresentamos algumas propriedades do operador $\widehat{\Sigma_h^{(2)}\Sigma_h^{(1)}}$.

Lema 2.3 *Seja $1 \leq p \leq \infty$. Existe $C > 0$ independente de h tal que*

$$\|\widehat{\Sigma_h^{(2)}\Sigma_h^{(1)}}v_h\|_{W_h^{1,p}} \leq C\|v_h\|_{L_h^p} \quad \forall v_h \in \mathring{L}_h^p. \quad (2.20)$$

Demonstração: Sejam $v_h \in \mathring{L}_h^p$ e $p \in [1, \infty)$. Pela desigualdade de Hölder, vem que

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N h_{j-1}|v_{j-1/2}| &\leq \left(\sum_{j=1}^N h_{j-1}\right)^{1-1/p} \left(\sum_{j=1}^N h_{j-1}|v_{j-1/2}|^p\right)^{1/p} \\ &= R^{1-1/p}\|v_h\|_{L_h^p}. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Da estimativa anterior resulta

$$\begin{aligned} \left| \left(\widehat{\Sigma_h^{(2)}\Sigma_h^{(1)}}v_h \right)_{j-1/2} \right| &\leq \sum_{k=0}^{j-1} h_{k-1/2} \sum_{\ell=1}^N h_{\ell-1} |v_{\ell-1/2}| \\ &\leq \sum_{k=0}^{j-1} h_{k-1/2} R^{1-1/p} \|v_h\|_{L_h^p} \leq R^{2-1/p} \|v_h\|_{L_h^p}, \end{aligned}$$

$j = 1, \dots, N+1$. Portanto,

$$\left| \widehat{\Sigma_h^{(2)}\Sigma_h^{(1)}}v_h \right|_{W_h^{0,p}}^p \leq 2^p R^{2p} \|v_h\|_{L_h^p}^p. \quad (2.22)$$

Da igualdade

$$\left(\delta \widehat{\Sigma_h^{(2)}\Sigma_h^{(1)}}v_h \right)_j = \frac{\left(\widehat{\Sigma_h^{(2)}\Sigma_h^{(1)}}v_h \right)_{j+1/2} - \left(\widehat{\Sigma_h^{(2)}\Sigma_h^{(1)}}v_h \right)_{j-1/2}}{h_{j-1/2}} = \left(\Sigma_h^{(1)}v_h \right)_j, \quad (2.23)$$

$j = 0, \dots, N+1$, obtemos sucessivamente

$$\begin{aligned} \left| \widehat{\Sigma_h^{(2)}\Sigma_h^{(1)}}v_h \right|_{W_h^{1,p}}^p &= \sum_{j=0}^N h_{j-1/2} \left| \left(\Sigma_h^{(1)}v_h \right)_j - \frac{1}{R} \left(\widehat{\Sigma_h^{(2)}\Sigma_h^{(1)}}v_h \right)_N \right|^p \\ &\leq \sum_{j=0}^N h_{j-1/2} \left(\sum_{k=1}^N h_{k-1} |v_{k-1/2}| + \frac{1}{R} \left| \left(\widehat{\Sigma_h^{(2)}\Sigma_h^{(1)}}v_h \right)_N \right| \right)^p \\ &\leq \sum_{j=0}^N h_{j-1/2} \left(2R^{1-1/p} \|v_h\|_{L_h^p} \right)^p \leq 2^p R^p \|v_h\|_{L_h^p}^p, \end{aligned}$$

o que conclui a demonstração para o caso $1 \leq p < \infty$.

A desigualdade (2.21) também é válida quando $p = \infty$ com $R^{1-1/p}$ substituído por R . Assim, obtemos a estimativa

$$|\widehat{\Sigma_h^{(2)} \Sigma_h^{(1)}} v_h|_{W_h^{0,\infty}} \leq 2R^2 \|v_h\|_{L_h^\infty}$$

e, considerando (2.23), facilmente estabelecemos a desigualdade

$$|\widehat{\Sigma_h^{(2)} \Sigma_h^{(1)}} v_h|_{W_h^{1,\infty}} \leq 2R \|v_h\|_{L_h^\infty}.$$

■

Lema 2.4 *Seja $1 \leq p \leq \infty$. Se $(v_h)_\Lambda \in \Pi \mathring{L}_h^p$ é limitada, então existem uma subsucessão $\Lambda' \subseteq \Lambda$ e $w \in L^p(0, R)$ tais que*

$$\widehat{\Sigma_h^{(2)} \Sigma_h^{(1)}} v_h \rightarrow w \text{ em } (L^p(0, R), \Pi \mathring{L}_h^p) \quad (h \in \Lambda'). \quad (2.24)$$

Se

$$v_h \rightarrow v \text{ em } (L^p(0, R), \Pi \mathring{L}_h^p) \quad (h \in \Lambda),$$

então

$$\widehat{\Sigma_h^{(2)} \Sigma_h^{(1)}} v_h \rightarrow \widehat{\Sigma}^2 v \text{ em } (L^p(0, R), \Pi \mathring{L}_h^p) \quad (h \in \Lambda). \quad (2.25)$$

Demonstração: Seja $(v_h)_\Lambda$ limitada em $\Pi \mathring{L}_h^p$. Pelo Lema 2.3, $(\widehat{\Sigma_h^{(2)} \Sigma_h^{(1)}} v_h)_\Lambda$ é limitada em $\Pi \mathring{W}_h^{1,p}$. Atendendo a que, pelo Teorema 2.2, a sucessão de mergulhos $(J_h)_\Lambda$, $J_h : \mathring{W}_h^{1,p} \rightarrow \mathring{L}_h^p$, é discretamente compacta, existem uma subsucessão $\Lambda' \subseteq \Lambda$ e $w \in L^p(0, R)$ para as quais é válida a convergência (2.24).

Pelo Teorema C.1, a estabilidade de $\widehat{\Sigma_h^{(2)} \Sigma_h^{(1)}}$ e a consistência de $\widehat{\Sigma_h^{(2)} \Sigma_h^{(1)}}$ com $\widehat{\Sigma}^2$, $h \in \Lambda$, são condições suficientes para se concluir a convergência discreta (2.25). O Lema 2.3 permite concluir a estabilidade pretendida. Falta provar a consistência. Seja $\varphi \in C^\infty[0, R]$. Tem-se

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^{x_j} \varphi(y) dy - \sum_{k=1}^j h_{k-1} \varphi(x_{k-1/2}) \right| \\ & \leq R \max_{k=1, \dots, N} \max_{x \in [x_{k-1}, x_k]} |\varphi(x) - \varphi(x_{k-1/2})| \rightarrow 0 \quad (h \in \Lambda) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^{x_{j-1/2}} \varphi(y) dy - \sum_{k=0}^{j-1} h_{k-1/2} \varphi(x_k) \right| \\ & \leq R \max_{k=0, \dots, N} \max_{x \in [x_{k-1/2}, x_{k+1/2}]} |\varphi(x) - \varphi(x_k)| \rightarrow 0 \quad (h \in \Lambda), \end{aligned}$$

portanto

$$\left| \int_0^{x_{j-1/2}} \int_0^z \varphi(y) dy dz - (\Sigma_h^{(2)} \widehat{\Sigma}_h^{(1)} R_h \varphi)_{j-1/2} x_{j-1/2} \right| \rightarrow 0 \quad (h \in \Lambda)$$

e

$$\left| \frac{x_{j-1/2}}{R} \int_0^R \int_0^z \varphi(y) dy dz - \frac{1}{R} (\Sigma_h^{(2)} \widehat{\Sigma}_h^{(1)} R_h \varphi)_N x_{j-1/2} \right| \rightarrow 0 \quad (h \in \Lambda).$$

Assim, concluímos que

$$\|\widehat{\Sigma}_h^{(2)} \widehat{\Sigma}_h^{(1)} R_h \varphi - R_h \widehat{\Sigma}_h^2 \varphi\|_{L_h^p} \leq R^{1/p} \|\widehat{\Sigma}_h^{(2)} \widehat{\Sigma}_h^{(1)} R_h \varphi - R_h \widehat{\Sigma}_h^2 \varphi\|_{L_h^\infty} \rightarrow 0 \quad (h \in \Lambda).$$

■

Com o objectivo de simplificarmos a notação, introduzimos os operadores $A^{(1)}$ e $A_h^{(1)}$

$$A^{(1)}u := bu' + cu, \quad A_h^{(1)}u_h := M_h(b\delta u_h) + \tilde{R}_h(cu_h).$$

Os lemas que se seguem desempenham um papel importante na demonstração do resultado de estabilidade (Teorema 2.7).

Lema 2.5 *Existe uma constante $C > 0$ independente de h tal que*

$$\|\widehat{\Sigma}_h^{(2)} \widehat{\Sigma}_h^{(1)} A_h^{(1)}v_h\|_{W_h^{1,\infty}} \leq C\|v_h\|_{L_h^\infty} \quad \forall v_h \in \mathring{L}_h^\infty. \quad (2.26)$$

Demonstração: Começemos por considerar o termo auxiliar

$$\widehat{\Sigma}_h^{(2)} \widehat{\Sigma}_h^{(1)} M_h \delta(bv_h).$$

Provemos que

$$\|\widehat{\Sigma}_h^{(2)} \widehat{\Sigma}_h^{(1)} M_h \delta(bv_h)\|_{W_h^{1,\infty}} \leq C\|v_h\|_{L_h^\infty}. \quad (2.27)$$

Atendendo à representação

$$\begin{aligned} \left(\widehat{\Sigma}_h^{(1)} M_h \delta(bv_h) \right)_k &= \frac{h_0}{4} (\delta(bv_h))_0 + \frac{h_0}{2} (\delta(bv_h))_1 \\ &\quad + \sum_{\ell=2}^k \frac{h_{\ell-1}}{2} \left((\delta(bv_h))_{\ell-1} + (\delta(bv_h))_\ell \right) \end{aligned} \quad (2.28)$$

$k = 1, \dots, N - 1$, obtém-se

$$\begin{aligned}
\left(\Sigma_h^{(1)} M_h \delta(bv_h)\right)_k &= \frac{h_0}{4} (\delta(bv_h))_0 + \frac{h_0}{2} (\delta(bv_h))_1 + \sum_{\ell=2}^{k-1} h_{\ell-1/2} (\delta(bv_h))_\ell \\
&\quad + \frac{h_1}{2} (\delta(bv_h))_1 + \frac{h_{k-1}}{2} (\delta(bv_h))_k \\
&= \frac{b_{1/2}v_{1/2} - b_0v_0}{2} + b_{k-1/2}v_{k-1/2} - b_{1/2}v_{1/2} \\
&\quad + \frac{h_{k-1}}{2} \frac{b_{k+1/2}v_{k+1/2} - b_{k-1/2}v_{k-1/2}}{h_{k-1/2}} \\
&= -\frac{b_0v_0 + b_{1/2}v_{1/2}}{2} \\
&\quad + \frac{h_{k-1}b_{k+1/2}v_{k+1/2} + h_k b_{k-1/2}v_{k-1/2}}{2h_{k-1/2}}
\end{aligned}$$

e

$$\left(\Sigma_h^{(1)} M_h \delta(bv_h)\right)_N = -\frac{b_0v_0 + b_{1/2}v_{1/2}}{2} + b_{N+1/2}v_{N+1/2}.$$

Assim, para $j = 1, \dots, N + 1$, vale

$$\begin{aligned}
&\left(\Sigma_h^{(2)} \Sigma_h^{(1)} M_h \delta(bv_h)\right)_{j-1/2} \\
&= \sum_{k=1}^{j-1} h_{k-1/2} \left(-\frac{b_0v_0 + b_{1/2}v_{1/2}}{2} + \frac{h_{k-1}b_{k+1/2}v_{k+1/2} + h_k b_{k-1/2}v_{k-1/2}}{2h_{k-1/2}} \right).
\end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}
&|\widehat{\Sigma_h^{(2)} \Sigma_h^{(1)} M_h \delta(bv_h)}|_{W_h^{1,\infty}} \\
&\leq \max_{0 \leq j \leq N} \left| \left(\Sigma_h^{(1)} M_h \delta(bv_h)\right)_j \right| + \left| \frac{1}{R} \left(\Sigma_h^{(2)} \Sigma_h^{(1)} M_h \delta(bv_h)\right)_N \right| \\
&\leq 2 \max_{1 \leq j \leq N} \left| -\frac{b_0v_0 + b_{1/2}v_{1/2}}{2} + \frac{h_{j-1}b_{j+1/2}v_{j+1/2} + h_j b_{j-1/2}v_{j-1/2}}{2h_{j-1/2}} \right| \\
&\leq 2\|b\|_{L^\infty} \|v_h\|_{L_h^\infty}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} & \left| \widehat{\Sigma_h^{(2)} \Sigma_h^{(1)}} M_h \delta(bv_h) \right|_{W_h^{0,\infty}} \\ &= 2 \max_{1 \leq j \leq N} \left| \sum_{k=0}^{j-1} \frac{h_{j-1} b_{j+1/2} v_{j+1/2} + h_j b_{j-1/2} v_{j-1/2}}{2} \right| \\ &\leq 2R \|b\|_{L^\infty} \|v_h\|_{L_h^\infty}, \end{aligned}$$

donde se conclui (2.27).

Provemos agora que

$$\left\| \widehat{\Sigma_h^{(2)} \Sigma_h^{(1)}} M_h (\delta(bv_h) - b\delta v_h) \right\|_{W_h^{1,\infty}} \leq C \|v_h\|_{L_h^\infty}. \quad (2.29)$$

Pelo Lema 2.3,

$$\left\| \widehat{\Sigma_h^{(2)} \Sigma_h^{(1)}} M_h (\delta(bv_h) - b\delta v_h) \right\|_{W_h^{1,\infty}} \leq C \|M_h (\delta(bv_h) - b\delta v_h)\|_{L_h^\infty}.$$

Das estimativas

$$\begin{aligned} & (M_h (\delta(bv_h) - b\delta v_h))_{k-1/2} \\ &= \frac{(b_{k+1/2} - b_k) v_{k+1/2} + (b_k - b_{k-1/2}) v_{k-1/2}}{2h_{k-1/2}} \\ &+ \frac{(b_{k-1/2} - b_{k-1}) v_{k-1/2} + (b_{k-1} - b_{k-3/2}) v_{k-3/2}}{2h_{k-3/2}} \\ &\leq \frac{1}{2} \|b\|_{W^{1,\infty}(0,R)} (|v_{k-3/2}| + 2|v_{k-1/2}| + |v_{k+1/2}|), \end{aligned}$$

$k = 2, \dots, N-1$,

$$(M_h (\delta(bv_h) - b\delta v_h))_{1/2} \leq \frac{1}{2} \|b\|_{W^{1,\infty}(0,R)} \left(\frac{3}{2} |v_{1/2}| + |v_{3/2}| \right)$$

e

$$(M_h (\delta(bv_h) - b\delta v_h))_{N-1/2} \leq \frac{1}{2} \|b\|_{W^{1,\infty}(0,R)} \left(|v_{N-3/2}| + \frac{3}{2} |v_{N-1/2}| \right),$$

obtemos (2.29).

Por outro lado, novamente pelo Lema 2.3, resulta

$$\left\| \widehat{\Sigma_h^{(2)} \Sigma_h^{(1)}} (\tilde{R}_h(cv_h)) \right\|_{W_h^{1,\infty}} \leq C \|\tilde{R}_h cv_h\|_{L_h^\infty} \leq C \|c\|_{L^\infty(0,R)} \|v_h\|_{L_h^\infty}. \quad (2.30)$$

A desigualdade (2.26) é consequência imediata de (2.27), (2.29) e (2.30). ■

Lema 2.6 A sucessão $(A_h^{(1)})_\Lambda : \Pi \overset{\circ}{W}_h^{1,\infty} \rightarrow \Pi \overset{\circ}{L}_h^\infty$ é consistente com $A^{(1)} : W_0^{1,\infty}(0, R) \rightarrow L^\infty(0, R)$.

Demonstração: Para todo $\varphi \in C_0^\infty(0, R)$ tem-se

$$|(A_h^{(1)}(R_h\varphi))_{j-1/2} - (R_h(A^{(1)}\varphi))_{j-1/2}| = \mathcal{O}(h_{max}),$$

$j = 1, \dots, N$. ■

O resultado de convergência tem por base o teorema de estabilidade que apresentamos de seguida. Este teorema estabelece uma desigualdade de estabilidade análoga à apresentada em [39], mas no caso das diferenças finitas centradas nas células.

Teorema 2.7 Se o operador A definido por (2.1) é injectivo, então existe uma constante positiva C independente de h tal que, para h_{max} suficientemente pequeno,

$$C\|v_h\|_{L_h^\infty} \leq \|\widehat{\Sigma_h^{(2)}\Sigma_h^{(1)}} A_h v_h\|_{L_h^\infty} \quad \forall v_h \in \overset{\circ}{L}_h^\infty. \quad (2.31)$$

Demonstração: Suponhamos que (2.31) não se verifica. Então existem uma subsucessão $\Lambda' \subseteq \Lambda$ e uma subsucessão $(v_h)_{\Lambda'} \in \Pi \overset{\circ}{L}_h^\infty$, tais que

$$\|v_h\|_{L_h^\infty} = 1, \quad (2.32)$$

$$\|\widehat{\Sigma_h^{(2)}\Sigma_h^{(1)}} A_h v_h\|_{L_h^\infty} \rightarrow 0 \quad (h \in \Lambda'). \quad (2.33)$$

Provemos que $w_h := \widehat{\Sigma_h^{(2)}\Sigma_h^{(1)}} \delta^2 v_h - v_h = 0$. De facto, para $j = 1, \dots, N$, vale a representação

$$\begin{aligned} \left(\widehat{\Sigma_h^{(2)}\Sigma_h^{(1)}} \delta^2 v_h\right)_{j-1/2} &= \sum_{k=1}^{j-1} h_{k-1/2} \sum_{\ell=1}^k [(\delta v_h)_\ell - (\delta v_h)_{\ell-1}] \\ &= \sum_{k=1}^{j-1} h_{k-1/2} [(\delta v_h)_k - (\delta v_h)_0] \\ &= \sum_{k=1}^{j-1} (v_{k+1/2} - v_{k-1/2}) - \sum_{k=1}^{j-1} h_{k-1/2} (\delta v_h)_0 \\ &= v_{j-1/2} - v_{1/2} - \sum_{k=1}^{j-1} h_{k-1/2} (\delta v_h)_0 \\ &= v_{j-1/2} - x_{j-1/2} (\delta v_h)_0. \end{aligned}$$

Por (2.19) e atendendo a que

$$\frac{1}{R} \left(\widehat{\Sigma_h^{(2)} \Sigma_h^{(1)}} \delta^2 v_h \right)_N x_{j-1/2} = \frac{1}{R} (v_N - x_N (\delta v_h)_0) x_{j-1/2} = -(\delta v_h)_0 x_{j-1/2},$$

$j = 1, \dots, N$, vem

$$(w_h)_{j-1/2} = 0, \quad j = 1, \dots, N. \quad (2.34)$$

Finalmente, como $\widehat{\Sigma_h^{(2)} \Sigma_h^{(1)}} \delta^2 v_h, v_h \in \mathring{L}_h^\infty$, então

$$(w_h)_0 = (w_h)_N = 0. \quad (2.35)$$

Por outro lado, vale a igualdade

$$w_h = -\widehat{\Sigma_h^{(2)} \Sigma_h^{(1)}} A_h v_h - v_h + \widehat{\Sigma_h^{(2)} \Sigma_h^{(1)}} A_h^{(1)} v_h. \quad (2.36)$$

Atendendo a (2.32) e ao Lema 2.5, deduzimos que $(\widehat{\Sigma_h^{(2)} \Sigma_h^{(1)}} A_h^{(1)} v_h)_\Lambda$ é uma sucessão limitada em $\Pi \mathring{W}_h^{1,\infty}$ e portanto, pelo Teorema 2.2, existem $\Lambda'' \subseteq \Lambda'$ e $z \in C_0[0, R]$, tais que

$$\widehat{\Sigma_h^{(2)} \Sigma_h^{(1)}} A_h^{(1)} v_h \rightarrow z \text{ em } (C_0[0, R], \Pi \mathring{L}_h^\infty) \quad (h \in \Lambda''). \quad (2.37)$$

Considerando o limite em (2.36), de (2.33), (2.34)–(2.37), segue-se a convergência

$$v_h \rightarrow z \text{ em } (C_0[0, R], \Pi \mathring{L}_h^\infty) \quad (h \in \Lambda'''). \quad (2.38)$$

Pelos lemas 2.4 e 2.6 deduzimos que $(\widehat{\Sigma_h^{(2)} \Sigma_h^{(1)}} A_h^{(1)})_\Lambda$ é consistente com $\widehat{\Sigma^2} A^{(1)}$. Atendendo a (2.37) e (2.38), obtemos

$$-z + \widehat{\Sigma^2} A^{(1)} z = 0. \quad (2.39)$$

Observamos que o operador $\widehat{\Sigma^2} A^{(1)}$ está definido de $W^{r,\infty}(0, R)$ em $W^{r+1,\infty}(0, R)$, $r = \mathbb{N}_0$ e portanto

$$z = \widehat{\Sigma^2} A^{(1)} z \in W^{1,\infty}(0, R).$$

Pelo mesmo argumento estabelecemos que $z \in W^{2,\infty}(0, R)$. Derivando duas vezes a equação (2.39) vem

$$-z'' + A^{(1)} z = 0.$$

Como A é injectivo concluímos que $z = 0$. Finalmente, afirmação anterior conduz contradição pretendida pois, atendendo a (2.32) e (2.38), tem-se $\|z\|_{L^\infty(0,R)} = 1$. ■

2.4 Convergência

A desigualdade de estabilidade (2.31) permite obter uma estimativa para $\|R_h u - u_h\|_{L_h^\infty}$, onde u é a solução do problema (2.1) e u_h a aproximação numérica correspondente, estimando $\|\widehat{\Sigma_h^{(2)} \Sigma_h^{(1)}} A_h(R_h u - u_h)\|_{L_h^\infty}$. Consideremos a seguinte representação para o erro de truncatura

$$\widehat{\Sigma_h^{(2)} \Sigma_h^{(1)}} A_h(R_h u - u_h) = -T_1 + T_2 + T_3, \quad (2.40)$$

em que

$$T_1 := \widehat{\Sigma_h^{(2)} \Sigma_h^{(1)}} (\delta^2 R_h u - M_h R_{G_h} u''), \quad (2.41)$$

$$T_2 := \widehat{\Sigma_h^{(2)} \Sigma_h^{(1)}} \left[M_h (b(\delta R_h u - R_{G_h} u')) \right], \quad (2.42)$$

$$T_3 := \widehat{\Sigma_h^{(2)} \Sigma_h^{(1)}} \left[\tilde{R}_h(cu) - M_h R_{G_h}(cu) \right], \quad (2.43)$$

e estimemos separadamente cada uma das quantidades anteriores.

Estimativa para T_1 : Consideremos, em primeiro lugar, o termo $(T_1)_{j-1/2}$, $j = 1, \dots, N$. Determinemos uma representação conveniente para $\widehat{\Sigma_h^{(2)} \Sigma_h^{(1)}} (\delta^2 R_h u)$ e $\widehat{\Sigma_h^{(2)} \Sigma_h^{(1)}} [M_h R_{G_h}(u'')]$.

Como

$$\left(\widehat{\Sigma_h^{(1)}} \delta^2 R_h u \right)_k = \sum_{\ell=1}^k ((\delta u)_\ell - (\delta u)_{\ell-1}) = (\delta u)_k - (\delta u)_0,$$

$k = 1, \dots, N-1$, então

$$\left(\widehat{\Sigma_h^{(2)} \Sigma_h^{(1)}} \delta^2 R_h u \right)_{j-1/2} = \sum_{k=1}^{j-1} [h_{k-1/2} ((\delta u)_k - (\delta u)_0)],$$

ou seja,

$$\left(\widehat{\Sigma_h^{(2)} \Sigma_h^{(1)}} \delta^2 R_h u \right)_{j-1/2} = \sum_{k=1}^{j-1} \int_{x_{k-1/2}}^{x_{k+1/2}} u'(x) dx - \sum_{k=1}^{j-1} h_{k-1/2} (\delta u)_0. \quad (2.44)$$

Relativamente a $\left(\Sigma_h^{(1)} M_h R_{G_h} u''\right)_k$, usando a regra dos trapézios na aproximação do termo integral, vem

$$\begin{aligned} & \left(\Sigma_h^{(1)} M_h R_{G_h} u''\right)_k \\ &= h_0 \left(\frac{u''(x_0)}{4} + \frac{u''(x_1)}{2} \right) + \sum_{\ell=2}^k \left(h_{\ell-1} \frac{u''(x_\ell) + u''(x_{\ell-1})}{2} \right) \\ &= \sum_{\ell=1}^k \left(h_{\ell-1} \frac{u''(x_\ell) + u''(x_{\ell-1})}{2} \right) - \frac{h_0}{4} u''(x_0) \\ &= \sum_{\ell=1}^k \left(\int_{x_{\ell-1}}^{x_\ell} u''(x) dx + S_\ell \right) - \frac{h_0}{4} u''(x_0), \end{aligned}$$

com

$$S_\ell := h_{\ell-1} \frac{u''(x_\ell) + u''(x_{\ell-1})}{2} - \int_{x_{\ell-1}}^{x_\ell} u''(x) dx,$$

em que, pelo Lema 1.4, para S_ℓ vale a estimativa

$$|S_\ell| \leq Ch_{\ell-1}^2 \|u'''\|_{L^1(I_{\ell-1})}. \quad (2.45)$$

Finalmente, atendendo à igualdade

$$\begin{aligned} \left(\Sigma_h^{(1)} M_h R_{G_h} u''\right)_k &= \int_{x_0}^{x_k} u''(x) dx + \sum_{\ell=1}^k S_\ell - \frac{h_0}{4} u''(x_0) \\ &= u'(x_k) - u'(x_0) - \frac{h_0}{4} u''(x_0) + \sum_{\ell=1}^k S_\ell, \end{aligned}$$

vem

$$\begin{aligned} \left(\Sigma_h^{(2)} \Sigma_h^{(1)} M_h R_{G_h} u''\right)_{j-1/2} &= \sum_{k=1}^{j-1} h_{k-1/2} u'(x_k) \\ &+ \sum_{k=1}^{j-1} \left(h_{k-1/2} \sum_{\ell=1}^k S_\ell \right) - \sum_{k=1}^{j-1} h_{k-1/2} \left(u'(x_0) + \frac{h_0}{4} u''(x_0) \right). \end{aligned} \quad (2.46)$$

A estimativa para T_1 obtém-se majorando

$$\sum_{k=1}^{j-1} \left(\int_{x_{k-1/2}}^{x_{k+1/2}} u'(x) dx - h_{k-1/2} u'(x_k) \right) \quad (2.47)$$

e

$$\sum_{k=1}^{j-1} h_{k-1/2} \left((\delta u)_0 - u'(x_0) - \frac{h_0}{4} u''(x_0) \right).$$

Para (2.47) vale a representação

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^{j-1} \left(\int_{x_{k-1/2}}^{x_{k+1/2}} u'(x) dx - h_{k-1/2} u'(x_k) \right) \\
&= \int_{x_{1/2}}^{x_1} u'(x) dx + \sum_{k=2}^{j-1} \int_{x_{k-1}}^{x_k} u'(x) dx + \int_{x_{j-1}}^{x_{j-1/2}} u'(x) dx \\
&\quad - \frac{h_0}{2} u'(x_1) - \sum_{k=2}^{j-1} h_{k-1} \frac{u'(x_{k-1}) + u'(x_k)}{2} - h_{j-1} u'(x_{j-1}). \quad (2.48)
\end{aligned}$$

A estimativa

$$\left| \int_{x_{k-1}}^{x_k} u'(x) dx - h_{k-1} \frac{u'(x_{k-1}) + u'(x_k)}{2} \right| \leq C h_{k-1}^2 \|u'''\|_{L^1(I_{k-1})},$$

obém-se novamente pelo Lema 1.4. Para os restantes termos do segundo membro de (2.48), tem-se

$$\left| \int_{x_{1/2}}^{x_1} u'(x) dx - \frac{h_0}{2} u'(x_1) \right| \leq \frac{h_0^2}{8} \|u''\|_{L^\infty(I_0)}$$

e

$$\left| \int_{x_{j-1}}^{x_{j-1/2}} u'(x) dx - \frac{h_{j-1}}{2} u'(x_{j-1}) \right| \leq \frac{h_{j-1}^2}{8} \|u''\|_{L^\infty(I_{j-1})}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
& \left| \sum_{k=1}^{j-1} \left(\int_{x_{k-1/2}}^{x_{k+1/2}} u'(x) dx - h_{k-1/2} u'(x_k) \right) \right| \\
& \leq \sum_{k=2}^{j-1} h_{k-1}^2 \|u'''\|_{L^1(I_k)} + h_0^2 \|u''\|_{L^\infty(I_0)} + h_{j-1}^2 \|u''\|_{L^\infty(I_{j-1})}. \quad (2.49)
\end{aligned}$$

Com o objectivo de estimar $(\delta u)_0 - u'(x_0) - \frac{h_0}{4} u''(x_0)$ definimos a função

$$w(\xi) := u(x_0 + \xi \frac{h_0}{2}), \quad \xi \in [0, 1].$$

Atendendo a que vale a representação

$$(\delta u)_0 - u'(x_0) - \frac{h_0}{4} u''(x_0) = \frac{2}{h_0} \left(w(1) - w(0) - w'(0) - \frac{w''(0)}{2} \right),$$

e como a funcional

$$\lambda(g) := g(1) - g(0) - g'(0) - \frac{g''(0)}{2}$$

é limitada em $W^{3,1}(0,1)$ e se anula em $g = 1$, ξ e ξ^2 , então, pelo Lema de Bramble-Hilbert existe uma constante $C > 0$ tal que

$$|\lambda(g)| \leq C \|g'''\|_{L^1(0,1)}.$$

Considerando na estimativa anterior $g = w$, resulta a estimativa pretendida

$$|(\delta u)_0 - u'(x_0) - \frac{h_0}{4} u''(x_0)| \leq Ch_0 \|u'''\|_{L^1(I_0)} \leq Ch_0^2 \|u'''\|_{L^\infty(I_0)}. \quad (2.50)$$

Conjugando (2.45), (2.49) e (2.50), obtemos finalmente

$$\begin{aligned} & \left| \left(\sum_h^{(2)} \Sigma_h^{(1)} (\delta^2 R_h u - M_h R_{G_h} u'') \right)_{j-1/2} \right| \\ & \leq C \left[\sum_{k=1}^{j-1} h_{k-1/2} \left(h_0^2 \|u'''\|_{L^\infty(I_0)} + \sum_{\ell=1}^k h_{\ell-1}^2 \|u'''\|_{L^1(I_{\ell-1})} \right) \right. \\ & \quad \left. + \sum_{k=2}^{j-1} h_{k-1}^2 \|u'''\|_{L^1(I_{k-1})} + h_0^2 \|u''\|_{L^\infty(I_0)} + h_{j-1}^2 \|u''\|_{L^\infty(I_{j-1})} \right]. \end{aligned} \quad (2.51)$$

A estimativa anterior foi estabelecida para $j = 1, \dots, N$. Consideremos agora $j = N + 1$. Note-se que valem as representações

$$\left(\sum_h^{(2)} \Sigma_h^{(1)} \delta^2 R_h u \right)_N = \left(\sum_h^{(2)} \Sigma_h^{(1)} \delta^2 R_h u \right)_{N-1/2} + h_{N-1/2} ((\delta u)_N - (\delta u)_0)$$

e

$$\begin{aligned} & \left(\sum_h^{(2)} \Sigma_h^{(1)} M_h R_{G_h} u'' \right)_N = \left(\sum_h^{(2)} \Sigma_h^{(1)} M_h R_{G_h} u'' \right)_{N-1/2} \\ & \quad + h_{N-1/2} \left[\sum_{\ell=1}^N \left(h_{\ell-1} \frac{u''(x_\ell) + u''(x_{\ell-1})}{2} \right) - \frac{h_0}{4} u''(x_0) - \frac{h_{N-1}}{4} u''(x_N) \right] \\ & = \left(\sum_h^{(2)} \Sigma_h^{(1)} M_h R_{G_h} u'' \right)_{N-1/2} \\ & \quad + h_{N-1/2} \left(u'(x_N) - u'(x_0) - \frac{h_0}{4} u''(x_0) - \frac{h_{N-1}}{4} u''(x_N) \right) + \sum_{\ell=1}^N S_\ell, \end{aligned}$$

em que para $(\delta u)_0 - u'(x_0) - \frac{h_0}{4} u''(x_0)$ vale a estimativa (2.50). Pelo Lema de Bramble-Hilbert, tem-se

$$\left| (\delta u)_N - u'(x_N) + \frac{h_{N-1}}{4} u''(x_N) \right| \leq Ch_{N-1} \|u'''\|_{L^1(I_{N-1})} \leq Ch_{N-1}^2 \|u'''\|_{L^\infty(I_{N-1})},$$

e para S_ℓ vale a estimativa (2.45). Assim, podemos obter uma estimativa para $|(\Sigma_h^{(2)} \Sigma_h^{(1)} (\delta^2 R_h u - M_h R_{G_h} u''))_N|$ seguindo a dedução de (2.51). Portanto,

$$\begin{aligned} |(T_1)_{j-1/2}| \leq & C \left[\sum_{k=1}^{N-1} h_{k-1/2} \left(h_0^2 \|u'''\|_{L^\infty(I_0)} + \sum_{\ell=1}^k h_{\ell-1}^2 \|u''''\|_{L^1(I_{\ell-1})} \right) \right. \\ & + \sum_{k=2}^{N-1} h_{k-1}^2 \|u'''\|_{L^1(I_{k-1})} + h_0^2 \|u''\|_{L^\infty(I_0)} + h_{j-1}^2 \|u''\|_{L^\infty(I_{j-1})} \\ & \left. + h_{N-1}^2 \|u'''\|_{L^\infty(I_{N-1})} \right]. \end{aligned} \quad (2.52)$$

$j = 1, \dots, N$.

Estimativa para T_2 : Somando por partes, obtemos

$$\begin{aligned} \left(\Sigma_h^{(1)} M_h (b(\delta R_h u - R_{G_h} u')) \right)_j &= \sum_{k=1}^{j-1} h_{k-1/2} b_k ((\delta u)_k - u'(x_k)) \\ &+ \frac{h_{j-1}}{2} b_j ((\delta u)_j - u'(x_j)) \\ &+ \frac{h_0}{4} b_0 ((\delta u)_0 - u'(x_0)), \end{aligned} \quad (2.53)$$

$j = 1, \dots, N-1$, e

$$\begin{aligned} \left(\Sigma_h^{(1)} M_h (b(\delta R_h u - R_{G_h} u')) \right)_N &= \sum_{k=1}^{N-1} h_{k-1/2} b_k ((\delta u)_k - u'(x_k)) \\ &+ \frac{h_{N-1}}{4} b_N ((\delta u)_N - u'(x_N)) \\ &+ \frac{h_0}{4} b_0 ((\delta u)_0 - u'(x_0)). \end{aligned}$$

Com o objectivo de estimar o primeiro termo do segundo membro de (2.53), consideremos o desenvolvimento

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{j-1} h_{k-1/2} b_k ((\delta u)_k - u'(x_k)) &= \sum_{k=1}^{j-1} b_k \int_{x_{k-1/2}}^{x_{k+1/2}} u'(x) - u'(x_k) dx \\ &= \sum_{k=1}^{j-1} b_k \int_{x_{k-1/2}}^{x_{k+1/2}} \left[(x - x_k) u''(x_k) + \int_{x_k}^x u'''(t) (x - t) dt \right] dx \\ &= \sum_{k=1}^{j-1} b_k \left[\left(\frac{h_k^2}{8} - \frac{h_{k-1}^2}{8} \right) u''(x_k) + \int_{x_{k-1/2}}^{x_{k+1/2}} \int_{x_k}^x u'''(t) (x - t) dt dx \right]. \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^{j-1} b_k \left(\frac{h_k^2}{8} - \frac{h_{k-1}^2}{8} \right) u''(x_k) \\
&= \sum_{k=2}^{j-1} \frac{h_{k-1}^2}{8} \left((bu'')(x_{k-1}) - (bu'')(x_k) \right) - \frac{h_0^2}{8} (bu'')(x_1) + \frac{h_{j-1}^2}{8} (bu'')(x_{j-1}) \\
&= - \sum_{k=2}^{j-1} \frac{h_{k-1}^2}{8} \int_{x_{k-1}}^{x_k} (bu'')'(x) dx - \frac{h_0^2}{8} (bu'')(x_1) + \frac{h_{j-1}^2}{8} (bu'')(x_{j-1})
\end{aligned}$$

e

$$\sum_{k=1}^{j-1} b_k \int_{x_{k-1/2}}^{x_{k+1/2}} \int_{x_k}^x u'''(t)(x-t) dt dx \leq \sum_{k=1}^{j-1} h_{k-1/2}^2 |b_k| \int_{x_{k-1/2}}^{x_{k+1/2}} |u'''(x)| dx,$$

então

$$\begin{aligned}
& \left| \sum_{k=1}^{j-1} h_{k-1/2} b_k ((\delta u)_k - u'(x_k)) \right| \leq \sum_{k=1}^{j-1} h_{k-1/2}^2 |b(x_k)| \|u'''\|_{L^1((x_{k-1/2}, x_{k+1/2}))} \\
& \quad + \sum_{k=2}^{j-1} \frac{h_{k-1}^2}{8} \| (bu'')' \|_{L^1(I_{k-1})} + \frac{h_0^2}{8} |(bu'')(x_1)| + \frac{h_{j-1}^2}{8} |(bu'')(x_{j-1})|.
\end{aligned}$$

Em relação ao segundo termo do segundo membro de (2.53), observamos que

$$\begin{aligned}
\left| \frac{h_{j-1}}{2} ((\delta u)_j - u'(x_j)) \right| &\leq \frac{h_{j-1} + h_j}{2} |(\delta u)_j - u'(x_j)| \\
&\leq \left| u(x_{j+1/2}) - u(x_j) - \frac{h_j}{2} u'(x_j) \right| \\
&\quad + \left| u(x_j) - u(x_{j-1/2}) - \frac{h_{j-1}}{2} u'(x_j) \right|.
\end{aligned}$$

Note-se que vale a representação

$$u(x_{j+1/2}) - u(x_j) - \frac{h_j}{2} u'(x_j) = w(1) - w(0) - w'(0),$$

com

$$w(\xi) := u(x_j + \xi \frac{h_j}{2}).$$

A funcional

$$\lambda(g) := g(1) - g(0) - g'(0)$$

é limitada em $W^{2,1}(0,1)$ e anula-se para $g = 1$ e ξ . Mais uma vez pelo Lema de Bramble-Hilbert

$$|\lambda(g)| \leq C \|g''\|_{L^1(0,1)}, \quad g \in W^{2,1}(0,1),$$

e considerando $g = w$, obtemos a estimativa

$$\left| u(x_{j+1/2}) - u(x_j) - \frac{h_j}{2} u'(x_j) \right| \leq Ch_j \|u''\|_{L^1(I_j)} \leq Ch_j^2 \|u''\|_{L^\infty(I_j)}.$$

De forma análoga prova-se que

$$\left| u(x_j) - u(x_{j-1/2}) - \frac{h_{j-1}}{2} u'(x_j) \right| \leq Ch_{j-1} \|u''\|_{L^1(I_{j-1})} \leq Ch_{j-1}^2 \|u''\|_{L^\infty(I_{j-1})}.$$

Finalmente, considerando as estimativas obtidas, estabelecemos

$$\begin{aligned} |(T_2)_{j-1/2}| &\leq C \sum_{k=1}^{N-1} h_{k-1/2} \left(\sum_{\ell=1}^{k-1} h_{\ell-1/2}^2 |b(x_\ell)| \|u'''\|_{L^1(I_{\ell-1/2})} \right. \\ &\quad + \sum_{\ell=2}^{k-1} \frac{h_{\ell-1}^2}{8} \|(bu'')'\|_{L^1(I_{\ell-1})} + \frac{h_0^2}{8} |(bu'')(x_1)| + \frac{h_{k-1}^2}{8} |(bu'')(x_{k-1})| \\ &\quad \left. + |b(x_k)| (h_{k-1}^2 \|u''\|_{L^\infty(I_k)} + h_k^2 \|u''\|_{L^\infty(I_{k+1})}) + h_0^2 |b(x_0)| \|u''\|_{L^\infty(I_1)} \right), \end{aligned} \quad (2.54)$$

com $I_{\ell-1/2} := (x_{\ell-1/2}, x_{\ell+1/2})$.

Estimativa para T_3 : Note-se que vale a representação

$$\left(\tilde{R}_h(cu) \right)_{j-1/2} - (M_h R_{G_h}(cu))_{j-1/2} = (cu)(x_{j-1/2}) - \frac{(cu)(x_{j-1}) + (cu)(x_j)}{2},$$

$j = 1, \dots, N$. Pelo Lema 1.3 concluímos que

$$\left| \left(\tilde{R}_h(cu) - M_h R_{G_h}(cu) \right)_{j-1/2} \right| \leq h_{j-1} \|(cu)''\|_{L^1(I_{j-1})},$$

e portanto

$$\left(\sum_h^{(1)} \left| \tilde{R}_h(cu) - M_h R_{G_h}(cu) \right| \right)_j \leq \sum_{k=1}^j h_{k-1}^2 \|(cu)''\|_{L^1(I_{k-1})},$$

$j = 1, \dots, N$. Logo, para T_3 vale a estimativa

$$\begin{aligned} |(T_3)_{j-1/2}| &\leq \sum_{k=1}^{j-1} h_{k-1/2} \sum_{\ell=1}^k h_{\ell-1}^2 \|(cu)''\|_{L^1(I_{\ell-1})} \\ &\quad + \frac{x_{j-1/2}}{R} \sum_{k=1}^N h_{k-1/2} \sum_{\ell=1}^k h_{\ell-1}^2 \|(cu)''\|_{L^1(I_{\ell-1})}. \end{aligned} \quad (2.55)$$

Conjugando (2.52), (2.54) e (2.55), concluímos que

$$\|\widehat{\Sigma_h^{(2)}\Sigma_h^{(1)}}(A_h(R_h u) - f_h)\|_{L_h^\infty} = \mathcal{O}(h_{max}^2). \quad (2.56)$$

Substituindo em (2.20) v_h por $R_h u - u_h$ obtemos uma estimativa para o erro.

Teorema 2.8 *Suponhamos que o problema (2.1)-(2.2) tem uma única solução e que as funções coeficiente são suficientemente regulares: $b \in H^1(0, R)$ e $c \in H^2(0, R)$. Seja u_h a solução de (2.3)-(2.4). Se $u \in H^4(0, R)$, então*

$$\begin{aligned} \|R_h u - u_h\|_{L_h^\infty} &\leq C \sum_{k=0}^{N-1} h_k^2 \left(\|u\|_{W^{4,1}(I_k)} + \|b\|_{L^\infty(I_k)} \|u'''\|_{L^1(I_{k-1/2} \cup I_{k+1/2})} \right. \\ &\quad \left. + \|bu''\|_{W^{1,1}(I_k)} + \|cu''\|_{L^1(I_k)} \right). \end{aligned} \quad (2.57)$$

2.5 Normas de índice negativo e equivalência de normas

Nesta secção começamos por definir, seguindo [60], o operador adjunto de Hilbert de um operador definido num espaço de Hilbert geral. Seguidamente estabelecemos um resultado de estabilidade usando uma norma de índice negativo (Teorema 2.11). A equivalência entre a norma de índice negativo e uma norma que é definida usando o operador adjunto de Hilbert, estabelecida no Teorema 2.12, permite escrever o resultado de estabilidade relativamente a esta última norma.

Definição 2.9 (Operador adjunto de Hilbert) *Sejam E um espaço de Hilbert e A um operador linear definido de $\mathcal{D}(A) \subseteq E$ em E , com $\mathcal{D}(A)$ denso em E . Denotamos por $\mathcal{D}(A^*)$ o conjunto de todos os elementos $\varphi \in E$ tais que existe $w \in E$ que verifica*

$$(Av, \varphi)_E = (v, w)_E \quad \forall v \in \mathcal{D}(A).$$

Seja A^* a aplicação de $\mathcal{D}(A^*) \subseteq E$ em E definida por

$$A^* \varphi := w.$$

A A^* chamamos operador adjunto de Hilbert de A .

Note-se que, como $\mathcal{D}(A)$ é denso em E então w é determinado, de modo único, por $\varphi \in \mathcal{D}(A^*)$.

O teorema seguinte, cuja prova pode ser consultado por exemplo em [34], tem um papel central na demonstração dos teoremas 2.11 e 2.12.

Teorema 2.10 *Seja A um operador linear, fechado, com $\mathcal{D}(A)$ denso em E . O operador A é invertível se e só se o seu adjunto A^* é invertível e nesse caso tem-se $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.*

Consideremos um operador $L : \mathcal{D}(L) \subseteq E \rightarrow E$, com $\mathcal{D}(L)$ denso em E , injetivo. Definimos em E a norma de índice negativo induzida por L , $\|\cdot\|_{-L}$,

$$\|v\|_{-L} := \sup_{0 \neq \varphi \in \mathcal{D}(L)} \frac{|(v, \varphi)_E|}{\|L\varphi\|_E}, \quad (2.58)$$

$v \in E$.

Apresentamos de seguida um resultado de estabilidade para um operador bijectivo, usando a norma $\|\cdot\|_{-L}$.

Teorema 2.11 *Seja A um operador linear, fechado e bijectivo, definido de $\mathcal{D}(A) \subseteq E$ em E , com $\mathcal{D}(A)$ denso em E , cujo adjunto A^* tem domínio $\mathcal{D}(A^*)$ denso em E . Seja L um operador definido de $\mathcal{D}(L) \subseteq E$ em E , injetivo, tal que $\mathcal{D}(L) = \mathcal{D}(A^*)$. Se existe $C > 0$ tal que*

$$C\|L(A^*)^{-1}w\|_E \leq \|w\|_E \quad \forall w \in E, \quad (2.59)$$

então

$$C\|v\|_E \leq \|Av\|_{-L} \quad \forall v \in \mathcal{D}(A). \quad (2.60)$$

Demonstração: Atendendo a que A é bijectivo tem-se que $\mathcal{D}(A^{-1}) = E$ e logo, pelo Teorema do gráfico fechado ([34]), conclui-se que A^{-1} é limitado. Então, pelo Teorema 2.10, o operador $(A^*)^{-1}$ tem domínio E . Para $v \in \mathcal{D}(A)$ tem-se

$$\begin{aligned} \|Av\|_{-L} &= \sup_{0 \neq \varphi \in \mathcal{D}(L)} \frac{|(Av, \varphi)_E|}{\|L\varphi\|_E} = \sup_{0 \neq w \in E} \frac{|(Av, (A^*)^{-1}w)_E|}{\|L(A^*)^{-1}w\|_E} \\ &\geq C \sup_{0 \neq w \in E} \frac{|(v, w)_E|}{\|w\|_E} \geq C\|v\|_E. \end{aligned}$$

■

No teorema que se segue estabelecemos a equivalência entre a norma de índice negativo $\|\cdot\|_{-L}$ e uma norma que é definida usando o operador adjunto de Hilbert.

Teorema 2.12 *Seja L um operador linear fechado e bijectivo, definido de $\mathcal{D}(L) \subseteq E$ em E , com $\mathcal{D}(L)$ denso em E . Então,*

$$\|v\|_{-L} = \|(L^*)^{-1}v\|_E \quad \forall v \in E. \quad (2.61)$$

Demonstração: Seja $v \in E$. Pela desigualdade de Schwarz temos

$$\frac{|(\varphi, v)_E|}{\|L\varphi\|_E} = \frac{|(L\varphi, (L^*)^{-1}v)_E|}{\|L\varphi\|_E} \leq \|(L^*)^{-1}v\|_E \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(L),$$

e portanto

$$\|v\|_{-L} \leq \|(L^*)^{-1}v\|_E.$$

Tomando $\varphi = L^{-1}(L^*)^{-1}v$, vem

$$\frac{|(\varphi, v)_E|}{\|L\varphi\|_E} = \frac{|(L^{-1}(L^*)^{-1}v, L^*(L^*)^{-1}v)_E|}{\|(LL^{-1}(L^*)^{-1}v)\|_E} = \|(L^*)^{-1}v\|_E,$$

donde concluímos (2.61). ■

Corolário 2.13 *Nas condições dos teoremas 2.11 e 2.12 tem-se*

$$\|v\|_E \leq C\|(L^*)^{-1}Av\|_E \quad \forall v \in \mathcal{D}(A). \quad (2.62)$$

Apresentamos de seguida alguns exemplos de operadores que satisfazem as condições do Teorema 2.12, ou seja, operadores para os quais é possível definir a norma (2.58) e para os quais é válida a equivalência de normas (2.61).

Exemplo 2.14

1. *O operador*

$$L : \{v \in H^1(0, 1) : v(1) = 0\} \rightarrow L^2(0, 1), \quad Lv = v'$$

é bijectivo. O seu dual L^ é definido por*

$$L^* : \{v \in H^1(0, 1) : v(0) = 0\} \rightarrow L^2(0, 1), \quad L^*v = -v'$$

e tem inverso $(L^)^{-1} : L^2(0, 1) \rightarrow \{v \in H^1(0, 1) : v(0) = 0\}$, tal que*

$$((L^*)^{-1}w)(x) = -\int_0^x w(z) dz, \quad x \in (0, 1).$$

2. *O operador*

$$L : \{v \in H^2(0, 1) : v(1) = v'(1) = 0\} \rightarrow L^2(0, 1), \quad Lv = v''$$

é bijectivo. O dual L^ ,*

$$L^* : \{v \in H^2(0, 1) : v(0) = v'(0) = 0\} \rightarrow L^2(0, 1), \quad L^*v = v'',$$

tem inverso $(L^*)^{-1} : L^2(0,1) \rightarrow \{v \in H^2(0,1) : v(0) = v'(0) = 0\}$ definido por

$$((L^*)^{-1}w)(x) = \int_0^x \int_0^t w(z) dz dt, \quad x \in (0,1).$$

3. O operador $L_h : \mathring{W}_h^{2,2} \rightarrow \mathring{L}_h^2$,

$$(L_h v_h)_{j-1/2} = (\delta^2 v_h)_{j-1/2} \quad j = 1, \dots, N, \quad (L_h v_h)_0 = (L_h v_h)_N = 0.$$

é auto-adjunto (isto é, L_h e L_h^* coincidem) e é bijectivo. O seu inverso $L_h^{-1} = (L_h^*)^{-1}$ verifica

$$((L_h^*)^{-1}w_h)_{j-1/2} = \left(\Sigma_h^{(2)} \Sigma_h^{(1)} w_h \right)_{j-1/2} - \frac{1}{R} \left(\Sigma_h^{(2)} \Sigma_h^{(1)} w_h \right)_N x_{j-1/2}, \quad (2.63)$$

$j = 1, \dots, N$, e

$$((L_h^*)^{-1}w_h)_0 = ((L_h^*)^{-1}w_h)_N = 0.$$

Comparando o Corolário 2.13 com o Teorema 2.7 e tendo em conta o Exemplo 2.14(3.), parece natural que se obtenha um resultado de estabilidade para A_h relativamente à norma $\|\cdot\|_{-L_h}$, com $L_h = \delta^2$. O objectivo da subsecção seguinte é estabelecer uma desigualdade para a estabilidade do operador A_h definido por (2.3), no contexto do Teorema 2.11.

2.6 Estabilidade na norma em $W_h^{-2,2}$

Comecemos por provar que para A_h definido por (2.3) vale (2.59), isto é, existe $C > 0$ tal que

$$C \|\delta^2 (A_h^*)^{-1} v_h\|_{L_h^2} \leq \|v_h\|_{L_h^2} \quad \forall v_h \in L_h^2. \quad (2.64)$$

No Teorema 2.16 estabelecemos uma equivalência de normas que nos permite formular a desigualdade anterior de uma forma mais conveniente. Na demonstração desse teorema é fundamental o seguinte lema.

Lema 2.15 *Vale a desigualdade*

$$\|v_h\|_{L_h^2} \leq R \|v_h\|_{W_h^{1,2}} \quad \forall v_h \in \mathring{W}_h^{1,2}.$$

Demonstração Seja $v_h \in \mathring{W}_h^{1,2}$. Atendendo a que se tem

$$\begin{aligned} |v_{j-1/2}|^2 &\leq \left(\sum_{k=0}^{j-1} |v_{k+1/2} - v_{k-1/2}| \right)^2 \\ &= \left(\sum_{k=0}^{j-1} h_{k-1/2} |(\delta v_h)_k| \right)^2 \leq \sum_{k=0}^{j-1} h_{k-1/2} \sum_{k=0}^{j-1} |(\delta v_h)_k|^2, \end{aligned}$$

então

$$(v_h, v_h)_{L_h^2} \leq R^2 \sum_{j=0}^N h_{j-1/2} |(\delta v_h)_j|^2. \quad \blacksquare$$

O lema anterior permite concluir que $|\cdot|_{W_h^{1,2}}$ em $\mathring{W}_h^{1,2}$ é uma norma equivalente à norma $\|\cdot\|_{W_h^{1,2}}$.

Teorema 2.16 As normas $\|\cdot\|_{W_h^{2,2}}$ e $\|\cdot\|_{W_h^{2,2}}$,

$$\|v_h\|_{W_h^{2,2}} := \|\delta^2 v_h\|_{L_h^2} \quad (2.65)$$

são equivalentes em $\mathring{W}_h^{2,2}$.

Demonstração: A desigualdade seguinte é óbvia.

$$\|\delta^2 v_h\|_{L_h^2} \leq \|v_h\|_{W_h^{2,2}} \quad \forall v_h \in \mathring{W}_h^{2,2}.$$

Provemos que existe $C > 0$ tal que

$$\|v_h\|_{W_h^{2,2}} \leq C \|\delta^2 v_h\|_{L_h^2} \quad \forall v_h \in \mathring{W}_h^{2,2}.$$

Atendendo a que se tem sucessivamente

$$\begin{aligned} (-\delta^2 v_h, v_h)_{L_h^2} &= - \sum_{j=1}^N \left(\frac{v_{j+1/2} - v_{j-1/2}}{h_{j-1/2}} - \frac{v_{j-1/2} - v_{j-3/2}}{h_{j-1/2}} \right) \bar{v}_{j-1/2} \\ &= - \sum_{j=1}^{N-1} \frac{v_{j+1/2} - v_{j-1/2}}{h_{j-1/2}} (\bar{v}_{j-1/2} - \bar{v}_{j+1/2}) \\ &\quad + \frac{v_{1/2} - v_{-1/2}}{\frac{h_0}{2}} \bar{v}_{1/2} - \frac{v_{N+1/2} - v_{N-1/2}}{h_{N-1/2}} \bar{v}_{N-1/2} \\ &= \sum_{j=0}^N h_{j-1/2} |(\delta v_h)_j|^2, \end{aligned} \quad (2.66)$$

pelo Lema 2.15, obtém-se

$$|v_h|_{L_h^2} \leq R^2 \frac{|(\delta^2 v_h, v_h)_{L_h^2}|}{\|v_h\|_{L_h^2}} \leq R^2 \|\delta^2 v_h\|_{L_h^2}. \quad (2.67)$$

Novamente de (2.66), vem

$$|v_h|_{W_h^{1,2}}^2 = |(\delta^2 v_h, v_h)_{L_h^2}| \leq \|\delta^2 v_h\|_{L_h^2} \|v_h\|_{L_h^2}$$

e portanto, usando (2.67), obtemos

$$|v_h|_{W_h^{1,2}} \leq R \|\delta^2 v_h\|_{L_h^2}. \quad (2.68)$$

■

Podemos escrever a desigualdade (2.64) da forma equivalente

$$C \|(A_h^*)^{-1} v_h\|_{W_h^{2,2}} \leq \|v_h\|_{L_h^2} \quad \forall v_h \in \mathring{L}_h^2. \quad (2.69)$$

Antes de provarmos (2.69) apresentamos a forma explícita do operador adjunto de A_h .

Consideremos o operador M_h^*

$$(M_h^* v_h)_j := \frac{v_{j+1/2} h_j + v_{j-1/2} h_{j-1}}{2h_{j-1/2}}, \quad j = 1, \dots, N-1,$$

$$(M_h^* v_h)_0 := \frac{v_{1/2}}{2}, \quad (M_h^* v_h)_N := \frac{v_{N-1/2}}{2}.$$

Lema 2.17 *O operador adjunto de A_h , com $\mathcal{D}(A_h) = \mathring{W}_h^{2,2}$, tem domínio $\mathring{W}_h^{2,2}$ é da forma*

$$A_h^* = -\delta^2 + A_h^{(1)*} \quad (2.70)$$

com

$$A_h^{(1)*} v_h := -\delta (\bar{b} M_h^* v_h) + \bar{c} v_h. \quad (2.71)$$

Demonstração: Sejam $v_h, w_h \in \mathring{W}_h$. Somando por partes e tendo em conta que $v_{-1/2} = v_{N+1/2} = 0$, facilmente se obtêm as igualdades

$$\begin{aligned} (-\delta^2 w_h, v_h)_{L_h^2} &= - \sum_{j=1}^{N-1} \frac{w_{j+1/2} - w_{j-1/2}}{h_{j-1/2}} (\bar{v}_{j-1/2} - \bar{v}_{j+1/2}) \\ &\quad + \frac{w_{1/2} - w_{-1/2}}{h_0} \bar{v}_{1/2} - \frac{w_{N+1/2} - w_{N-1/2}}{h_{N-1/2}} \bar{v}_{N-1/2} \\ &= (w_h, -\delta^2 v_h)_{L_h^2} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
(M_h(b\delta w_h), v_h)_{L_h^2} &= h_0 \left(b_0 \frac{\bar{v}_{1/2}}{4h_{-1/2}h_0} - b_1 \frac{\bar{v}_{1/2}h_0 + \bar{v}_{3/2}h_1}{2h_{1/2}h_0} \right) w_{1/2} \\
&+ \sum_{j=2}^{N-1} h_{j-1} \left(b_{j-1} \frac{\bar{v}_{j-1/2}h_{j-1} + \bar{v}_{j-3/2}h_{j-2}}{2h_{j-3/2}h_{j-1}} - b_j \frac{\bar{v}_{j-1/2}h_{j-1} + \bar{v}_{j+1/2}h_j}{2h_{j-1/2}h_{j-1}} \right) w_{j-1/2} \\
&+ h_{N-1} \left(b_{N-1} \frac{\bar{v}_{N-1/2}h_{N-1} + \bar{v}_{N-3/2}h_{N-2}}{2h_{N-3/2}h_{N-1}} - b_N \frac{\bar{v}_{N-1/2}h_{N-1}}{4h_{N-1/2}h_{N-1}} \right) w_{N-1/2} \\
&= (w_h, -\delta(\bar{b}M_h^*v_h))_{L_h^2}.
\end{aligned}$$

■

Os dois lemas seguintes são importantes na demonstração de (2.69).

Lema 2.18 *Seja $A_h^{(1)*} : \mathring{W}_h^{1,2} \rightarrow \mathring{L}_h^2$ o operador definido por (2.71). Então existe $C_l^* > 0$ tal que*

$$\|A_h^{(1)*}v_h\|_{L_h^2} \leq C_l^* \|v_h\|_{W_h^{1,2}} \quad \forall v_h \in \mathring{W}_h^{1,2}. \quad (2.72)$$

Demonstração: Começemos por encontrar uma estimativa para $\|\delta(\bar{b}M_h^*v_h)\|_{L_h^2}^2$. Notemos que

$$\begin{aligned}
\bar{b}_j \frac{v_{j+1/2}h_j + v_{j-1/2}h_{j-1}}{h_{j-1}h_{j-1/2}} &= \bar{b}_j \left(2 \frac{v_{j+1/2}}{h_{j-1}} - (\delta v_h)_j \right), \\
b_{j-1} \frac{v_{j-1/2}h_{j-1} + v_{j-3/2}h_{j-2}}{h_{j-1}h_{j-3/2}} &= \bar{b}_{j-1} \left(2 \frac{v_{j-3/2}}{h_{j-1}} + (\delta v_h)_{j-1} \right), \\
\bar{b}_j \frac{v_{j+1/2}}{h_{j-1}} - \bar{b}_{j-1} \frac{v_{j-3/2}}{h_{j-1}} &= \bar{b}_j \frac{h_{j-1/2}}{h_{j-1}} (\delta v_h)_j + \bar{b}_{j-1} \frac{h_{j-3/2}}{h_{j-1}} (\delta v_h)_{j-1} \\
&\quad + \frac{\bar{b}_j - \bar{b}_{j-1}}{h_{j-1}} v_{j-1/2},
\end{aligned}$$

e portanto

$$\|\delta(\bar{b}M_h^*v_h)\|_{L_h^2}^2 \leq 6\sqrt{2} \|b\|_{L^\infty(0,R)}^2 \|v_h\|_{W_h^{1,2}}^2 + \|b\|_{W^{1,\infty}(0,R)}^2 \|v_h\|_{L_h^2}^2. \quad (2.73)$$

Atendendo a que vale

$$\|\bar{c}v_h\|_{L_h^2}^2 \leq \|c\|_{L^\infty(0,R)} \|v_h\|_{L_h^2}^2,$$

concluimos (2.72) com

$$C_l^* = 6\sqrt{2}\|b\|_{L^\infty(0,R)}^2 + \|b\|_{W^{1,\infty}(0,R)}^2 + \|c\|_{L^\infty(0,R)}.$$

■

Provemos seguidamente a validade de uma estimativa que constitui um passo fundamental na demonstração do resultado central desta secção.

Lema 2.19 *Existem $C > 0$ independente de h e uma subsucessão final Λ' de Λ para os quais o operador A_h^* definido em (2.70) verifica*

$$\|v_h\|_{W_h^{1,2}} \leq C \|A_h^* v_h\|_{L_h^2} \quad \forall v_h \in \mathring{W}_h^{1,2}, \quad (2.74)$$

com $h \in \Lambda'$.

Demonstração: Suponhamos que (2.74) não se verifica. Então existem uma subsucessão $\Lambda''' \subseteq \Lambda$ e $(v_h)_{\Lambda'''} \in \Pi \mathring{W}_h^{1,2}$ tais que

$$\|v_h\|_{W_h^{1,2}} = 1 \text{ e } \|A_h^* v_h\|_{L_h^2} \rightarrow 0 \quad (h \in \Lambda'''). \quad (2.75)$$

Pelo Teorema 2.2, existem $v \in L^2(0, R)$ e $\Lambda'' \subseteq \Lambda'''$ tais que

$$v_h \rightarrow v \text{ em } (L^2(0, R), \Pi \mathring{L}_h^2) \quad (h \in \Lambda'').$$

Sejam $w \in H_0^1(0, R)$ solução do problema variacional

$$(w', z')_{L^2(0,R)} = (\Sigma A^{(1)*} v, z')_{L^2(0,R)} \quad \forall z \in H_0^1(0, R), \quad (2.76)$$

e $(w_h)_\Lambda \in \Pi \mathring{W}_h^{1,2}$ tal que

$$w_h \rightarrow w \text{ em } (H_0^1(0, R), \Pi \mathring{W}_h^{1,2}) \quad (h \in \Lambda).$$

Provemos que $|v_h - w_h|_{W_h^{1,2}} \rightarrow 0$ ($h \in \Lambda''$). Atendendo a que $v_0 = w_0 = 0$ e $v_N = w_N = 0$, vale representação

$$\begin{aligned} |v_h - w_h|_{W_h^{1,2}}^2 &= \sum_{j=0}^N h_{j-1/2} |\delta(v_h - w_h)_j|^2 \\ &= \sum_{j=0}^{N-1} h_j (-\delta^2 v_h + A_h^{(1)*} v_h)_{j+1/2} (\bar{v}_h - \bar{w}_h)_{j+1/2} \\ &\quad - \sum_{j=0}^N h_{j-1/2} (\delta w_h - \Sigma_h^{(1)} A_h^{(1)*} v_h)_j (\delta(\bar{v}_h - \bar{w}_h))_j, \end{aligned}$$

e portanto, tem-se a desigualdade

$$\begin{aligned} |v_h - w_h|_{W_h^{1,2}}^2 &\leq \|A_h^* v_h\|_{L_h^2} \|v_h - w_h\|_{L_h^2} \\ &\quad + |v_h - w_h|_{W_h^{1,2}} \left(\sum_{j=0}^N h_{j-1/2} |(\delta w_h - \Sigma_h^{(1)} A_h^{(1)*} v_h)_j|^2 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Logo, pelo Lema 2.15, obtemos

$$|v_h - w_h|_{W_h^{1,2}} \leq \sqrt{R} \|A_h^* v_h\|_{L_h^2} + \left(\sum_{j=0}^N h_{j-1/2} |(\delta w_h - \Sigma_h^{(1)} A_h^{(1)*} v_h)_j|^2 \right)^{1/2}.$$

Mas, por hipótese $\|A_h^* v_h\|_{L_h^2} \rightarrow 0$ ($h \in \Lambda''$). Provemos então que

$$\sum_{j=0}^N h_{j-1/2} |(\delta w_h - \Sigma_h^{(1)} A_h^{(1)*} v_h)_j|^2 \rightarrow 0. \quad (2.77)$$

A convergência anterior é consequência da estabilidade de $\Sigma_h^{(1)} A_h^{(1)*}$ e da sua consistência com $\Sigma^{(1)} A^{(1)*}$, em $(L^2(0, R), \Pi \overset{\circ}{L}_h^2)$ (Teorema C.1). De facto, atendendo a que se tem

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^N h_{j-1/2} |(\bar{b} M_h^* v_h)_j|^2 &= \sum_{j=1}^{N-1} h_{j-1/2} |\bar{b}_j \frac{v_{j+1/2} h_j + v_{j-1/2} h_{j-1}}{2 h_{j-1/2}}|^2 \\ &\quad + \frac{h_0}{2} |\bar{b}_0 \frac{v_{1/2}}{2}|^2 + h_{N+1/2} |\bar{b}_N \frac{v_{N+1/2}}{2}|^2 \\ &\leq 2 \|\bar{b}\|_{L^\infty(0, R)} \|v_h\|_{L_h^2}^2 \end{aligned}$$

e

$$\sum_{j=0}^N h_{j-1/2} \left| \sum_{k=1}^j h_{k-1} (\bar{c} v_h)_{k-1/2} \right|^2 \leq R^2 \|\bar{c} v_h\|_{L_h^2}^2, \quad (2.78)$$

obtemos a estabilidade pretendida. Verifiquemos agora a consistência. Para $\varphi \in C^\infty[0, R]$ tem-se

$$|(\bar{b} M_h^* \varphi - \bar{b} \varphi)_j| \leq |b_j| \left(\frac{h_{j-1}}{2} \|\varphi'\|_{L^\infty(x_{j-1/2}, x_j)} + \frac{h_j}{2} \|\varphi'\|_{L^\infty(x_j, x_{j+1/2})} \right),$$

e

$$\left| \sum_{k=1}^j h_{k-1} (\bar{c} \varphi)_{k-1/2} - \int_0^{x_j} (\bar{c} \varphi)(x) dx \right| \rightarrow 0 \quad (h \in \Lambda).$$

Portanto, $\Sigma_h^{(1)} A_h^{(1)*} v_h \rightarrow \Sigma A^{(1)*} v$ em $(L^2(0, R), \Pi \overset{\circ}{L}_h^2)$. Atendendo a que $w_h \rightarrow w$ em $(H_0^1(0, R), \Pi \overset{\circ}{W}_h^{1,2})$ ($h \in \Lambda$), por (2.76) resulta (2.77) e logo $|v_h - w_h|_{W_h^{1,2}} \rightarrow 0$. Daqui concluímos que

$$v_h \rightarrow w \text{ em } (H_0^1(0, R), \Pi \overset{\circ}{W}_h^{1,2}) \quad (h \in \Lambda')$$

e que $v = w$. Logo v é solução do problema (2.76). Assim, tem-se que $v \in H^2(0, R)$ e

$$(-v'' + A^{(1)*} v, z) = 0 \quad \forall z \in H_0^1(0, R).$$

Finalmente, atendendo a que o operador A é injectivo, tem-se que $v = 0$, o que conduz à contradição desejada pois $\|v_h\|_{W_h^{1,2}} = 1$. ■

A estimativa (2.69) pretendida é consequência do lema seguinte.

Lema 2.20 *Existem $C > 0$ independente de h e uma subsucessão final Λ' de Λ tais que*

$$\|v_h\|_{W_h^{2,2}} \leq C \|A_h^* v_h\|_{L_h^2} \quad \forall v_h \in \overset{\circ}{W}_h^{2,2}, \quad (2.79)$$

com $h \in \Lambda'$.

Demonstração: Sejam $v_h \in \overset{\circ}{W}_h^{2,2}$ e $f_h^* := A_h^* v_h \in \overset{\circ}{L}_h^2$. Então v_h é também solução de $-\delta^2 v_h = \tilde{f}_h := f_h^* - A_h^{(1)*} v_h$. Como, pelo Lema 2.18, o operador $A_h^{(1)*} : \overset{\circ}{W}_h^{1,2} \rightarrow \overset{\circ}{L}_h^2$ é limitado, então existe uma constante $C_l > 0$ tal que

$$\sup_{0 \neq v_h \in \overset{\circ}{W}_h^{1,2}} \frac{\|A_h^{(1)*} v_h\|_{L_h^2}}{\|v_h\|_{W_h^{1,2}}} \leq C_l,$$

e portanto

$$\begin{aligned} \|\tilde{f}_h\|_{L_h^2} &\leq \|f_h^*\|_{L_h^2} + \|A_h^{(1)*} v_h\|_{L_h^2} \\ &\leq \|f_h^*\|_{L_h^2} + C_l \|v_h\|_{W_h^{1,2}}. \end{aligned}$$

Mas, pelo Teorema 2.16, existe $C' > 0$ tal que

$$\|v_h\|_{W_h^{2,2}} \leq C' \|\tilde{f}_h\|_{L_h^2} \leq C' \|A_h^* v_h\|_{L_h^2} + C' C_l \|v_h\|_{W_h^{1,2}},$$

e finalmente, pelo Lema 2.19, concluímos a demonstração. ■

Teorema 2.21 *Existem $C > 0$ independente de h e uma subsucessão final Λ' de Λ que verificam a desigualdade*

$$\|\delta^2(A_h^*)^{-1}w_h\|_{L_h^2} \leq C\|w_h\|_{L_h^2} \quad \forall w_h \in \mathring{L}_h^2. \quad (2.80)$$

Demonstração: Atendendo a que vale (2.79), obtém-se

$$\|(A_h^*)^{-1}w_h\|_{W_h^{2,2}} \leq C\|w_h\|_{L_h^2} \quad \forall w_h \in \mathring{L}_h^2,$$

e (2.80) conclui-se de imediato. ■

Pelos teoremas 2.11 e 2.21, obtemos o resultado de estabilidade para A_h .

Teorema 2.22 *Existem $C > 0$ independente de h e uma subsucessão final Λ' de Λ tais que*

$$\|v_h\|_{L_h^2} \leq C \sup_{0 \neq \varphi_h \in \mathring{W}_h^{2,2}} \frac{|(A_h v_h, \varphi_h)_{L_h^2}|}{\|\delta^2 \varphi_h\|_{L_h^2}} \quad \forall v_h \in \mathring{W}_h^{2,2}, \quad (2.81)$$

com $h \in \Lambda'$.

Usando o Teorema 2.12 podemos escrever uma desigualdade para a estabilidade equivalente à anterior usando normas do tipo das normas de Spijker.

Corolário 2.23 *Seja L_h^* , $h \in \Lambda$, definido por (2.63). Existem $C > 0$ independente de h e uma subsucessão final Λ' de Λ tais que*

$$\|v_h\|_{L_h^2} \leq C\|(L_h^*)^{-1}(A_h(v_h))\|_{L_h^2} \quad \forall v_h \in \mathring{W}_h^{2,2}.$$

Conjugando o corolário anterior com a estimativa para

$$\Sigma_h^{(2)} \Sigma_h^{(1)} A_h(R_h u - u_h)$$

obtida na Secção 2.4, podemos deduzir uma estimativa para o erro $R_h u - u_h$ análoga à apresentada no Teorema 2.8. No entanto, o Teorema 2.22 pode ser usado directamente na obtenção de uma estimativa para o erro sendo esta abordagem generalizável à discretização de problemas definidos em domínios $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.

Consideremos o problema diferencial

$$Au := -(au')' + bu' + cu = f \quad \text{em } (0, R) \subset \mathbb{R} \quad (2.82)$$

com condições de fronteira de Dirichlet (2.2), que é mais geral que o problema (2.1)–(2.2), e o método de diferenças finitas

$$A_h u_h := -\delta(a\delta u_h) + M_h(b\delta u_h) + R_h(cu_h) = M_h R_{G_h} f \quad \text{em } \mathbb{I}_h, \quad (2.83)$$

com as condições de fronteira (2.4), em que

$$(M_h w_h)_{j-1/2} := \frac{w_{j-1} + w_j}{2}, \quad j = 1, \dots, N.$$

Note-se que na definição anterior de $M_h w_h$, não existe uma expressão particular para os pontos $x_{1/2}$ e $x_{N-1/2}$, ao contrário da definição de $M_h w_h$ da Secção 2.1.

Se admitirmos que as funções coeficiente do operador A são suficientemente regulares ($a \in H^3(0, R)$, $b \in H^1(0, R)$ e $c \in H^2(0, R)$) e, em relação ao termo independente, assumirmos que $f \in C[0, R]$, então vale o seguinte teorema de convergência.

Teorema 2.24 *Suponhamos que o problema (2.82)–(2.2) tem uma única solução $u \in H^4(0, R)$. Seja u_h a solução de (2.83)–(2.4). Então, para $h \in \Lambda$, com h_{max} suficientemente pequeno, tem-se*

$$\|R_h u - u_h\|_{L_h^2} \leq C h_{max}^2 \|u\|_{H^4(0, R)}, \quad (2.84)$$

com C independente de h .

A estimativa (2.84) obtém-se de (2.81), substituindo v_h por $R_h u - u_h$. Omitimos a sua demonstração pois é análoga à do Teorema 3.20, que apresentamos no capítulo seguinte.

2.7 Resultados numéricos

Com o objectivo de ilustrar o resultado de convergência apresentamos um exemplo de aplicação do método (2.83)–(2.4).

As figuras 2.1 e 2.2 correspondem a resultados relativos aos problemas (1.47) e (1.50), respectivamente, formulados no Capítulo 1. Tal como anteriormente, consideramos o comportamento da solução numérica em 500 malhas geradas aleatoriamente, com o número de pontos entre 500 e 3000. As linhas das figuras correspondem às rectas dos mínimos quadrados e têm declives 2.0755 e 2.0702, respectivamente, para os problemas (1.47) e (1.50), o que confirma a estimativa do Teorema 2.24.

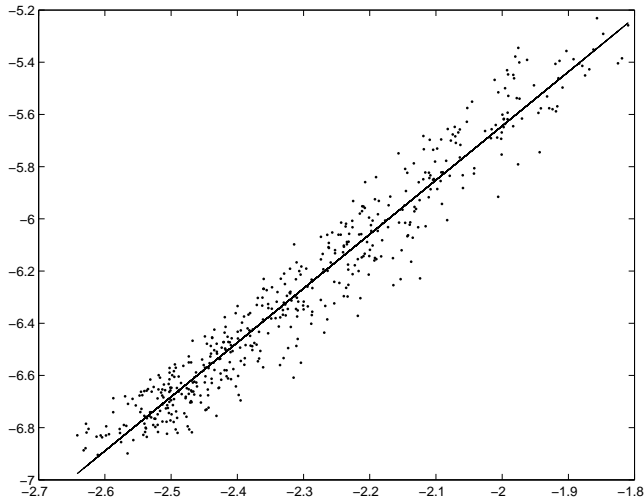


Figura 2.1: Problema (1.47): $\log(\|R_h u - u_h\|_{L_h^2})$ versus $\log(h_{max})$.

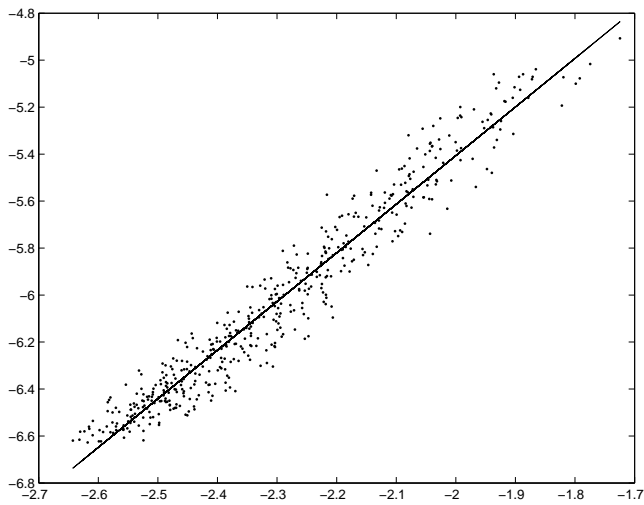


Figura 2.2: Problema (1.50): $\log(\|R_h u - u_h\|_{L_h^2})$ versus $\log(h_{max})$.

Capítulo 3

Método de diferenças finitas centradas nas células e norma em $W_H^{-2,2}$

Neste capítulo estendemos o resultado de supraconvergência, apresentado no capítulo anterior, à discretização de uma equação diferencial de segunda ordem, com condição de fronteira de Dirichlet, num domínio bidimensional, por um método de diferenças finitas centradas nas células, em malhas não uniformes. A demonstração da estabilidade a partir de uma versão discreta da norma $\|\cdot\|_{-2}$ revela-se fundamental na dedução da convergência quadrática da solução de diferenças finitas. Terminamos o capítulo com a apresentação de alguns resultados numéricos que ilustram as estimativas supraconvergentes.

O estudo do método de diferenças finitas centradas nas células para o caso bidimensional, foi considerado, por exemplo, por Forsyth e Sammon, em [31], e também por Weiser e Wheeler, em [74]. No entanto, nesses trabalhos os operadores elípticos que definem os problemas são menos gerais do que os que aqui consideramos sendo o tipo de abordagem específica para esses operadores.

3.1 Introdução

Consideremos o problema diferencial elíptico, de segunda ordem, com condição de fronteira de Dirichlet,

$$Au := -(au_x)_x - (cu_y)_y + du_x + eu_y + fu = g \quad \text{em } \Omega, \quad (3.1)$$

$$u = \psi \quad \text{em } \partial\Omega, \quad (3.2)$$

em que Ω é uma união de rectângulos. Assumimos que as funções coeficiente satisfazem $a(x, y) \geq \underline{a} > 0$, $c(x, y) \geq \underline{c} > 0$, $\forall(x, y) \in \Omega$, $a, c \in W^{3,\infty}(\Omega)$, $d, e, f \in W^{2,\infty}(\Omega)$.

Definimos seguidamente uma discretização do problema (3.1)–(3.2) por diferenças finitas centradas na célula. Para o efeito introduzimos, em primeiro lugar, uma malha não uniforme G_H . Sejam R um rectângulo que contém Ω , $G_H := R_1 \times R_2$, em que

$$R_1 := \{x_{-1} < x_0 < \dots < x_N < x_{N+1}\},$$

e

$$R_2 := \{y_{-1} < y_0 < \dots < y_M < y_{M+1}\},$$

com $(x_{-1}, x_{N+1}) \times (y_{-1}, y_{M+1}) = R$.

Pretendemos obter aproximações da solução do problema (3.1)–(3.2), nos pontos médios de cada célula contida em Ω . Assim, do conjunto C_H formado pelos pontos que são os centros dos rectângulos formados pela malha G_H ,

$$C_H := \{(x_{j-1/2}, y_{\ell-1/2}) : j = 0, \dots, N+1, \ell = 0, \dots, M+1\},$$

estamos particularmente interessados no subconjunto Ω_H formado pelos pontos de C_H que também pertencem a Ω , $\Omega_H := C_H \cap \Omega$. Consideramos ainda os pontos que estão na fronteira $\partial\Omega$, $\partial\Omega_H := C_H \cap \partial\Omega$, e definimos $\bar{\Omega}_H := \Omega_H \cup \partial\Omega_H$. Assumimos que malha G_H verifica a seguinte restrição: a intersecção de $\partial\Omega$ com qualquer rectângulo $(x_{j-1/2}, x_{j+1/2}) \times (y_{\ell-1/2}, y_{\ell+1/2})$, $j \in \{0, \dots, N\}$, $\ell \in \{0, \dots, M\}$, é vazia.

A Figura 3.1 ilustra os conjuntos definidos.

No caso em que Ω é um rectângulo admitimos, em analogia com o caso unidimensional, a possibilidade de construção de malhas em que $x_{-1} = x_0$, $x_{N+1} = x_N$, $y_{-1} = y_0$ e $y_{M+1} = y_M$.

Denotamos por R_H e R_{G_H} os operadores de restrição a $\bar{\Omega}_H$ e $G_H \cap \Omega$, respectivamente. Relativamente aos espaçamentos das malhas, mantemos notação até aqui usada.

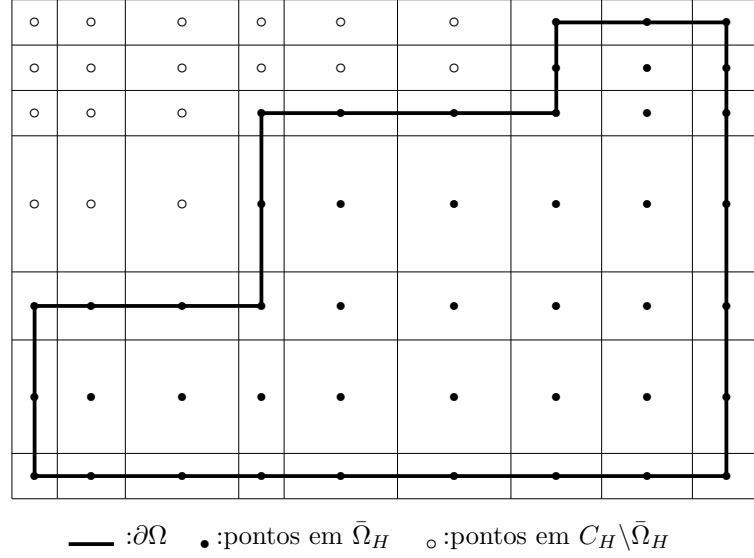


Figura 3.1: Domínio.

Consideramos os operadores de diferenças centradas δ_x e δ_y , que correspondem aos operadores de diferenças centradas relativas às variáveis x e y , respectivamente, análogos aos definidos no Capítulo 2.

Seja u_H a solução do método de diferenças finitas

$$A_H u_H = M_H R_{G_H} g \quad \text{em } \Omega_H, \quad (3.3)$$

$$u_H = R_H \psi \quad \text{em } \partial\Omega_H, \quad (3.4)$$

onde A_H é o operador de diferenças

$$A_H u_H := -\delta_x(a\delta_x u_H) - \delta_y(c\delta_y u_H) + M_x(d\delta_x u_H) + M_y(e\delta_y u_H) + f u_H \quad \text{em } \Omega_H, \quad (3.5)$$

com

$$\begin{aligned} (M_x w_H)_{j-1/2, \ell-1/2} &:= \frac{w_{j-1, \ell-1/2} + w_{j, \ell-1/2}}{2}, \\ (M_y w_H)_{j-1/2, \ell-1/2} &:= \frac{w_{j-1/2, \ell-1} + w_{j-1/2, \ell}}{2}, \\ (M_H w_H)_{j-1/2, \ell-1/2} &:= \frac{w_{j-1, \ell-1} + w_{j-1, \ell} + w_{j, \ell-1} + w_{j, \ell}}{4}, \end{aligned}$$

$(x_{j-1/2}, y_{\ell-1/2}) \in \Omega_H$. Em $\partial\Omega_H$ consideramos estes operadores nulos.

A obtenção de estimativas para o erro, $u_H - R_H u$, é consequência de um resultado de estabilidade que generaliza o Teorema 2.22 ao caso bidimensional. Os teoremas de compacidade discreta e os argumentos da Teoria da Convergência Discreta que estabelecemos na próxima subsecção, são fundamentais na demonstração da desigualdade de estabilidade.

3.2 Aproximação discreta de $W_0^{m,2}(\Omega)$

Introduzimos, seguidamente, os espaços das funções de rede que são versões discretas dos espaços de Sobolev $W_0^{m,2}(\Omega)$. Com o objectivo de facilitar a aplicação de técnicas como a "soma por partes", definimos as normas nesses espaços considerando prolongamentos nulos a C_H das funções de rede definidas em $\tilde{\Omega}_H$.

Sejam $\tilde{W}_H^{m,2}(R)$, $m = 0, 1, 2$, os espaços de funções de rede definidas em C_H , nulas em

$$\{(x_{j-1/2}, y_{\ell-1/2}) : j = 0, N+1, \ell = 0, \dots, M+1 \vee j = 1, \dots, N, \ell = 0, M+1\},$$

onde consideramos as normas

$$\|v_H\|_{W_H^{m,2}(R)} := \left(\sum_{r=0}^m |v_H|_{r,H}^2 \right)^{1/2},$$

com

$$\begin{aligned} |v_H|_{0,H}^2 &:= \sum_{j=1}^N \sum_{\ell=1}^M h_{j-1} k_{\ell-1} |v_{j-1/2, \ell-1/2}|^2, \\ |v_H|_{1,H}^2 &:= \sum_{j=0}^N \sum_{\ell=1}^M h_{j-1/2} k_{\ell-1} |(\delta_x v_H)_{j, \ell-1/2}|^2 \\ &\quad + \sum_{j=1}^N \sum_{\ell=0}^M h_{j-1} k_{\ell-1/2} |(\delta_y v_H)_{j-1/2, \ell}|^2, \\ |v_H|_{2,H}^2 &:= \sum_{j=1}^N \sum_{\ell=1}^M h_{j-1} k_{\ell-1} (|(\delta_x^2 v_H)_{j-1/2, \ell-1/2}|^2 + |(\delta_y^2 v_H)_{j-1/2, \ell-1/2}|^2) \\ &\quad + 2 \sum_{j=0}^N \sum_{\ell=0}^M h_{j-1/2} k_{\ell-1/2} |(\delta_{xy} v_H)_{j, \ell}|^2, \end{aligned} \tag{3.6}$$

em que δ_{xy} é o operador definido por

$$(\delta_{xy}v_H)_{j,\ell} := \frac{(\delta_x v_H)_{j,\ell+1/2} - (\delta_x v_H)_{j,\ell-1/2}}{k_{\ell-1/2}}.$$

Note-se que vale a representação

$$(\delta_{xy}v_H)_{j,\ell} = \frac{(\delta_y v_H)_{j+1/2,\ell} - (\delta_y v_H)_{j-1/2,\ell}}{h_{j-1/2}}.$$

Seja P_{C_H} o operador que define o seguinte prolongamento da função de rede v_H definida em $\bar{\Omega}_H$ à malha C_H ,

$$P_{C_H}v_H := v_H \quad \text{em } \bar{\Omega}_H, \quad P_{C_H}v_H := 0 \quad \text{em } C_H \setminus \bar{\Omega}_H.$$

Denotamos por $\mathring{W}_H^{m,2}(\Omega)$, $m = 0, 1, 2$, o espaço das funções definidas em $\bar{\Omega}_H$, nulas em $\partial\Omega_H$, com norma

$$\|v_H\|_{m,H} := \left(\sum_{r=0}^m |P_{C_H}v_H|_{r,H}^2 \right)^{1/2}, \quad m = 0, 1, 2.$$

Por vezes, quando for claro pelo contexto que nos referimos ao prolongamento, omitiremos a escrita de P_{C_H} . Para o espaço $\mathring{W}_H^{0,2}(\Omega)$ usaremos também a notação $\mathring{L}_H^2(\Omega)$ e neste espaço consideramos o produto interno

$$(v_H, w_H)_H := \sum_{j=1}^N \sum_{\ell=1}^M h_{j-1} k_{\ell-1} (P_{C_H}v_H)_{j-1/2,\ell-1/2} (P_{C_H}w_H)_{j-1/2,\ell-1/2}. \quad (3.7)$$

Os resultados de compacidade que apresentamos seguidamente são estabelecidos no contexto das funções de rede nulas na fronteira e estendem os do capítulo anterior ao caso bidimensional.

Sejam $(v_H)_\Lambda \in \Pi \mathring{L}_H^2(\Omega)$ e $v \in L^2(\Omega)$. Dizemos que

$$v_H \rightarrow v \quad \text{em } (L^2(\Omega), \Pi \mathring{L}_H^2(\Omega)) \quad (H \in \Lambda), \quad (3.8)$$

se, para cada $\epsilon > 0$, existe $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ tal que

$$\|v - \varphi\|_{L^2(\Omega)} \leq \epsilon, \quad \lim_{H_{max} \rightarrow 0} \sup\{\|v_H - R_H\varphi\|_{0,H}\} \leq \epsilon. \quad (3.9)$$

Sejam $(v_H)_\Lambda \in \Pi \mathring{W}_H^{1,2}(\Omega)$ e $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Dizemos que

$$v_H \rightarrow v \quad \text{em } (W_0^{1,2}(\Omega), \Pi \mathring{W}_H^{1,2}(\Omega)) \quad (H \in \Lambda), \quad (3.10)$$

se, para cada $\epsilon > 0$, existe $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ tal que

$$\|v - \varphi\|_{W^{1,2}(\Omega)} \leq \epsilon, \quad \lim_{H_{max} \rightarrow 0} \sup\{\|v_H - R_H \varphi\|_{1,H}\} \leq \epsilon. \quad (3.11)$$

Note-se que, nas convergências discretas anteriores, poderíamos ter substituído $C_0^\infty(\Omega)$ por outro qualquer espaço desde que denso em $L^2(\Omega)$ e $W_0^{1,2}(\Omega)$.

Para além dos conceitos anteriores, é também relevante ao estudo que apresentamos o conceito de convergência discreta fraca de sucessões funcionais lineares que concretizamos seguidamente. Sejam $(L^2(\Omega))'$ e $(\mathring{L}_H^2(\Omega))'$, respectivamente, os espaços duais de $L^2(\Omega)$ e $\mathring{L}_H^2(\Omega)$. A sucessão de funcionais lineares $(l_H)_\Lambda$ converge fracamente para l , e denotamos por

$$l_H \rightharpoonup l, \quad (3.12)$$

se, para $v \in L^2(\Omega)$ e $(v_H)_\Lambda \in \Pi \mathring{L}_H^2(\Omega)$ tais que $v_H \rightarrow v$ em $(L^2(\Omega), \Pi \mathring{L}_H^2(\Omega))$ ($H \in \Lambda$), se tem

$$l_H(v_H) \rightarrow l(v) \quad (H \in \Lambda).$$

Atendendo a que os espaços envolvidos na aproximação discreta $(L^2(\Omega), \Pi \mathring{L}_H^2(\Omega))$ são espaços de Hilbert, este conceito de convergência discreta fraca de funcionais lineares é equivalente à convergência discreta fraca de sucessões de funções de rede. Dizemos que $(v_H)_\Lambda$ converge fracamente para v e escrevemos

$$v_H \rightharpoonup v \text{ em } (L^2(\Omega), \Pi \mathring{L}_H^2(\Omega)) \quad (H \in \Lambda),$$

se, para $w \in L^2(\Omega)$ e $(w_H)_\Lambda \in \Pi \mathring{L}_H^2(\Omega)$, tais que $w_H \rightarrow w$ em $(L^2(\Omega), \Pi \mathring{L}_H^2(\Omega))$ ($H \in \Lambda$), se tem

$$(w_H, v_H)_H \rightarrow (w, v)_0 \quad (H \in \Lambda).$$

Uma definição análoga a (3.12) é considerada para funcionais lineares em $(W_0^{1,2}(\Omega))'$ e $(\mathring{W}_H^{1,2}(\Omega))'$ que são, respectivamente, os espaços duais de $W_0^{1,2}(\Omega)$ e $\mathring{W}_H^{1,2}(\Omega)$.

Apresentamos seguidamente uma condição suficiente para a compacidade discreta.

Teorema 3.1 *Seja $(v_H)_\Lambda$ uma sucessão em $\Pi \mathring{L}_H^2(\Omega)$ limitada. Então existem uma subsucessão Λ' de Λ e $v \in L^2(\Omega)$, tais que*

$$v_H \rightharpoonup v \text{ em } (L^2(\Omega), \Pi \mathring{L}_H^2(\Omega)) \quad (H \in \Lambda').$$

O teorema anterior foi demonstrado por Stummel em [67, Secção 2.3, Teorema 1].

O resultado de compacidade discreta, que apresentamos de seguida, constitui um argumento fundamental no estudo da estabilidade do método. No caso unidimensional, a obtenção do resultado de compacidade discreta foi feito recorrendo ao correspondente resultado no caso contínuo. Para isso consideraram-se funções definidas em todo o domínio que nos pontos da malha espacial coincidem com as funções de rede. A prova baseia-se no facto de as sucessões de funções contínuas assim definidas serem limitadas, se as correspondentes sucessões de funções de rede o forem. No caso bidimensional, não nos foi possível encontrar prolongamentos contínuos das funções de rede com a propriedade mencionada. De qualquer forma, a prova do resultado é aqui conseguida usando o Teorema de Compacidade de Kolmogorov e os passos fundamentais seguem de perto os da demonstração para o caso contínuo ([1], [77]). Na demonstração do resultado de compacidade discreta usamos o lema seguinte.

Lema 3.2 *Seja $(v_H)_\Lambda$ uma sucessão em $\Pi \overset{\circ}{W}_H^{1,2}(\Omega)$ limitada. Considere-se a função escada w_H ,*

$$w_H(x, y) := v_{j+1/2, \ell+1/2}, \quad (x, y) \in (x_j, x_{j+1}) \times (y_\ell, y_{\ell+1}) \subset \Omega,$$

nula em $\mathbb{R}^2 \setminus \Omega$. Seja Q um conjunto que contém Ω . Então, para todo $\tau = (\tau_1, \tau_2) \in \mathbb{R}^2$ tem-se

$$\int_Q |w_H(x + \tau_1, y + \tau_2) - w_H(x, y)|^2 dx dy \leq 6(|\tau_1| + |\tau_2| + h_{max} + k_{max})^2 |v_H|_{1,H}^2. \quad (3.13)$$

Demonstração: Para cada $\tau = (\tau_1, \tau_2) \in \mathbb{R}^2$ tem-se

$$\begin{aligned} & \int_Q |w_H(x + \tau_1, y + \tau_2) - w_H(x, y)|^2 dx dy \\ & \leq 2 \int_Q |w_H(x + \tau_1, y + \tau_2) - w_H(x, y + \tau_2)|^2 dx dy \\ & \quad + 2 \int_Q |w_H(x, y + \tau_2) - w_H(x, y)|^2 dx dy. \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned} & \int_Q |w_H(x + \tau_1, y + \tau_2) - w_H(x, y + \tau_2)|^2 dx dy \\ & \leq \sum_{\ell=1}^M k_{\ell-1} \int_{x_0 - \tau_1}^{x_{N+\tau_1}} |w_H(x + \tau_1, y_{\ell-1/2}) - w_H(x, y_{\ell-1/2})|^2 dx, \end{aligned}$$

pelo Lema 2.1, obtém-se

$$\begin{aligned} & \int_Q |w_H(x + \tau_1, y + \tau_2) - w_H(x, y + \tau_2)|^2 dx dy \\ & \leq 3(|\tau_1| + h_{max})^2 \sum_{\ell=1}^M k_{\ell-1} \sum_{j=0}^N h_{j-1/2} |(\delta_x(P_{C_H} v_H))_{j,\ell-1/2}|^2 \\ & \leq 3(|\tau_1| + h_{max})^2 |v_H|_{1,H}^2. \end{aligned}$$

Analogamente, vem

$$\int_Q |w_H(x, y + \tau_2) - w_H(x, y)|^2 dx dy \leq 3(|\tau_2| + k_{max})^2 |v_H|_{1,H}^2.$$

Assim, conclui-se que

$$\begin{aligned} & \int_Q |w_H(x + \tau_1, y + \tau_2) - w_H(x, y)|^2 dx dy \\ & \leq 6 \left[(|\tau_1| + h_{max})^2 + (|\tau_2| + k_{max})^2 \right] |v_H|_{1,H}^2. \end{aligned}$$

■

Teorema 3.3 *A sucessão de mergulhos $(J_H)_\Lambda$,*

$$J_H : \overset{\circ}{W}_H^{1,2}(\Omega) \rightarrow \overset{\circ}{L}_H^2(\Omega) \quad (H \in \Lambda), \quad (3.14)$$

é discretamente compacta.

Demonstração: Seja $(v_H)_\Lambda$ uma sucessão em $\Pi \overset{\circ}{W}_H^{1,2}(\Omega)$ limitada. Então existe M independente de H tal que

$$\|v_H\|_{1,H} \leq M.$$

Para $(w_H)_\Lambda$ definida no lema anterior vale

$$\int_\Omega |w_H(x + \eta_1, y + \eta_2) - w_H(x, y)|^2 dx dy \leq 4(|\tau_1| + |\tau_2| + h_{max} + k_{max})^2 M^2.$$

Atendendo a que sucessão $(w_H)_\Lambda$ é uniformemente limitada em $\Pi L^2(\Omega)$, uma vez que

$$\|w_H\|_{L^2(\Omega)} = |v_H|_{0,H} \leq M,$$

então, pelo Teorema de Compacidade de Kolmogorov, concluímos que a sucessão $(w_H)_\Lambda$ é relativamente compacta em $L^2(\Omega)$. Logo, para uma sucessão $\Lambda' \subseteq \Lambda$ e $w \in L^2(\Omega)$, tem-se

$$w_H \rightarrow w \text{ em } L^2(\Omega) \quad (H \in \Lambda').$$

Provemos que

$$v_H \rightarrow w \text{ em } (L^2(\Omega), \Pi \overset{\circ}{L}_H^2) \quad (H \in \Lambda').$$

Seja $\epsilon > 0$. Então existe $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ tal que

$$\|w - \varphi\|_{L^2(\Omega)} \leq \epsilon.$$

Considerando a função escada ψ_H definida por

$$\psi_H(x, y) := \varphi(x_{j+1/2}, y_{\ell+1/2}), \quad (x, y) \in (x_j, x_{j+1}) \times (y_\ell, y_{\ell+1}) \subset \Omega,$$

nula fora desses conjuntos, temos

$$\|\psi_H - \varphi\|_{L^2(\Omega)} \rightarrow 0 \quad (H \in \Lambda)$$

e portanto

$$\|v_H - R_H \varphi\|_{0,H} = \|w_H - \psi_H\|_{L^2(\Omega)} \rightarrow \|w - \varphi\|_{L^2(\Omega)}.$$

■

O lema seguinte acrescenta informação acerca dos mergulhos estabelecidos no teorema anterior. O resultado correspondente para espaços de funções contínuas é bem conhecido e encontra-se por exemplo em [2, Teorema 3.12].

Lema 3.4 *Se $(v_H)_\Lambda \in \Pi \overset{\circ}{W}_H^{1,2}(\Omega)$ é limitada e converge fracamente para v em $(L^2(\Omega), \Pi \overset{\circ}{L}_H^2(\Omega))$ então $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$.*

Demonstração: Seja $(v_H)_\Lambda$ uma sucessão em $\Pi \overset{\circ}{W}_H^{1,2}(\Omega)$, limitada, tal que

$$v_H \rightharpoonup v \text{ em } (L^2(\Omega), \Pi \overset{\circ}{L}_H^2(\Omega)) \quad (H \in \Lambda). \quad (3.15)$$

Consideremos a sucessão $(w_H)_\Lambda$ definida no Lema 3.2. Na demonstração do teorema anterior, verificamos que $(w_H)_\Lambda$ tem limite $w \in L^2(\Omega)$, para alguma sub-sucessão $\Lambda' \subseteq \Lambda$. Consideremos a sucessão $(\tilde{w}_H)_{\Lambda'}$ definida por

$$\tilde{w}_H := w_H \text{ em } \Omega, \quad \tilde{w}_H := 0 \text{ em } \mathbb{R}^2 \setminus \Omega,$$

e o prolongamento a \mathbb{R}^2 da função w

$$\tilde{w} := w \text{ em } \Omega, \quad \tilde{w} := 0 \text{ em } \mathbb{R}^2 \setminus \Omega.$$

Note-se que $\tilde{w}_H \rightarrow \tilde{w}$ em $L^2(\mathbb{R}^2)$ ($H \in \Lambda'$). Para $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ e para todo $\eta = (\eta_1, \eta_2) \in \mathbb{R}^2$, $\eta \neq 0$, tem-se

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^2} |(\tilde{w}_H(x + \eta_1, y + \eta_2) - \tilde{w}_H(x, y))\varphi(x, y)| \, dx dy \\ & \leq \left(\int_{\mathbb{R}^2} |\tilde{w}_H(x + \eta_1, y + \eta_2) - \tilde{w}_H(x, y)|^2 \, dx dy \right)^{1/2} \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \end{aligned}$$

Atendendo a (3.13), resulta

$$\int_{\mathbb{R}^2} |(\tilde{w}_H(x + \eta_1, y + \eta_2) - \tilde{w}_H(x, y))\varphi(x, y)| dx dy \leq C(|\eta| + H_{max})\|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}.$$

Tomando na desigualdade anterior o limite quando $H_{max} \rightarrow 0$, vem

$$\int_{\mathbb{R}^2} |(\tilde{w}_H(x + \eta_1, y + \eta_2) - \tilde{w}_H(x, y))\varphi(x, y)| dx dy \leq C|\eta|\|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^2)},$$

e portanto

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{|\varphi(x - \eta_1, y - \eta_2) - \varphi(x, y)|}{|\eta|} |\tilde{w}(x, y)| dx dy \leq C\|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}.$$

Considerando $\eta = \varepsilon(1, 0)$ e tomando o limite $\varepsilon \rightarrow 0$, concluímos que

$$\int_{\mathbb{R}^2} |\varphi_x(x, y)\tilde{w}(x, y)| dx dy \leq C\|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^2)},$$

para todo $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$. De forma análoga, considerando $\eta = \varepsilon(0, 1)$, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^2} |\varphi_y(x, y)\tilde{w}(x, y)| dx dy \leq C\|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^2)},$$

para todo $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$. Logo, $\tilde{w} \in W^{1,2}(\mathbb{R}^2)$. Atendendo a que w é a restrição de \tilde{w} a Ω e $\tilde{w} = 0$ em $\mathbb{R}^2 \setminus \Omega$, então $w \in W_0^{1,2}(\Omega)$.

Provemos finalmente que $v = w$. Sejam $r \in L^2(\Omega)$ e $(r_H)_\Lambda \in \Pi \mathring{L}_H^2(\Omega)$, tais que $r_H \rightarrow r$ em $(L^2(\Omega), \Pi \mathring{L}_H^2(\Omega))$ ($H \in \Lambda$), e a função escada

$$s_H(x, y) := r_H(x_{j+1/2}, y_{\ell+1/2}), \quad (x, y) \in (x_j, x_{j+1}) \times (y_\ell, y_{\ell+1}) \subset \Omega,$$

nula em $\mathbb{R}^2 \setminus \Omega$. Tem-se

$$(v_H, r_H)_H = (w_H, s_H)_0 \rightarrow (w, r)_0 \quad (H \in \Lambda).$$

Então,

$$v_H \rightarrow w \text{ em } (L^2(\Omega), \Pi \mathring{L}_H^2(\Omega)) \quad (H \in \Lambda).$$

Atendendo a (3.15) concluímos que $v = w$. ■

3.3 Estabilidade

Seja Δ_H o operador de Laplace discreto

$$\Delta_H v_H := \delta_x^2 v_H + \delta_y^2 v_H, \quad v_H \in \mathring{W}_H^{2,2}(\Omega).$$

Vamos estabelecer o resultado de estabilidade relativamente à norma de índice negativo

$$\|v_H\|_{-\Delta_H} := \sup_{0 \neq w_H \in \mathring{W}_H^{2,2}(\Omega)} \frac{|(v_H, w_H)_H|}{\|\Delta_H w_H\|_{0,H}}. \quad (3.16)$$

Provemos um teorema de equivalências de normas que nos permite considerar uma norma equivalente a $\|\cdot\|_{-\Delta_H}$, substituindo, em (3.16), $\|\Delta_H w_H\|_{0,H}$ por $\|w_H\|_{2,H}$. Para o efeito, introduzimos a norma

$$\|v_H\|_{2,H}^2 := \|\Delta_H v_H\|_{0,H}^2, \quad v_H \in \mathring{W}_H^{2,2}(\Omega).$$

Os dois lemas que apresentamos seguidamente são fundamentais na prova desse resultado.

Lema 3.5 *Seja $\mathring{W}_H^{2,2}(\Omega)$. Então*

$$|v_H|_{1,H}^2 = (-\Delta_H v_H, v_H)_H. \quad (3.17)$$

Demonstração: Atendendo a que se tem sucessivamente

$$\begin{aligned} & (-\delta_x^2 v_H, v_H)_H \\ &= - \sum_{j=1}^N \sum_{\ell=1}^M k_{\ell-1} \left((\delta_x v_H)_{j,\ell-1/2} - (\delta_x v_H)_{j-1,\ell-1/2} \right) \bar{v}_{j-1/2,\ell-1/2} \\ &= - \sum_{j=1}^{N-1} \sum_{\ell=1}^M k_{\ell-1} (\delta_x v_H)_{j,\ell-1/2} (\bar{v}_{j-1/2,\ell-1/2} - \bar{v}_{j+1/2,\ell-1/2}) \\ &\quad + \sum_{\ell=1}^M k_{\ell-1} \bar{v}_{1/2,\ell-1/2} (\delta_x v_H)_{0,\ell-1/2} - \sum_{\ell=1}^M k_{\ell-1} \bar{v}_{N-1/2,\ell-1/2} (\delta_x v_H)_{N,\ell-1/2} \\ &= \sum_{j=0}^N \sum_{\ell=1}^M h_{j-1/2} k_{\ell-1} |(\delta_x v_H)_{j,\ell-1/2}|^2, \end{aligned} \quad (3.18)$$

e que vale uma igualdade análoga a (3.18) relativamente à variável y , concluímos (3.17). ■

Lema 3.6 *Seja $\overset{\circ}{W}_H^{2,2}(\Omega)$. Então existe C independente de H tal que*

$$\|v_H\|_{0,H} \leq C|v_H|_{1,H}, \quad (3.19)$$

e

$$\|v_H\|_{1,H} \leq C|v_H|_{2,H}. \quad (3.20)$$

Demonstração: Como

$$\begin{aligned} & |v_{j-1/2,\ell-1/2}|^2 \\ & \leq \left(\sum_{i=0}^{j-1} |v_{i+1/2,\ell-1/2} - v_{i-1/2,\ell-1/2}| \right)^2 \\ & \leq \sum_{i=0}^{j-1} h_{i-1/2} \sum_{i=0}^{j-1} \frac{|v_{i+1/2,\ell-1/2} - v_{i-1/2,\ell-1/2}|^2}{h_{i-1/2}} \\ & \leq (x_{N+1/2} - x_{-1/2}) \sum_{i=0}^N h_{i-1/2} |(\delta_x v_H)_{i,\ell-1/2}|^2, \end{aligned}$$

$j = 0, \dots, N$, então

$$(v_H, v_H)_H \leq (x_{N+1/2} - x_{-1/2})^2 \sum_{j=0}^N \sum_{\ell=1}^M h_{j-1/2} k_{\ell-1} |(\delta_x v_H)_{j,\ell-1/2}|^2.$$

Logo existe $C > 0$ tal que vale (3.19).

A desigualdade (3.20) obtém-se imediatamente pelo Lema 3.5, uma vez que

$$\begin{aligned} |v_H|_{1,H}^2 &= (-\Delta_H v_H, v_H)_H \leq (\|\delta_x^2 v_H\|_{0,H} + \|\delta_y^2 v_H\|_{0,H}) \|v_H\|_{0,H} \\ &\leq C(\|\delta_x^2 v_H\|_{0,H} + \|\delta_y^2 v_H\|_{0,H}) |v_H|_{1,H} \leq 2C|v_H|_{2,H} |v_H|_{1,H}. \end{aligned}$$

■

O teorema que se segue estabelece uma equivalência de normas. Tal como no resultado de compacidade, procuramos estender aos espaços discretos propriedades conhecidas para espaços de funções contínuas. Como modelo de demonstração usámos o Corolário 9.1.23 de [40], onde é provada a regularidade H^2 para a equação de Poisson num domínio convexo e condição de fronteira de Dirichlet nula.

Teorema 3.7 *As normas $\|\cdot\|_{2,H}$ e $\|\cdot\|_{2,H}$, são equivalentes em $\overset{\circ}{W}_H^{2,2}(\Omega)$.*

Demonstração: Seja $v_H \in \overset{\circ}{W}_H^{2,2}(\Omega)$. Começemos por mostrar a igualdade

$$\|\Delta_H v_H\|_{0,H} = |v_H|_{2,H}. \quad (3.21)$$

Como

$$\begin{aligned} & \|\Delta_H v_H\|_{0,H}^2 \\ &= \sum_{j=1}^N \sum_{\ell=1}^M h_{j-1} k_{\ell-1} \left(|(\delta_x^2 v_H)_{j-1/2, \ell-1/2}|^2 + |(\delta_y^2 v_H)_{j-1/2, \ell-1/2}|^2 \right. \\ & \quad \left. + (\delta_x^2 v_H \delta_y^2 \bar{v}_H + \delta_x^2 \bar{v}_H \delta_y^2 v_H)_{j-1/2, \ell-1/2} \right), \end{aligned}$$

então, para concluirmos o pretendido, basta que provemos a igualdade

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^N \sum_{\ell=1}^M h_{j-1} k_{\ell-1} (\delta_x^2 v_H \delta_y^2 \bar{v}_H + \delta_x^2 \bar{v}_H \delta_y^2 v_H)_{j-1/2, \ell-1/2} \\ &= 2 \sum_{j=0}^N \sum_{\ell=0}^M h_{j-1/2} k_{\ell-1/2} |(\delta_{xy} v_H)_{j, \ell}|^2. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Para o efeito mostremos que

$$\begin{aligned} M &:= \sum_{j=1}^N \sum_{\ell=1}^M h_{j-1} k_{\ell-1} (\delta_x^2 v_H)_{j-1/2, \ell-1/2} (\delta_y^2 \bar{v}_H)_{j-1/2, \ell-1/2} \\ &= \sum_{j=0}^N \sum_{\ell=0}^M h_{j-1/2} k_{\ell-1/2} |(\delta_{xy} v_H)_{j, \ell}|^2. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Somando por partes obtemos

$$\begin{aligned} M &= \sum_{j=1}^N \sum_{\ell=1}^M \left[\left((\delta_x v_H)_{j, \ell-1/2} - (\delta_x v_H)_{j-1, \ell-1/2} \right) \right. \\ & \quad \left. \left((\delta_y \bar{v}_H)_{j-1/2, \ell} - (\delta_y \bar{v}_H)_{j-1/2, \ell-1} \right) \right] \\ &= \sum_{j=1}^N \sum_{\ell=0}^M \left((\delta_x v_H)_{j, \ell-1/2} - (\delta_x v_H)_{j-1, \ell-1/2} \right. \\ & \quad \left. - (\delta_x v_H)_{j, \ell+1/2} + (\delta_x v_H)_{j-1, \ell+1/2} \right) (\delta_y \bar{v}_H)_{j-1/2, \ell} \\ & \quad - \sum_{j=1}^N \left((\delta_x v_H)_{j, -1/2} - (\delta_x v_H)_{j-1, -1/2} \right) (\delta_y \bar{v}_H)_{j-1/2, 0} \\ & \quad + \sum_{j=1}^N \left((\delta_x v_H)_{j, M+1/2} - (\delta_x v_H)_{j-1, M+1/2} \right) (\delta_y \bar{v}_H)_{j-1/2, M}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
M &= \sum_{j=0}^N \sum_{\ell=0}^M \left[\left((\delta_x v_H)_{j,\ell-1/2} - (\delta_x v_H)_{j,\ell+1/2} \right) \right. \\
&\quad \left. \left((\delta_y \bar{v}_H)_{j-1/2,\ell} - (\delta_y \bar{v}_H)_{j+1/2,\ell} \right) \right] \\
&+ \sum_{\ell=0}^M \left((\delta_x v_H)_{0,\ell+1/2} - (\delta_x v_H)_{0,\ell-1/2} \right) (\delta_y \bar{v}_H)_{-1/2,\ell} \\
&- \sum_{\ell=0}^M \left((\delta_x v_H)_{N,\ell+1/2} - (\delta_x v_H)_{N,\ell-1/2} \right) (\delta_y \bar{v}_H)_{N+1/2,\ell} \\
&- \sum_{j=1}^N \left((\delta_x v_H)_{j,-1/2} - (\delta_x v_H)_{j-1,-1/2} \right) (\delta_y \bar{v}_H)_{j-1/2,0} \\
&+ \sum_{j=1}^N \left((\delta_x v_H)_{j,M+1/2} - (\delta_x v_H)_{j-1,M+1/2} \right) (\delta_y \bar{v}_H)_{j-1/2,M}.
\end{aligned}$$

Atendendo a que v_H é nula em $\partial\Omega_H$, obtém-se ainda

$$M = \sum_{j=0}^N \sum_{\ell=0}^M h_{j-1/2} k_{\ell-1/2} |(\delta_{xy} v_H)_{j,\ell}|^2,$$

o que conclui a demonstração de (3.23). De igual modo se prova

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^N \sum_{\ell=1}^M h_{j-1} k_{\ell-1} (\delta_x^2 \bar{v}_H)_{j-1/2,\ell-1/2} (\delta_y^2 v_H)_{j-1/2,\ell-1/2} \\
&= \sum_{j=0}^N \sum_{\ell=0}^M h_{j-1/2} k_{\ell-1/2} |(\delta_{xy} v_H)_{j,\ell}|^2. \tag{3.24}
\end{aligned}$$

Conjugando (3.23) e (3.24), obtemos (3.22), o que conclui a demonstração de (3.21). Para finalizar a demonstração notamos que de (3.22) vem ainda

$$\|v_H\|_{2,H} \leq \|v_H\|_{2,H},$$

e, pelo Lema 3.6, resulta imediatamente a existência de $C > 0$ tal que

$$\|v_H\|_{2,H} \leq C \|v_H\|_{2,H}.$$

■

Na demonstração dos três últimos resultados omitimos o símbolo P_{C_H} que denota o prolongamento de v_H a \bar{C}_H . Não nos pareceu importante incluí-lo uma vez que

$$P_{C_H} \Delta_H v_H = \Delta_H (P_{C_H} v_H) \quad \forall v_H \in \overset{\circ}{W}_H^{2,2}(\Omega).$$

Lema 3.8 *Sejam $(v_H)_\Lambda$ uma sucessão em $\Pi \overset{\circ}{W}_H^{1,2}(\Omega)$ limitada e $\alpha \in C(\bar{\Omega})$. Então $(M_x(\alpha \delta_x v_H))_\Lambda$ e $(M_y(\alpha \delta_y v_H))_\Lambda$ são limitadas em $\Pi \overset{\circ}{L}_H^2(\Omega)$.*

Demonstração: Note-se que para $(x_{j-1/2}, y_{\ell-1/2}) \in \Omega_H$ vale

$$(M_x(\alpha \delta_x v_H))_{j-1/2, \ell-1/2} = \frac{(\alpha \delta_x v_H)_{j-1, \ell-1/2} + (\alpha \delta_x v_H)_{j, \ell-1/2}}{2}.$$

Atendendo a que se tem

$$\begin{aligned} & h_{j-1} |(\alpha \delta_x v_H)_{j-1, \ell-1/2} + (\alpha \delta_x v_H)_{j, \ell-1/2}|^2 \\ & \leq 4h_{j-3/2} |(\alpha \delta_x v_H)_{j-1, \ell-1/2}|^2 + 4h_{j-1/2} |(\alpha \delta_x v_H)_{j, \ell-1/2}|^2, \end{aligned}$$

então

$$\|M_x(\alpha \delta_x v_H)\|_{0,H}^2 \leq 2\|\alpha\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \|v_H\|_{1,H}^2.$$

Analogamente, prova-se que

$$\|M_y(\alpha \delta_y v_H)\|_{0,H}^2 \leq 2\|\alpha\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \|v_H\|_{1,H}^2.$$

■

Mostremos que A_H , definido por (3.5), tem uma propriedade análoga a (B.6), que pode ser interpretada como uma versão discreta de coercividade.

Lema 3.9 *Para $H \in \Lambda$, tem-se*

$$(-\delta_x(a \delta_x v_H) - \delta_y(c \delta_y v_H), v_H)_H \geq C_P \|v_H\|_{1,H}^2 \quad \forall v_H \in \overset{\circ}{W}_H^{1,2}(\Omega),$$

e

$$(A_H v_H, v_H)_H \geq C_E \|v_H\|_{1,H}^2 - C_K \|v_H\|_{0,H}^2 \quad \forall v_H \in \overset{\circ}{W}_H^{1,2}(\Omega), \quad (3.25)$$

onde $C_P > 0$, $C_E > 0$ e C_K denotam constantes independentes de H .

Demonstração: Pelo Lema 3.6, existe $C > 0$ independente de H tal que

$$\|v_H\|_{1,H}^2 = \|v_H\|_{0,H}^2 + |v_H|_{1,H}^2 \leq C |v_H|_{1,H}^2,$$

para todo $v_H \in \mathring{W}_H^{1,2}(\Omega)$. Como a é limitada inferiormente por \underline{a} , então

$$\begin{aligned}
& \underline{a} \sum_{j=0}^N \sum_{\ell=1}^M h_{j-1/2} k_{\ell-1} |(\delta_x v_H)_{j,\ell-1/2}|^2 \\
& \leq \sum_{j=0}^N \sum_{\ell=1}^M h_{j-1/2} k_{\ell-1} a(x_j, y_{\ell-1/2}) |(\delta_x v_H)_{j,\ell-1/2}|^2 \\
& = \sum_{j=1}^{N-1} \sum_{\ell=1}^M k_{\ell-1} a(x_j, y_{\ell-1/2}) (\delta_x v_H)_{j,\ell-1/2} (\bar{v}_{j+1/2,\ell-1/2} - \bar{v}_{j-1/2,\ell-1/2}) \\
& \quad + \sum_{\ell=1}^M k_{\ell-1} a(x_0, y_{\ell-1/2}) (\delta_x v_H)_{0,\ell-1/2} \bar{v}_{1/2,\ell-1/2} \\
& \quad - \sum_{\ell=1}^M k_{\ell-1} a(x_N, y_{\ell-1/2}) (\delta_x v_H)_{N,\ell-1/2} \bar{v}_{N-1/2,\ell-1/2},
\end{aligned}$$

e portanto, obtém-se

$$\begin{aligned}
& \underline{a} \sum_{j=0}^N \sum_{\ell=1}^M h_{j-1/2} k_{\ell-1} |(\delta_x v_H)_{j,\ell-1/2}|^2 \\
& \leq - \sum_{j=1}^N \sum_{\ell=1}^M k_{\ell-1} \left((a \delta_x v_H)_{j,\ell-1/2} - (a \delta_x v_H)_{j-1,\ell-1/2} \right) \bar{v}_{j-1/2,\ell-1/2} \\
& = (-\delta_x(a \delta_x v_H), v_H)_H.
\end{aligned}$$

Analogamente, prova-se que

$$\underline{c} \sum_{j=1}^N \sum_{\ell=0}^M h_{j-1} k_{\ell-1/2} |(\delta_y v_H)_{j-1/2,\ell-1}|^2 \leq (-\delta_y(c \delta_y v_H), v_H)_H.$$

Logo, existe $C_P > 0$ tal que

$$(-\delta_x(a \delta_x v_H) - \delta_y(c \delta_y v_H), v_H)_H \geq C_P \|v_H\|_{1,H}^2 \quad \forall v_H \in \mathring{W}_H^{1,2}(\Omega).$$

Por outro lado, pelo Lema 3.8, existe $C > 0$ tal que

$$\|M_x(d \delta_x v_H) + M_y(e \delta_y v_H)\|_{0,H} \leq C \|v_H\|_{1,H},$$

e portanto, pelo Lema 3.6 e pela desigualdade de Hölder, concluímos que existe C_L independente de H tal que

$$\left| (M_x(d \delta_x v_H) + M_y(e \delta_y v_H) + f v_H, v_H)_H \right| \leq C_L \|v_H\|_{1,H} \|v_H\|_{0,H}.$$

Finalmente, atendendo a que para todo $\epsilon > 0$ existe C_ϵ tal que

$$\|v_H\|_{1,H} \|v_H\|_{0,H} \leq \epsilon \|v_H\|_{1,H}^2 + C_\epsilon \|v_H\|_{0,H}^2,$$

se fixarmos $\epsilon = \frac{C_P}{2C_L}$, concluímos que vale (3.25) com $C_E = \frac{C_P}{2}$ e $C_K = C_L C_\epsilon$. ■

Estabelecemos o resultado de estabilidade de A_H utilizando o Teorema 2.11. Para o efeito, começamos por apresentar a forma explícita do adjunto de A_H . Seja A_H^* , definido por

$$A_H^* := A_H^{(2)*} + A_H^{(1)*}, \quad (3.26)$$

com

$$A_H^{(2)*} v_H := -\delta_x (a \delta_x v_H) - \delta_y (c \delta_y v_H) \quad \text{em } \Omega_H,$$

e

$$A_H^{(1)*} v_H := -\delta_x (\bar{d} M_x^* v_H) - \delta_y (\bar{e} M_y^* v_H) + \bar{f} v_H \quad \text{em } \Omega_H,$$

onde

$$(M_x^* v_H)_{j,\ell-1/2} := \frac{v_{j-1/2,\ell-1/2} h_{j-1} + v_{j+1/2,\ell-1/2} h_j}{2h_{j-1/2}}, \quad (3.27)$$

$$(M_y^* v_H)_{j-1/2,\ell} := \frac{v_{j-1/2,\ell-1/2} k_{\ell-1} + v_{j-1/2,\ell+1/2} k_\ell}{2k_{\ell-1/2}}, \quad (3.28)$$

e $A_H^{(1)*} v_H := A_H^{(2)*} v_H := 0$ em $\partial\Omega_H$.

Lema 3.10 *O operador $A_H^* : \mathring{W}_H^{2,2}(\Omega) \rightarrow \mathring{L}_H^2(\Omega)$ definido por (3.26) é o operador adjunto de $A_H : \mathring{W}_H^{2,2}(\Omega) \rightarrow \mathring{L}_H^2(\Omega)$ definido por (3.5).*

Demonstração: Sejam $v_H, w_H \in \mathring{W}_H^{2,2}(\Omega)$. Vamos mostrar, em primeiro lugar, que o operador $A_H^{(2)*}$ é auto-adjunto. Consideremos as parcelas de $(\delta_x (a \delta_x v_H), w_H)_H$ que têm o factor $\bar{w}_{j+1/2,\ell+1/2}$, para algum j , com ℓ fixo. Suponhamos, sem perda de generalidade, que o conjunto de pontos do tipo $(\cdot, y_{\ell+1/2})$ que pertencem a Ω_H é

$$\{(x_{p_\ell+1/2}, y_{\ell+1/2}), (x_{p_\ell+3/2}, y_{\ell+1/2}), \dots, (x_{p_\ell+N_\ell-1/2}, y_{\ell+1/2})\}.$$

A soma das referidas parcelas satisfazem

$$\begin{aligned} & \sum_{j=p_\ell}^{p_\ell+N_\ell-1} h_j k_\ell (\delta_x (a \delta_x) v_H)_{j+1/2, \ell+1/2} \bar{w}_{j+1/2, \ell+1/2} \\ &= \sum_{j=p_\ell+1}^{p_\ell+N_\ell-2} h_{j-1/2} k_\ell (a \delta_x v_H)_{j, \ell+1/2} (\delta_x \bar{w}_H)_{j, \ell+1/2} \\ & \quad + (a \delta_x v_H)_{p_\ell, \ell+1/2} \bar{w}_{p_\ell+1/2, \ell+1/2} + (a \delta_x v_H)_{p_\ell+N_\ell, \ell+1/2} \bar{w}_{p_\ell+N_\ell-1/2, \ell+1/2}, \end{aligned}$$

e atendendo a que v_H e w_H são nulas em $\partial\Omega_H$, vem ainda

$$\begin{aligned} & \sum_{j=p_\ell}^{p_\ell+N_\ell-1} h_j k_\ell (\delta_x a \delta_x v_H)_{j+1/2, \ell+1/2} \bar{w}_{j+1/2, \ell+1/2} \\ &= \sum_{j=p_\ell}^{p_\ell+N_\ell-1} h_j k_\ell v_{j+1/2, \ell+1/2} (\delta_x (a \delta_x \bar{w}_H))_{j+1/2, \ell+1/2}. \end{aligned}$$

Consideremos em $(\delta_x a \delta_x v_H, w_H)_H$ a última igualdade. Obtemos

$$(\delta_x (a \delta_x v_H), w_H)_H = (v_H, \delta_x (a \delta_x w_H))_H.$$

De igual modo, prova-se que

$$(\delta_y (c \delta_y v_H), w_H)_H = (v_H, \delta_y (c \delta_y w_H))_H.$$

Relativamente a $(M_x(d \delta_x v_H), w_H)_H$ note-se que

$$\begin{aligned} & \sum_{j=p_\ell}^{p_\ell+N_\ell-1} h_j k_\ell (M_x(d \delta_x v_H))_{j+1/2, \ell+1/2} \bar{w}_{j+1/2, \ell+1/2} \\ &= \sum_{j=p_\ell}^{p_\ell+N_\ell-1} h_j k_\ell \left(d_{j, \ell+1/2} \frac{v_{j+1/2, \ell+1/2} - v_{j-1/2, \ell+1/2}}{2h_{j-1/2}} \right. \\ & \quad \left. + d_{j+1, \ell+1/2} \frac{v_{j+3/2, \ell+1/2} - v_{j+1/2, \ell+1/2}}{2h_{j+1/2}} \right) \bar{w}_{j+1/2, \ell+1/2}. \end{aligned}$$

Reagrupando as parcelas do segundo membro da igualdade anterior, obtemos

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=p_\ell}^{p_\ell+N_\ell-1} h_j k_\ell (M_x(d\delta_x v_H))_{j+1/2, \ell+1/2} \bar{w}_{j+1/2, \ell+1/2} \\
&= k_\ell \left[h_{p_\ell} \left(d_{p_\ell, \ell+1/2} \frac{\bar{w}_{p_\ell+1/2, \ell+1/2}}{2h_{p_\ell-1/2}} - d_{p_\ell+1, \ell+1/2} \frac{\bar{w}_{p_\ell+1/2, \ell+1/2}}{2h_{p_\ell+1/2}} \right) \right. \\
&\quad \left. - h_{p_\ell+1} d_{p_\ell+1, \ell+1/2} \frac{\bar{w}_{p_\ell+3/2, \ell+1/2}}{2h_{p_\ell+1/2}} \right] v_{p_\ell+1/2, \ell+1/2} \\
&\quad + \sum_{j=p_\ell+1}^{p_\ell+N_\ell-2} k_\ell \left[h_j \left(d_{j, \ell+1/2} \frac{\bar{w}_{j+1/2, \ell+1/2}}{2h_{j-1/2}} - d_{j+1, \ell+1/2} \frac{\bar{w}_{j+1/2, \ell+1/2}}{2h_{j+1/2}} \right) \right. \\
&\quad \left. - h_{j+1} d_{j+1, \ell+1/2} \frac{\bar{w}_{j+3/2, \ell+1/2}}{2h_{j+1/2}} + h_{j-1} d_{j, \ell+1/2} \frac{\bar{w}_{j-1/2, \ell+1/2}}{2h_{j-1/2}} \right] v_{j+1/2, \ell+1/2} \\
&\quad + k_\ell \left[h_{p_\ell+N_\ell-1} \left(d_{p_\ell+N_\ell-1, \ell+1/2} \frac{\bar{w}_{p_\ell+N_\ell-1/2, \ell+1/2}}{2h_{p_\ell+N_\ell-3/2}} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - d_{p_\ell+N_\ell, \ell+1/2} \frac{\bar{w}_{p_\ell+N_\ell-1/2, \ell+1/2}}{2h_{p_\ell+N_\ell-1/2}} \right) \right. \\
&\quad \left. + h_{p_\ell+N_\ell-2} d_{p_\ell+N_\ell-1, \ell+1/2} \frac{\bar{w}_{p_\ell+N_\ell-3/2, \ell+1/2}}{2h_{p_\ell+N_\ell-3/2}} \right] v_{p_\ell+N_\ell-1/2, \ell+1/2},
\end{aligned}$$

e concluímos que

$$(M_x(d\delta_x v_H), w_H)_H = (v_H, -\delta_x(\bar{d}M_x^* w_H))_H.$$

Analogamente, obtém-se

$$(M_y(e\delta_y v_H), w_H)_H = (v_H, -\delta_y(\bar{e}M_y^* w_H))_H.$$

■

Mostremos que se verificam as condições do Teorema 2.11. Para o efeito prove-mos que para A_H vale (2.59), isto é, existe $C > 0$ tal que

$$\|v_H\|_{2,H} \leq C \|A_H^* v_H\|_{0,H} \quad \forall v_H \in \overset{\circ}{W}_H^{2,2}(\Omega).$$

Pelo Teorema 3.7, a condição anterior é equivalente à existência de $C > 0$ tal que

$$\|v_H\|_{2,H} \leq C \|A_H^* v_H\|_{0,H} \quad \forall v_H \in \overset{\circ}{W}_H^{2,2}(\Omega). \quad (3.29)$$

Os dois lemas que estabelecemos seguidamente são fundamentais na demonstração de (3.29).

Lema 3.11 *Sejam $(v_H)_\Lambda$ e v tais que*

$$v_H \rightarrow v \text{ em } (W_0^{1,2}(\Omega), \Pi \overset{\circ}{W}_H^{1,2}(\Omega)) \quad (H \in \Lambda)$$

e seja $\alpha \in C(\bar{\Omega})$. Então

$$M_x(\alpha \delta_x v_H) \rightarrow \alpha v_x \quad (3.30)$$

e

$$M_y(\alpha \delta_y v_H) \rightarrow \alpha v_y \quad (3.31)$$

em $(L^2(\Omega), \Pi \overset{\circ}{L}_H^2(\Omega))$ ($H \in \Lambda$).

Demonstração: Sejam ϵ um número real positivo qualquer e C tal que $\|\alpha\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C$. Então, existe $\varphi \in C^\infty(\bar{\Omega})$ tal que

$$\|v - \varphi\|_{W^{1,2}(\Omega)} \leq \epsilon, \quad \lim_{H_{max} \rightarrow 0} \sup\{\|v_H - R_H \varphi\|_{1,H}\} \leq \frac{1}{4C}\epsilon.$$

Atendendo à definição das normas $\|\cdot\|_{0,H}$ e $\|\cdot\|_{1,H}$, é fácil deduzir que

$$\begin{aligned} \|M_x(\alpha \delta_x v_H) - M_x(\alpha \delta_x R_H \varphi)\|_{0,H} &= \|M_x(\alpha \delta_x (v_H - R_H \varphi))\|_{0,H} \\ &\leq 2\|\alpha\|_{L^\infty(\Omega)} \|v_H - R_H \varphi\|_{1,H}. \end{aligned}$$

Por outro lado, para H_{max} suficientemente pequeno,

$$\|M_x(\alpha \delta_x R_H \varphi) - R_H(\alpha \varphi_x)\|_{0,H} \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

Então, para $H \in \Lambda$, com H_{max} suficientemente pequeno, obtemos

$$\|M_x(\alpha \delta_x v_H) - R_H(\alpha \varphi_x)\|_{0,H} \leq \epsilon,$$

donde concluímos (3.30).

A convergência (3.31) prova-se de forma análoga. ■

Lema 3.12 *Sejam $(v_H)_\Lambda$ uma sucessão em $\Pi \overset{\circ}{W}_H^{1,2}(\Omega)$ limitada e $\alpha \in C(\bar{\Omega})$. Então existe $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$ tal que*

$$v_H \rightarrow v \text{ em } (L^2(\Omega), \Pi \overset{\circ}{L}_H^2(\Omega)) \quad (H \in \Lambda'),$$

para alguma subsucessão $\Lambda' \subseteq \Lambda$ e têm-se as seguintes convergências fracas

$$M_x(\alpha \delta_x v_H) \rightharpoonup \alpha v_x \quad \text{e} \quad M_y(\alpha \delta_y v_H) \rightharpoonup \alpha v_y$$

em $(L^2(\Omega), \Pi \overset{\circ}{L}_H^2(\Omega))$ ($H \in \Lambda'$).

Demonstração: Como $(v_H)_\Lambda$ é limitada em $\Pi \overset{\circ}{W}_H^{1,2}(\Omega)$ então, pelo Lema 3.8, $(M_x(\alpha\delta_x v_H))_\Lambda$ é limitada em $\overset{\circ}{L}_H^2(\Omega)$. Logo, pelo Teorema 3.1, temos que

$$(M_x(\alpha\delta_x v_H))_\Lambda \rightharpoonup w \text{ em } (L^2(\Omega), \Pi \overset{\circ}{L}_H^2(\Omega)) \quad (H \in \Lambda''),$$

para alguma subsucessão $\Lambda'' \subseteq \Lambda$ e para algum $w \in L^2(\Omega)$. Assim, para qualquer $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$,

$$(R_H \varphi, M_x(\alpha\delta_x v_H))_H \rightarrow (\varphi, w)_0 \quad (H \in \Lambda''). \quad (3.32)$$

Por outro lado, pelos Teorema 3.3 e Lema 3.4, existem $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$ e $\Lambda' \subseteq \Lambda''$, tais que

$$v_H \rightarrow v \text{ em } (L^2(\Omega), \Pi \overset{\circ}{L}_H^2(\Omega)) \quad (H \in \Lambda').$$

Provemos que, em (3.32), $w = \alpha v_x$.

Comecemos por mostrar que

$$\delta_x(\alpha M_x^* R_H \varphi) \rightharpoonup (\alpha \varphi)_x \text{ em } (L^2(\Omega), \Pi \overset{\circ}{L}_H^2(\Omega)) \quad (H \in \Lambda'), \quad (3.33)$$

com $(M_x^* R_H \varphi)_{j,\ell-1/2}$ definido por (3.27). Pelo Lema 3.11, para qualquer $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$, temos a convergência

$$\begin{aligned} (-\delta_x(\alpha M_x^* R_H \varphi), R_H \psi)_H &= (R_H \varphi, M_x(\alpha\delta_x R_H \psi))_H \\ &\rightarrow (\varphi, \alpha \psi_x)_0, \end{aligned}$$

ou seja,

$$(-\delta_x(\alpha M_x^* R_H \varphi), R_H \psi)_H \rightarrow (-\alpha \varphi)_x, \psi)_0. \quad (3.34)$$

Mas, pelo Teorema 3.1, existe $z \in L^2(\Omega)$ tal que

$$\delta_x(\alpha M_x^* R_H \varphi) \rightharpoonup z \text{ em } (L^2(\Omega), \Pi \overset{\circ}{L}_H^2(\Omega)) \quad (H \in \Lambda'),$$

e portanto,

$$(-\delta_x(\alpha M_x^* R_H \varphi), R_H \psi)_H \rightarrow (-z, \psi)_0. \quad (3.35)$$

De (3.34) e (3.35) obtém-se (3.33).

Por outro lado,

$$\begin{aligned} (R_H \varphi, M_x(\alpha\delta_x v_H))_H &= (-\delta_x(\alpha M_x^* R_H \varphi), v_H)_H \\ &\rightarrow (-\alpha \varphi)_x, v)_0 = (\varphi, \alpha v_x)_0, \end{aligned}$$

e atendendo a (3.32), vem finalmente

$$M_x(\alpha\delta_x v_H) \rightharpoonup \alpha v_x \text{ em } (L^2(\Omega), \Pi \overset{\circ}{L}_H^2(\Omega)) \quad (H \in \Lambda').$$

A prova da convergência

$$M_y(\alpha\delta_y v_H) \rightharpoonup \alpha v_y \text{ em } (L^2(\Omega), \Pi \mathring{L}_H^2(\Omega)) \quad (H \in \Lambda')$$

é análoga à apresentada. ■

Teorema 3.13 *Existem uma constante positiva C independente de H e uma subsucessão final Λ' de Λ para os quais o operador A_H^* definido por (3.26) verifica*

$$\|v_H\|_{1,H} \leq C \|A_H^* v_H\|_{0,H} \quad \forall v_H \in \mathring{W}_H^{1,2}(\Omega), \quad (3.36)$$

com $H \in \Lambda'$.

Demonstração: Suponhamos que (3.36) não se verifica. Então, para alguma subsucessão $\Lambda'' \subseteq \Lambda$, existem elementos $v_H, H \in \Lambda''$, tais que

$$\|v_H\|_{1,H} = 1 \text{ e } \|A_H^* v_H\|_{0,H} \rightarrow 0 \quad (H \in \Lambda''). \quad (3.37)$$

Pelos Teorema 3.3 e Lema 3.4, existem Λ'' e $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$ tais que

$$v_H \rightarrow v \text{ em } (L^2(\Omega), \Pi \mathring{L}_H^2(\Omega)) \quad (H \in \Lambda'').$$

Seja $w \in W_0^{1,2}(\Omega)$ a solução do problema variacional

$$(aw_x, z_x)_0 + (cw_y, z_y)_0 = ((dv)_x + (ev)_y + fv, z)_0 \quad \forall z \in W_0^{1,2}(\Omega). \quad (3.38)$$

Consideremos uma sucessão $(w_H)_\Lambda \in \Pi \mathring{W}_H^{1,2}(\Omega)$ tal que

$$w_H \rightarrow w \text{ em } (W_0^{1,2}(\Omega), \Pi \mathring{W}_H^{1,2}(\Omega)) \quad (H \in \Lambda).$$

Seja $z_H = v_H - w_H$. Provemos que

$$|z_H|_{1,H} \rightarrow 0. \quad (3.39)$$

Começemos por notar que pelo Lema 3.9, existe $C > 0$ tal que

$$\begin{aligned} |z_H|_{1,H}^2 &\leq C \sum_{j=1}^N \sum_{\ell=1}^M \frac{h_{j-1} k_{\ell-1}}{2} \\ &\times \left(a(x_{j-1}, y_{\ell-1/2}) |(\delta_x z_H)_{j-1, \ell-1/2}|^2 + a(x_j, y_{\ell-1/2}) |(\delta_x z_H)_{j, \ell-1/2}|^2 \right. \\ &\left. + c(x_{j-1/2}, y_{\ell-1}) |(\delta_y z_H)_{j-1/2, \ell-1}|^2 + c(x_{j-1/2}, y_\ell) |(\delta_y z_H)_{j-1/2, \ell}|^2 \right), \end{aligned}$$

e portanto

$$\begin{aligned}
|z_H|_{1,H}^2 &\leq C \left(\sum_{j=1}^N \sum_{\ell=1}^M h_{j-1} k_{\ell-1} \left(A_H^{(2)*} v_H \right)_{j-1/2, \ell-1/2} \bar{z}_{j-1/2, \ell-1/2} \right. \\
&\quad + \sum_{j=0}^N \sum_{\ell=1}^M h_{j-1/2} k_{\ell-1} a(x_j, y_{\ell-1/2}) (\delta_x w_H)_{j, \ell-1/2} (\delta_x \bar{z}_H)_{j, \ell-1/2} \\
&\quad \left. + \sum_{j=1}^N \sum_{\ell=0}^M h_{j-1} k_{\ell-1/2} c(x_{j-1/2}, y_\ell) (\delta_y w_H)_{j-1/2, \ell} (\delta_y \bar{z}_H)_{j-1/2, \ell} \right)
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
|z_H|_{1,H}^2 &\leq C \left(\sum_{j=1}^N \sum_{\ell=1}^M h_{j-1} k_{\ell-1} (A_H^* v_H)_{j-1/2, \ell-1/2} \bar{z}_{j-1/2, \ell-1/2} \right. \\
&\quad + \sum_{j=0}^N \sum_{\ell=1}^M h_{j-1/2} k_{\ell-1} a(x_j, y_{\ell-1/2}) (\delta_x w_H)_{j, \ell-1/2} (\delta_x \bar{z}_H)_{j, \ell-1/2} \\
&\quad + \sum_{j=1}^N \sum_{\ell=0}^M h_{j-1} k_{\ell-1/2} c(x_{j-1/2}, y_\ell) (\delta_y w_H)_{j-1/2, \ell} (\delta_y \bar{z}_H)_{j-1/2, \ell} \\
&\quad \left. + \sum_{j=1}^N \sum_{\ell=1}^M h_{j-1} k_{\ell-1} v_{j-1/2, \ell-1/2} \left(A_H^{(1)} \bar{z}_H \right)_{j-1/2, \ell-1/2} \right). \quad (3.40)
\end{aligned}$$

Por hipótese $\|A_H^* v_H\|_{0,H} \rightarrow 0$ e portanto, o primeiro termo do segundo membro de (3.40) converge para zero, pois

$$\sum_{j=1}^N \sum_{\ell=1}^M h_{j-1} k_{\ell-1} |((A_H^* v_H) \bar{z}_H)_{j-1/2, \ell-1/2}| \leq \|A_H^* v_H\|_{0,H} \|z_H\|_{0,H} \rightarrow 0.$$

Consideremos seguidamente os outros termos do segundo membro de (3.40). Seja $z = v - w$. Pretendemos mostrar que

$$\begin{aligned}
a(w_H, z_H) &:= \sum_{j=0}^N \sum_{\ell=1}^M h_{j-1/2} k_{\ell-1} a(x_j, y_{\ell-1/2}) (\delta_x w_H)_{j, \ell-1/2} (\delta_x \bar{z}_H)_{j, \ell-1/2} \\
&= (M_x(\delta_x w_H), M_x(a \delta_x z_H))_H \rightarrow (a w_x, z_x)_0 \quad (H \in \Lambda''), \quad (3.41)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c(w_H, z_H) &:= \sum_{j=1}^N \sum_{\ell=0}^M h_{j-1} k_{\ell-1/2} c(x_{j-1/2}, y_\ell) (\delta_y w_H)_{j-1/2, \ell} (\delta_y \bar{z}_H)_{j-1/2, \ell} \\
&= (M_y(\delta_y w_H), M_y(c \delta_y z_H))_H \rightarrow (c w_y, z_y)_0 \quad (H \in \Lambda''). \quad (3.42)
\end{aligned}$$

Como

$$w_H \rightarrow w \text{ em } (W_0^{1,2}(\Omega), \Pi \mathring{W}_H^{1,2}(\Omega)) \quad (H \in \Lambda),$$

então, pelo Lema 3.11,

$$M_x(\delta_x w_H) \rightarrow w_x \text{ em } (L^2(\Omega), \Pi \mathring{L}_H^2(\Omega)) \quad (H \in \Lambda).$$

Para além disso, atendendo a que $(v_H)_\Lambda$ e $(w_H)_\Lambda$, $H \in \Lambda''$, são sucessões em $\Pi \mathring{W}_H^{1,2}(\Omega)$ limitadas então $(z_H)_\Lambda$, $H \in \Lambda''$, é uma sucessão em $\Pi \mathring{W}_H^{1,2}(\Omega)$ limitada e pelo Lema 3.12, temos

$$(M_x(a\delta_x z_H))_\Lambda \rightarrow az_x \text{ em } (L^2(\Omega), \Pi \mathring{L}_H^2(\Omega)) \quad (H \in \Lambda'),$$

para alguma subsucessão Λ' de Λ'' . Daqui resulta imediatamente (3.41). A prova de (3.42) é análoga.

Consideremos agora o último termo do segundo membro de (3.40). Note-se que vale a representação

$$\sum_{j=1}^N \sum_{\ell=1}^M h_{j-1} k_{\ell-1} v_{j-1/2, \ell-1/2} \left(A_H^{(1)} \bar{z}_H \right)_{j-1/2, \ell-1/2} = (v_H, A_H^{(1)} z_H)_H,$$

e, pelo Lema 3.12, obtém-se

$$(v_H, A_H^{(1)} z_H)_H \rightarrow (v, A^{(1)} z)_0 \quad (H \in \Lambda'').$$

Finalmente, atendendo a que w é solução de (3.38), concluímos que

$$a(w_H, z_H) + c(w_H, z_H) + (v_H, A_H^{(1)} z_H)_H \rightarrow 0 \quad (H \in \Lambda'').$$

Provámos assim (3.39). Portanto,

$$v_H = z_H + w_H \rightarrow w \text{ em } (L^2(\Omega), \Pi \mathring{L}_H^2(\Omega)) \quad (H \in \Lambda'), \quad (3.43)$$

e $v = w$. Então w é solução do problema variacional homogéneo

$$(Aw, z)_0 = 0 \quad \forall z \in W_0^{1,2}(\Omega).$$

Atendendo a que A é um operador injectivo, então $w = 0$. A conclusão anterior contraria $\|v_H\|_{1,H} = 1$ e (3.43). ■

Provemos agora um resultado de estabilidade para $A_H^{(2)*}$. A demonstração do Lema 3.14 é inspirada no Teorema 9.1.3 de [40] para o caso contínuo. No entanto, notamos que tal como no caso do teorema de compacidade discreta anteriormente estabelecido, não existem prolongamentos contínuos das funções de rede que nos permitam deduzir os resultados de regularidade em espaços discretos directamente a partir dos correspondentes resultados relativos a espaços de funções contínuas.

Lema 3.14 *Existe uma constante positiva C , independente de H , tal que*

$$\|v_H\|_{2,H} \leq C(\|A_H^{(2)*} v_H\|_{0,H} + \|v_H\|_{1,H}) \quad \forall v_H \in \mathring{W}_H^{2,2}(\Omega), \quad (3.44)$$

com $H \in \Lambda$.

Demonstração: Seja $v_H \in \mathring{W}_H^{2,2}(\Omega)$. Note-se, em primeiro lugar, que

$$\begin{aligned} (\delta_x(a\delta_x v_H))_{j-1/2, \ell-1/2} &= a(x_{j-1/2}, y_{\ell-1/2})(\delta_x^2 v_H)_{j-1/2, \ell-1/2} \\ &\quad + \frac{a(x_{j-1/2}, y_{\ell-1/2}) - a(x_{j-1}, y_{\ell-1/2})}{h_{j-1}} (\delta_x v_H)_{j-1, \ell-1/2} \\ &\quad + \frac{a(x_j, y_{\ell-1/2}) - a(x_{j-1/2}, y_{\ell-1/2})}{h_{j-1}} (\delta_x v_H)_{j, \ell-1/2}. \end{aligned}$$

Por outro lado, somando por partes, verificamos que

$$\begin{aligned} (\delta_y(c\delta_y v_H), \delta_x^2 v_H)_H &= \sum_{j=0}^N \sum_{\ell=0}^M \left[(c\delta_y v_H)_{j-1/2, \ell} - (c\delta_y v_H)_{j+1/2, \ell} \right] \\ &\quad \times \left[(\delta_x \bar{v}_H)_{j, \ell-1/2} - (\delta_x \bar{v}_H)_{j, \ell+1/2} \right] \end{aligned}$$

e portanto

$$\begin{aligned} &(\delta_y(c\delta_y v_H), \delta_x^2 v_H)_H \\ &= \sum_{j=0}^N \sum_{\ell=0}^M h_{j-1} k_{\ell-1/2} \frac{c(x_j, y_\ell) - c(x_{j-1/2}, y_\ell)}{h_{j-1}} (\delta_y v_H)_{j-1/2, \ell} (\delta_{xy} \bar{v}_H)_{j, \ell} \\ &\quad + \sum_{j=0}^N \sum_{\ell=0}^M h_j k_{\ell-1/2} \frac{c(x_{j+1/2}, y_\ell) - c(x_j, y_\ell)}{h_j} (\delta_y v_H)_{j+1/2, \ell} (\delta_{xy} \bar{v}_H)_{j, \ell} \\ &\quad + \sum_{j=0}^N \sum_{\ell=0}^M h_{j-1/2} k_{\ell-1/2} c(x_j, y_\ell) |(\delta_{xy} v_H)_{j, \ell}|^2. \end{aligned}$$

Concluimos, deste modo, que vale representação

$$(A_H^{(2)*} v_H, \delta_x^2 v_H)_H = -B_x^{(1)} v_H - B_x^{(2)} v_H,$$

com

$$\begin{aligned}
B_x^{(1)}v_H &:= \sum_{j=1}^N \sum_{\ell=1}^M h_{j-1} k_{\ell-1} (\delta_x^2 \bar{v}_H)_{j-1/2, \ell-1/2} \\
&\times \left[\frac{a(x_{j-1/2}, y_{\ell-1/2}) - a(x_{j-1}, y_{\ell-1/2})}{h_{j-1}} (\delta_x v_H)_{j-1, \ell-1/2} \right. \\
&+ \left. \frac{a(x_j, y_{\ell-1/2}) - a(x_{j-1/2}, y_{\ell-1/2})}{h_{j-1}} (\delta_x v_H)_{j, \ell-1/2} \right] \\
&+ \sum_{j=0}^N \sum_{\ell=0}^M h_{j-1} k_{\ell-1/2} \frac{c(x_j, y_\ell) - c(x_{j-1/2}, y_\ell)}{h_{j-1}} (\delta_y v_H)_{j-1/2, \ell} (\delta_{xy} \bar{v}_H)_{j, \ell} \\
&+ \sum_{j=0}^N \sum_{\ell=0}^M h_j k_{\ell-1/2} \frac{c(x_{j+1/2}, y_\ell) - c(x_j, y_\ell)}{h_j} (\delta_y v_H)_{j+1/2, \ell} (\delta_{xy} \bar{v}_H)_{j, \ell}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
B_x^{(2)}v_H &:= \sum_{j=1}^N \sum_{\ell=1}^M h_{j-1} k_{\ell-1} a(x_{j-1/2}, y_{\ell-1/2}) |(\delta_x^2 v_H)_{j-1/2, \ell-1/2}|^2 \\
&+ \sum_{j=0}^N \sum_{\ell=0}^M h_{j-1/2} k_{\ell-1/2} c(x_j, y_\ell) |(\delta_{xy} v_H)_{j, \ell}|^2.
\end{aligned}$$

Sejam $B_y^{(1)}$ e $B_y^{(2)}$ os operadores definidos de forma semelhante a $B_x^{(1)}$ e $B_x^{(2)}$, respectivamente, trocando a por c , x por y e mudando os índices de modo natural. Tem-se a igualdade

$$(A_H^{(2)*} v_H, \delta_x^2 v_H + \delta_y^2 v_H)_H = -B_H^{(1)} v_H - B_H^{(2)} v_H, \quad (3.45)$$

em que $B_H^{(1)} := B_x^{(1)} + B_y^{(1)}$ e $B_H^{(2)} := B_x^{(2)} + B_y^{(2)}$.

Atendendo a que a e c são funções positivas limitadas inferiormente, existe uma constante $C_E > 0$ tal que

$$C_E |v_H|_{2,H}^2 \leq B_H^{(2)} v_H.$$

Por outro lado, $\|a\|_{W^{1,\infty}}$ e $\|c\|_{W^{1,\infty}}$ são limitadas e portanto existe uma constante $C_L > 0$ tal que

$$B_H^{(1)} v_H \leq C_L |v_H|_{1,H} |v_H|_{2,H}.$$

Conjugando (3.45) e as duas últimas desigualdades, obtemos

$$\begin{aligned}
C_E |v_H|_{2,H}^2 &\leq |(A_H^{(2)*} v_H, \delta_x^2 v_H + \delta_y^2 v_H)_H| + |B_H^{(1)} v_H| \\
&\leq \|A_H^{(2)*} v_H\|_{0,H} |v_H|_{2,H} + C_L |v_H|_{1,H} |v_H|_{2,H},
\end{aligned}$$

e portanto vale (3.44) com $C = \max\{1/C_E, C_L/C_E\}$. ■

Como consequência do lema anterior obtemos o seguinte resultado de estabilidade para A_H^* .

Teorema 3.15 *Existe uma constante positiva C independente de H tal que*

$$\|v_H\|_{2,H} \leq C \|A_H^* v_H\|_{0,H} \quad \forall v_H \in \mathring{W}_H^{2,2}(\Omega), \quad (3.46)$$

com $H \in \Lambda'$, para alguma subsucessão final Λ' de Λ .

Demonstração: Seja $v_H \in \mathring{W}_H^{2,2}(\Omega)$. Como $A_H^{(1)*}: \mathring{W}_H^{1,2}(\Omega) \rightarrow \mathring{L}_H^2(\Omega)$ é limitada, então existe uma constante $C_L > 0$ tal que

$$\|A_H^{(2)*} v_H\|_{0,H} \leq \|A_H^* v_H\|_{0,H} + \|A_H^{(1)*} v_H\|_{0,H} \leq \|A_H^* v_H\|_{0,H} + C_L \|v_H\|_{1,H}.$$

Pelo Lema 3.14, existe $C' > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \|v_H\|_{2,H} &\leq C' (\|A_H^{(2)*} v_H\|_{0,H} + \|v_H\|_{1,H}) \\ &\leq C' \|A_H^* v_H\|_{0,H} + (C' + C' C_L) \|v_H\|_{1,H}. \end{aligned}$$

Finalmente, o Teorema 3.13 permite concluir o pretendido. ■

Com o objectivo de estabelecer o resultado de estabilidade observamos que (3.46) é equivalente a

$$\|(A_H^*)^{-1} w_H\|_{2,H} \leq C \|w_H\|_{0,H} \quad \forall w_H \in \mathring{L}_H^2(\Omega).$$

Logo, pelo Teorema 2.11 concluímos o seguinte resultado.

Teorema 3.16 *Existem $C > 0$ e uma subsucessão final Λ' de Λ tais que*

$$\|v_H\|_{0,H} \leq C \sup_{0 \neq w_H \in \mathring{W}_H^{2,2}(\Omega)} \frac{|(A_H v_H, w_H)_H|}{\|w_H\|_{2,H}} \quad \forall v_H \in \mathring{W}_H^{2,2}(\Omega), \quad (3.47)$$

com $H \in \Lambda'$.

Note-se que a desigualdade de estabilidade (3.47) pode ser reescrita em relação a uma norma de índice negativo. De facto tem-se que (3.47) é equivalente a

$$\|v_H\|_{0,H} \leq C \|A_H v_H\|_{-\Delta_H} \quad \forall v_H \in \mathring{W}_H^{2,2}(\Omega).$$

3.4 Convergência

Seja u a solução do problema diferencial (3.1)-(3.2) e u_H a solução do problema de diferenças (3.3)-(3.4). Obtemos seguidamente uma estimativa para o erro $\|R_H u - u_H\|_{0,H}$, a partir do Teorema 3.16, estimando

$$(A_H(R_H u - u_H) - M_H(R_{G_H} g), v_H)_H. \quad (3.48)$$

Nos lemas 3.17-3.19 que se seguem, apresentamos uma colecção de resultados fundamentais para estabelecer uma estimativa para (3.48).

Com o objectivo de simplificar a notação, quando pretendemos indicar um somatório sobre os índices do conjunto $\{(j, \ell) : (x_{j+1/2}, y_{\ell+1/2}) \in \Omega_H\}$ escrevemos

$$\sum_{\Omega_H}.$$

Lema 3.17 *Seja $u \in H^4(\Omega)$. Então valem as estimativas*

$$\begin{aligned} & |(-\delta_x(a\delta_x u), v_H)_H - (M_H R_{G_H}(au_x)_x, v_H)_H| \\ & \leq C \|a\|_{W^{3,\infty}(\Omega)} \left(\sum_{\Omega_H} (h_j^2 + k_\ell^2)^2 \|u\|_{H^4((x_j, x_{j+1}) \times (y_\ell, y_{\ell+1}))}^2 \right)^{1/2} \|v_H\|_{2,H} \end{aligned} \quad (3.49)$$

e

$$\begin{aligned} & |(-\delta_y(c\delta_y u), v_H)_H - (M_H R_{G_H}(cu_y)_y, v_H)_H| \\ & \leq C \|c\|_{W^{3,\infty}(\Omega)} \left(\sum_{\Omega_H} (h_j^2 + k_\ell^2)^2 \|u\|_{H^4((x_j, x_{j+1}) \times (y_\ell, y_{\ell+1}))}^2 \right)^{1/2} \|v_H\|_{2,H}, \end{aligned} \quad (3.50)$$

para todo $v_H \in \mathring{W}_H^{2,2}(\Omega)$.

Demonstração: Seja $v_H \in \mathring{W}_H^{2,2}(\Omega)$. Consideremos, em primeiro lugar, apenas as parcelas de $(\delta_x a \delta_x u, v_H)_H$ e $(M_H R_{G_H}(au_x)_x, v_H)_H$ que têm o factor $\bar{v}_{j+1/2, \ell+1/2}$, para algum j , com ℓ fixo. Suponhamos, sem perda de generalidade, que o conjunto de pontos do tipo $(\cdot, y_{\ell+1/2})$ que pertencem a Ω_H é

$$\{(x_{p_\ell+1/2}, y_{\ell+1/2}), (x_{p_\ell+3/2}, y_{\ell+1/2}), \dots, (x_{p_\ell+N_\ell-1/2}, y_{\ell+1/2})\}.$$

Sejam S_1 e S_2 as somas das referidas parcelas de $(\delta_x a \delta_x u, v_H)_H$ e $(M_H R_{G_H}(au_x)_x, v_H)_H$, respectivamente,

$$S_1 := \sum_{j=p_\ell}^{p_\ell+N_\ell-1} h_j k_\ell (\delta_x a \delta_x u)_{j+1/2, \ell+1/2} \bar{v}_{j+1/2, \ell+1/2}$$

e

$$S_2 := \sum_{j=p_\ell}^{p_\ell+N_\ell-1} h_j k_\ell (M_H R_{G_H} (au_x)_x)_{j+1/2, \ell+1/2} \bar{v}_{j+1/2, \ell+1/2}.$$

Note-se que se tem sucessivamente

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{j=p_\ell}^{p_\ell+N_\ell-1} k_\ell \left((a\delta_x u)_{j+1, \ell+1/2} - (a\delta_x u)_{j, \ell+1/2} \right) \bar{v}_{j+1/2, \ell+1/2} \\ &= - \sum_{j=p_\ell}^{p_\ell+N_\ell} h_{j-1/2} k_\ell (a\delta_x u)_{j, \ell+1/2} (\delta_x \bar{v}_H)_{j, \ell+1/2} \\ &= - \sum_{j=p_\ell}^{p_\ell+N_\ell} k_\ell \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} a(x_j, y_{\ell+1/2}) u_x(x, y_{\ell+1/2}) dx (\delta_x \bar{v}_H)_{j, \ell+1/2}. \end{aligned}$$

Considerando

$$S_1^{(1)} := - \sum_{j=p_\ell}^{p_\ell+N_\ell} \left(\int_{k_\ell}^{k_{\ell+1}} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} a(x_j, y) u_x(x, y) dx dy \right) (\delta_x \bar{v}_H)_{j, \ell+1/2},$$

pelo Lema 1.4, obtém-se

$$S_1 = S_1^{(1)} - \sum_{j=p_\ell}^{p_\ell+N_\ell} \int_{y_\ell}^{y_{\ell+1}} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} E_{j, \ell} (\delta_x \bar{v}_H)_{j, \ell+1/2},$$

com

$$|E_{j, \ell}| \leq C k_\ell^2 \left| a(x_j, \cdot) \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} u_x(x, \cdot) dx \right|_{W^{2,1}((y_\ell, y_{\ell+1}))}.$$

Para S_2 vale a representação

$$S_2 = S_2^{(1)} + \sum_{j=p_\ell}^{p_\ell+N_\ell-1} F_{j, \ell} \bar{v}_{j+1/2, \ell+1/2},$$

com

$$S_2^{(1)} := \sum_{j=p_\ell}^{p_\ell+N_\ell-1} \int_{y_\ell}^{y_{\ell+1}} \int_{x_j}^{x_{j+1}} (au_x)_x(x, y) dx dy \bar{v}_{j+1/2, \ell+1/2}$$

e

$$F_{j, \ell} := (M_H R_{G_H} (au_x)_x)_{j+1/2, \ell+1/2} - \int_{y_\ell}^{y_{\ell+1}} \int_{x_j}^{x_{j+1}} (au_x)_x(x, y) dx dy.$$

Estimemos $F_{j,\ell}$ usando o Lema de Bramble-Hilbert (Lema A.6). Para a função w definida por

$$w(\xi, \eta) := (au_x)_x(x_j + \xi h_j, y_\ell + \eta k_\ell), \quad (\xi, \eta) \in (0, 1) \times (0, 1)$$

vale a igualdade

$$F_{j,\ell} = h_j k_\ell \left(\frac{w(0,0) + w(1,0) + w(0,1) + w(1,1)}{4} - \int_0^1 \int_0^1 w(\xi, \eta) d\xi d\eta \right).$$

Observamos que a funcional

$$\lambda(g) := \frac{g(0,0) + g(1,0) + g(0,1) + g(1,1)}{4} - \int_0^1 \int_0^1 g(\xi, \eta) d\xi d\eta,$$

com $g \in W^{2,1}((0,1) \times (0,1))$, é limitada e anula-se para $g = 1$, $g = \xi$, $g = \eta$, e portanto existe uma constante positiva C tal que

$$|\lambda(g)| \leq C |g|_{W^{2,1}((0,1) \times (0,1))}.$$

Tomando, na estimativa anterior, $g = w$ e atendendo a que $F_{j,\ell} = h_j k_\ell \lambda(w)$, concluímos que

$$\begin{aligned} |F_{j,\ell}| &\leq C \left(h_j^2 \| (au_x)_{xx} \|_{L^1((x_j, x_{j+1}) \times (y_\ell, y_{\ell+1}))} \right. \\ &\quad \left. + k_\ell h_j \| (au_x)_{xy} \|_{L^1((x_j, x_{j+1}) \times (y_\ell, y_{\ell+1}))} + k_\ell^2 \| (au_x)_{yy} \|_{L^1((x_j, x_{j+1}) \times (y_\ell, y_{\ell+1}))} \right). \end{aligned}$$

Estimemos, finalmente $S_1^{(1)} - S_2^{(1)}$. Note-se que para $S_2^{(1)}$ se tem sucessivamente

$$\begin{aligned} S_2^{(1)} &= \sum_{j=p_\ell}^{p_\ell + N_\ell - 1} \int_{y_\ell}^{y_{\ell+1}} \left((au_x)(x_{j+1}, y) - (au_x)(x_j, y) \right) dy \bar{v}_{j+1/2, \ell+1/2} \\ &= - \sum_{j=p_\ell}^{p_\ell + N_\ell} \int_{y_\ell}^{y_{\ell+1}} h_{j-1/2} (au_x)(x_j, y) dy (\delta_x \bar{v}_H)_{j, \ell+1/2} \\ &= - \sum_{j=p_\ell}^{p_\ell + N_\ell} \int_{y_\ell}^{y_{\ell+1}} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} (au_x)(x_j, y) dx dy (\delta_x \bar{v}_H)_{j, \ell+1/2}. \end{aligned}$$

Portanto, vale a representação

$$S_1^{(1)} - S_2^{(1)} = (T_1 + T_2)/2 + T_3 + T_4,$$

com

$$\begin{aligned} T_1 &:= - \sum_{j=p_\ell+1}^{p_\ell+N_\ell} \int_{y_\ell}^{y_{\ell+1}} \left[\frac{h_{j-1}}{2} (u_x(x_{j-1}, y) + u_x(x_j, y)) - \int_{x_{j-1}}^{x_j} u_x(x, y) dx \right] \\ &\quad \times \left(a(x_{j-1}, y) (\delta_x \bar{v}_H)_{j-1, \ell+1/2} + a(x_j, y) (\delta_x \bar{v}_H)_{j, \ell+1/2} \right) dy, \end{aligned}$$

$$T_2 := - \sum_{j=p_\ell+1}^{p_\ell+N_\ell} \int_{y_\ell}^{y_{\ell+1}} \left[\frac{h_{j-1}}{2} (u_x(x_j, y) - u_x(x_{j-1}, y)) \right. \\ \left. + \int_{x_{j-1}}^{x_{j-1/2}} u_x(x, y) dx - \int_{x_{j-1/2}}^{x_j} u_x(x, y) dx \right] \\ \times \left(a(x_j, y) (\delta_x \bar{v}_H)_{j, \ell+1/2} - a(x_{j-1}, y) (\delta_x \bar{v}_H)_{j-1, \ell+1/2} \right) dy,$$

$$T_3 := - \int_{y_\ell}^{y_{\ell+1}} \left[\frac{h_{p_\ell-1}}{2} u_x(x_{p_\ell}, y) - \int_{x_{p_\ell-1/2}}^{x_{p_\ell}} u_x(x, y) dx \right] a(x_{p_\ell}, y) dy (\delta_x \bar{v}_H)_{p_\ell, \ell+1/2},$$

e

$$T_4 := - \int_{y_\ell}^{y_{\ell+1}} \left[\frac{h_{p_\ell+N_\ell}}{2} u_x(x_{p_\ell+N_\ell}, y) - \int_{x_{p_\ell+N_\ell}}^{x_{p_\ell+N_\ell+1/2}} u_x(x, y) dx \right] a(x_{p_\ell+N_\ell}, y) dy \\ \times (\delta_x \bar{v}_H)_{p_\ell+N_\ell, \ell+1/2}.$$

Atendendo a que cada parcela de T_1 traduz o erro da regra dos trapézios, pelo Lema 1.4, obtém-se a estimativa

$$|T_1| \leq C \sum_{j=p_\ell+1}^{p_\ell+N_\ell} h_{j-1}^2 \|u_{xxx}\|_{L^1((x_j, x_{j+1}) \times (y_\ell, y_{\ell+1}))} \|a\|_{L^\infty((x_j, x_{j+1}) \times (y_\ell, y_{\ell+1}))} \\ \times \left(|(\delta_x \bar{v}_H)_{j-1, \ell+1/2}| + |(\delta_x \bar{v}_H)_{j, \ell+1/2}| \right).$$

Em T_2 , o factor $a(x_j, y) (\delta_x \bar{v}_H)_{j, \ell+1/2} - a(x_{j-1}, y) (\delta_x \bar{v}_H)_{j-1, \ell+1/2}$ permite que se obtenha uma estimativa da mesma ordem de T_1 . De facto, notamos que

$$a(x_j, y) (\delta_x \bar{v}_H)_{j, \ell+1/2} - a(x_{j-1}, y) (\delta_x \bar{v}_H)_{j-1, \ell+1/2} \\ = a(x_{j-1/2}, y) \left((\delta_x \bar{v}_H)_{j, \ell+1/2} - (\delta_x \bar{v}_H)_{j-1, \ell+1/2} \right) \\ + \left(a(x_{j-1/2}, y) - a(x_{j-1}, y) \right) (\delta_x \bar{v}_H)_{j-1, \ell+1/2} \\ + \left(a(x_j, y) - a(x_{j-1/2}, y) \right) (\delta_x \bar{v}_H)_{j, \ell+1/2} \\ = h_{j-1} a(x_{j-1/2}, y) (\delta_x^2 \bar{v}_H)_{j-1/2, \ell+1/2} \\ + \frac{h_{j-1}}{2} \left(a_x(\eta_1, y) (\delta_x \bar{v}_H)_{j-1, \ell+1/2} + a_x(\eta_2, y) (\delta_x \bar{v}_H)_{j, \ell+1/2} \right),$$

para algum $\eta_1 \in [x_{j-1}, x_{j-1/2}]$, $\eta_2 \in [x_{j-1/2}, x_j]$, e concluímos assim que

$$|T_2| \leq C \sum_{j=p_\ell+1}^{p_\ell+N_\ell} h_{j-1}^2 \|u_{xx}\|_{L^1((x_j, x_{j+1}) \times (y_\ell, y_{\ell+1}))} \|a\|_{W^1, \infty((x_j, x_{j+1}) \times (y_\ell, y_{\ell+1}))} \\ \times \left(|(\delta_x^2 \bar{v}_H)_{j-1/2, \ell+1/2}| + |(\delta_x \bar{v}_H)_{j-1, \ell+1/2}| + |(\delta_x \bar{v}_H)_{j, \ell+1/2}| \right).$$

Note-se que T_3 e T_4 satisfazem

$$|T_3| \leq \int_{y_\ell}^{y_{\ell+1}} \frac{h_{p_\ell-1}}{8} \|u_{xx}(\cdot, y)\|_{L^1((x_{p_\ell-1/2}, x_{p_\ell}))} |a(x_{p_\ell}, y)| dy |(\delta_x \bar{v}_H)_{p_\ell, \ell+1/2}|$$

e

$$|T_4| \leq \int_{y_\ell}^{y_{\ell+1}} \frac{h_{p_\ell+N_\ell}}{8} \|u_{xx}(\cdot, y)\|_{L^1((x_{p_\ell+N_\ell}, x_{p_\ell+N_\ell+1/2}))} |a(x_{p_\ell+N_\ell}, y)| dy \\ \times |(\delta_x \bar{v}_H)_{p_\ell+N_\ell, \ell+1/2}|.$$

No entanto as estimativas anteriores não apresentam a ordem desejada. Mas, atendendo à igualdade

$$(\delta_x \bar{v}_H)_{p_\ell, \ell+1/2} = - \sum_{i=p_\ell}^j h_i (\delta_x^2 \bar{v}_H)_{i+1/2, \ell+1/2} + (\delta_x \bar{v}_H)_{j+1, \ell+1/2},$$

$j = p_\ell, \dots, p_\ell + N_\ell - 1$, vem

$$\sum_{j=p_\ell}^{p_\ell+N_\ell-1} h_j (\delta_x \bar{v}_H)_{p_\ell, \ell+1/2} = \sum_{j=p_\ell}^{p_\ell+N_\ell-1} h_j \left(\sum_{i=p_\ell}^j h_i (\delta_x^2 \bar{v}_H)_{i+1/2, \ell+1/2} \right) \\ + \sum_{j=p_\ell}^{p_\ell+N_\ell-1} h_j (\delta_x \bar{v}_H)_{j+1, \ell+1/2},$$

e portanto

$$|(\delta_x \bar{v}_H)_{p_\ell, \ell+1/2}| \leq \sum_{j=p_\ell}^{p_\ell+N_\ell-1} h_j |(\delta_x^2 \bar{v}_H)_{j+1/2, \ell+1/2}| \\ + \frac{1}{x_{p_\ell+N_\ell} - x_{p_\ell}} \sum_{j=p_\ell}^{p_\ell+N_\ell-1} h_j |(\delta_x \bar{v}_H)_{j+1, \ell+1/2}|.$$

Assim, obtém-se

$$|T_3| \leq \frac{h_{p_\ell-1}}{8} \|u_{xx}\|_{L^1((x_{p_\ell-1/2}, x_{p_\ell}) \times (y_\ell, y_{\ell+1}))} \|a(x_{p_\ell}, \cdot)\|_{L^\infty((y_\ell, y_{\ell+1}))} \\ \times \left(\sum_{j=p_\ell}^{p_\ell+N_\ell-1} h_j |(\delta_x^2 \bar{v}_H)_{j+1/2, \ell+1/2}| + \frac{1}{x_{p_\ell+N_\ell} - x_{p_\ell}} \sum_{j=p_\ell}^{p_\ell+N_\ell-1} h_j |(\delta_x \bar{v}_H)_{j+1, \ell+1/2}| \right).$$

Em relação a T_4 , prova-se analogamente que

$$|(\delta_x \bar{v}_H)_{p_\ell+N_\ell, \ell+1/2}| \leq \sum_{j=p_\ell}^{p_\ell+N_\ell-1} h_j |(\delta_x^2 \bar{v}_H)_{j+1/2, \ell+1/2}| \\ + \frac{1}{x_{p_\ell+N_\ell} - x_{p_\ell}} \sum_{j=p_\ell}^{p_\ell+N_\ell-1} h_j |(\delta_x \bar{v}_H)_{j+1, \ell+1/2}|,$$

e logo

$$|T_4| \leq \frac{h_{p_\ell+N_\ell}}{8} \|u_{xx}\|_{L^1((x_{p_\ell+N_\ell}, x_{p_\ell+N_\ell+1/2}) \times (y_\ell, y_{\ell+1}))} \|a(x_{p_\ell+N_\ell}, \cdot)\|_{L^\infty((y_\ell, y_{\ell+1}))} \\ \times \left(\sum_{j=p_\ell}^{p_\ell+N_\ell-1} h_j |(\delta_x^2 \bar{v}_H)_{j+1/2, \ell+1/2}| + \frac{1}{x_{p_\ell+N_\ell} - x_{p_\ell}} \sum_{j=p_\ell}^{p_\ell+N_\ell-1} h_j |(\delta_x \bar{v}_H)_{j+1, \ell+1/2}| \right).$$

Consideremos agora todas as parcelas de $(\delta_x a \delta_x u, v_H)_H$ e $(M_H R_{G_H}(a u_x)_x, v_H)_H$, ou seja, somemos em ordem a ℓ . Pela desigualdade de Schwarz e usando uma estimativa análoga a (1.20), obtemos (3.49).

A estimativa (3.50) deduz-se analogamente. ■

Lema 3.18 *Se $u \in H^3(\Omega)$, então valem as estimativas*

$$|(M_x(d\delta_x u), v_H)_H - (M_H R_{G_H}(d u_x), v_H)_H| \\ \leq C \|d\|_{W^{2,\infty}(\Omega)} \left(\sum_{\Omega_H} (h_j^2 + k_\ell^2)^2 \|u_{xxx}\|_{L^2((x_j, x_{j+1}) \times (y_\ell, y_{\ell+1}))}^2 \right)^{1/2} \|v_H\|_{1,H} \quad (3.51)$$

e

$$|(M_y(e\delta_y u), v_H)_H - (M_H R_{G_H}(e u_y), v_H)_H| \\ \leq C \|e\|_{W^{2,\infty}(\Omega)} \left(\sum_{\Omega_H} (h_j^2 + k_\ell^2)^2 \|u_{yyy}\|_{L^2((x_j, x_{j+1}) \times (y_\ell, y_{\ell+1}))}^2 \right)^{1/2} \|v_H\|_{1,H} \quad (3.52)$$

para todo $v_H \in \mathring{W}_H^{1,2}(\Omega)$.

Demonstração: Tal como na demonstração do lema anterior, comecemos por considerar as parcelas de $(M_x(d\delta_x u), v_H)_H$ e $(M_H R_{G_H}(d u_x), v_H)_H$ que têm o factor $\bar{v}_{j+1/2, \ell+1/2}$, para algum j , com ℓ fixo. Obtemos, respectivamente, para

$(M_x(d\delta_x u), v_H)_H$ e $(M_H R_{G_H}(du_x), v_H)_H$, as somas

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=p_\ell}^{p_\ell+N_\ell-1} k_\ell h_j (M_x(d\delta_x u))_{j+1/2, \ell+1/2} \bar{v}_{j+1/2, \ell+1/2} \\
&= \sum_{j=p_\ell}^{p_\ell+N_\ell-1} k_\ell \left[\sum_{i=p_\ell}^j h_i (M_x(d\delta_x u))_{i+1/2, \ell+1/2} \right. \\
&\quad \left. - \sum_{i=p_\ell}^{j-1} h_i (M_x(d\delta_x u))_{i+1/2, \ell+1/2} \right] \bar{v}_{j+1/2, \ell+1/2} \\
&= - \sum_{j=p_\ell}^{p_\ell+N_\ell} k_\ell \sum_{i=p_\ell}^{j-1} h_i (M_x(d\delta_x u))_{i+1/2, \ell+1/2} (\bar{v}_{j+1/2, \ell+1/2} - \bar{v}_{j-1/2, \ell+1/2}) \\
&= - \sum_{j=p_\ell}^{p_\ell+N_\ell} k_\ell h_{j-1/2} \sum_{i=p_\ell}^{j-1} h_i (M_x(d\delta_x u))_{i+1/2, \ell+1/2} (\delta_x \bar{v}_H)_{j, \ell+1/2},
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=p_\ell}^{p_\ell+N_\ell-1} k_\ell h_j (M_H R_{G_H}(du_x))_{j+1/2, \ell+1/2} \bar{v}_{j+1/2, \ell+1/2} \\
&= - \sum_{j=p_\ell}^{p_\ell+N_\ell} k_\ell h_{j-1/2} \sum_{i=p_\ell}^{j-1} h_i (M_x(du_x))_{i+1/2, \ell+1/2} (\delta_x \bar{v}_H)_{j, \ell+1/2} \\
&\quad + \sum_{j=p_\ell}^{p_\ell+N_\ell-1} \frac{h_j}{2} k_\ell \left((E_y)_{j, \ell+1/2} + (E_y)_{j+1, \ell+1/2} \right) \bar{v}_{j+1/2, \ell+1/2},
\end{aligned}$$

em que

$$(E_y)_{j, \ell+1/2} := \frac{(du_x)_{j, \ell} + (du_x)_{j, \ell+1}}{2} - (du_x)_{j, \ell+1/2}.$$

Pelo Lema 1.3, obtemos a estimativa

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=p_\ell}^{p_\ell+N_\ell-1} \frac{h_j}{2} k_\ell |(E_y)_{j, \ell+1/2} + (E_y)_{j+1, \ell+1/2}| |v_{j+1/2, \ell+1/2}| \\
&\leq \sum_{j=p_\ell}^{p_\ell+N_\ell-1} \frac{h_j}{2} k_\ell^2 \left(\|((du_x)_{xx})(x_j, \cdot)\|_{L^1(I_\ell)} + \|((du_x)_{xx})(x_{j+1}, \cdot)\|_{L^1(I_\ell)} \right) \\
&\quad \times |v_{j+1/2, \ell+1/2}|. \tag{3.53}
\end{aligned}$$

Por outro lado, note-se que

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=p_\ell}^{j-1} h_i \left[(M_x(d\delta_x u))_{i+1/2, \ell+1/2} - (M_x(du_x))_{i+1/2, \ell+1/2} \right] \\
&= \sum_{i=p_\ell+1}^{j-1} h_{i-1/2} d_{i, \ell+1/2} ((\delta_x u)_{i, \ell+1/2} - u_x(x_i, y_{\ell+1/2})) \\
&\quad + \frac{h_{j-1}}{2} d_{j, \ell+1/2} ((\delta_x u)_{j, \ell+1/2} - u_x(x_j, y_{\ell+1/2})) \\
&\quad + \frac{h_{p_\ell}}{2} d_{p_\ell, \ell+1/2} ((\delta_x u)_{p_\ell, \ell+1/2} - u_x(x_{p_\ell}, y_{\ell+1/2})).
\end{aligned}$$

A igualdade anterior é semelhante a (2.53). Considerando a estimativa (3.53) e argumentos análogos aos usados para estimar (2.53), obtemos (3.51). A estimativa (3.52) deduz-se analogamente. ■

Lema 3.19 *Se $w \in H^2(\Omega)$, então vale a estimativa*

$$\begin{aligned}
& |(R_H w, v_H)_H - (M_H R_{G_H} w, v_H)_H| \\
& \leq C \left(\sum_{\Omega_H} (h_j^2 + k_\ell^2)^2 \|w\|_{H^2((x_j, x_{j+1}) \times (y_\ell, y_{\ell+1}))} \right)^{1/2} \|v_H\|_{0, H}, \quad (3.54)
\end{aligned}$$

para todo $v_H \in \mathring{L}_H^2(\Omega)$.

Demonstração: A estimativa pretendida obtém-se facilmente considerando a representação

$$\begin{aligned}
(M_H R_{G_H} w)_{j+1/2, \ell+1/2} &= w_{j+1/2, \ell+1/2} + (E_x)_{j+1/2, \ell} + (E_x)_{j+1/2, \ell+1} \\
&\quad + (E_y)_{j+1/2, \ell+1/2},
\end{aligned}$$

onde

$$(E_x)_{j+1/2, \ell} := \frac{w_{j, \ell} + w_{j+1, \ell}}{4} - \frac{w_{j+1/2, \ell}}{2}$$

e

$$(E_y)_{j+1/2, \ell+1/2} := \frac{w_{j+1/2, \ell} + w_{j+1/2, \ell+1}}{2} - w_{j+1/2, \ell+1/2}.$$

Pelo Lema 1.3, concluímos (3.54). ■

Considerando na estimativa (3.54) $w = fu$, obtemos

$$\begin{aligned} & |(fu, v_H)_H - (M_H R_{G_H}(fu), v_H)_H| \\ & \leq C \|f\|_{W^{2,\infty}(\Omega)} H_{max}^2 \left(\sum_{\Omega_H} \|u\|_{H^2((x_j, x_{j+1}) \times (y_\ell, y_{\ell+1}))}^2 \right)^{1/2} \|v_H\|_{0,H}, \end{aligned} \quad (3.55)$$

para todo $v_H \in L_H^2(\Omega)$.

O teorema de convergência seguinte é consequência imediata do Teorema 3.16 e das estimativas (3.49), (3.50), (3.51), (3.52) e (3.55).

Teorema 3.20 *Seja Ω uma união de rectângulos. Se a solução u de (3.1)–(3.2) pertence a $H^4(\Omega)$ então, para $H \in \Lambda$, com H_{max} suficientemente pequeno, o problema (3.3)–(3.4) tem uma única solução u_H que satisfaz*

$$\begin{aligned} \|R_H u - u_H\|_{0,H} & \leq C \left(\sum_{\Omega_H} (h_j^2 + k_\ell^2)^2 \|u\|_{H^4((x_j, x_{j+1}) \times (y_\ell, y_{\ell+1}))}^2 \right)^{1/2} \\ & \leq C H_{max}^2 \|u\|_{H^4(\Omega)}, \end{aligned}$$

em que C depende das funções coeficiente de A mas é independente de H .

3.5 Resultados numéricos

Nesta secção apresentamos um exemplo de aplicação do método estudado neste capítulo com o objectivo de ilustrar o resultado de convergência que estabelecemos.

Consideremos o problema

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f & \text{em } \Omega &= (0, 1) \times (0, 1), \\ u &= 0 & \text{em } \partial\Omega. \end{aligned}$$

em que f é tal que o problema anterior tem solução

$$u(x, y) = [x(x-1)y(y-1)]^2.$$

A Figura 2.2 ilustra o comportamento do erro da solução numérica pelo método (3.3), em 500 malhas formadas por $N-1 \times M-1$ pontos em Ω , com N e M a variar de 10 a 110. A linha representada na figura corresponde à recta dos mínimos quadrados da nuvem de pontos e tem declive 2.1721. Este valor vai de encontro ao esperado pelo Teorema 3.20.

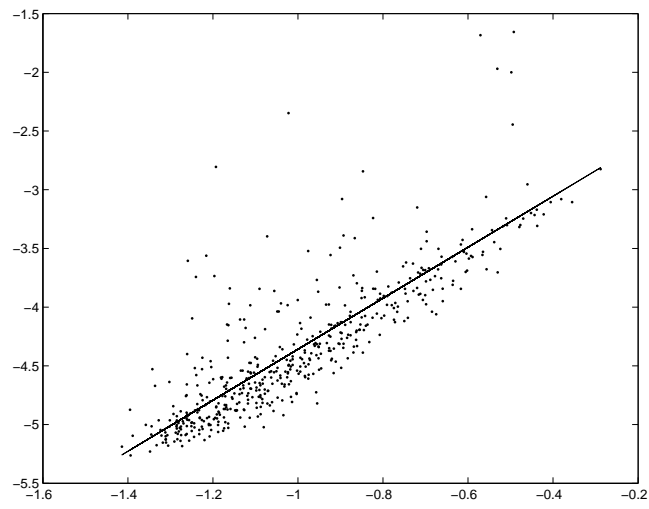


Figura 3.2: Problema (3.5): $\log(\|R_H u - u_H\|_{0,H})$ versus $\log(h_{max})$.

Capítulo 4

Problemas parabólicos

Neste capítulo consideramos problemas de evolução cujos estados estacionários são representados pelas equações estudadas nos capítulos anteriores. Utilizando os resultados de convergência aí obtidos estabelecemos resultados de supraconvergência para semi-discretizações definidas numa rede espacial fixa.

Uma abordagem amplamente usada para o cálculo de soluções numéricas de problemas com condição inicial e fronteira tem por base o chamado método das linhas. Este método é a conjugação de duas fases distintas: discretização espacial e integração temporal. Da discretização espacial resulta um sistema diferencial ordinário cuja solução representa a aproximação semi-discreta da solução do problema inicial. A determinação de uma aproximação totalmente discreta para a solução é feita na segunda fase, sendo usado, para o efeito, um método numérico para problemas diferenciais ordinários. O estudo das propriedades das aproximações obtidas utilizando o método anterior pode ser feito estudando, separadamente, as propriedades da aproximação semi-discreta e da aproximação obtida por integração temporal. O método das linhas é estudado por exemplo em [15], [26], [32], [69], [72] e mais recentemente em [4], [19] e [70].

O objectivo deste capítulo é o estudo das propriedades de convergência de uma aproximação semi-discreta para a solução do seguinte problema de derivadas parciais parabólico,

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} + Au &= g \quad \text{em } (0, T] \times \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{em } [0, T] \times \partial\Omega, \\ u(0, \cdot) &= u_0 \quad \text{em } \bar{\Omega},\end{aligned}\tag{4.1}$$

em que A representa, como habitualmente, um operador diferencial elíptico de segunda ordem.

Na discretização espacial do operador diferencial A consideramos métodos de diferenças finitas ou métodos de elementos finitos que foram estudados ao longo deste trabalho. Os resultados aqui apresentados são estabelecidos com condições menos restritivas que os obtidos por exemplo em [15] ou [19].

Este capítulo tem duas partes. Na primeira parte, Secção 4.1, apresentamos um estudo das propriedades de convergência da aproximação semi-discreta da solução do problema (4.1). O resultado de convergência surge como consequência das estimativas de erro associadas à discretização do problema estacionário

$$\begin{aligned} Av &= g^* & \text{em } \Omega, \\ v &= 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{4.2}$$

e das propriedades da forma sesquilinear associada a um problema discreto induzido pela formulação variacional deste problema. Em primeiro lugar, consideramos a discretização do operador diferencial A utilizando operadores de diferenças finitas centradas nos vértices. Na obtenção de estimativas para o erro da aproximação semi-discreta assim construída são fundamentais as estimativas estabelecidas no Teorema 1.10. Seguidamente usamos operadores de diferenças finitas centradas nas células na discretização do operador diferencial A . Neste caso, no estudo da convergência é fundamental a estimativa apresentada no Teorema 3.20.

Na Secção 4.2 apresentamos resultados numéricos que ilustram os resultados de convergência. Na obtenção das soluções numéricas combinamos a aproximação semi-discreta com o método de Crank-Nicolson.

4.1 Convergência

Por simplicidade de exposição e uniformidade face aos resultados apresentados no Capítulo 3, apresentamos o estudo apenas para o caso em que o domínio Ω é uma união de rectângulos.

Seja A o operador elíptico definido por (1.51) e seja $u_H(t)$ a aproximação semi-discreta para a solução do problema (4.1) e que é solução do problema

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}u_H(t) + A_H u_H(t) &= g_H(t) & \text{em } \Omega_H, \quad t \in (0, T], \\ u_H(t) &= 0 & \text{em } \partial\Omega_H, \quad t \in [0, T], \\ u_H(0) &= u_0 & \text{em } \Omega_H, \end{aligned} \tag{4.3}$$

onde A_H é o operador definido por (1.54) e

$$g_H(t)(x_j, y_\ell) = \frac{1}{|\square_{j,\ell}|} \int_{\square_{j,\ell}} g(t, x, y) dx dy. \quad (4.4)$$

Para cada $t > 0$, a solução do problema de diferenças semi-discreto (4.3) é solução do problema variacional semi-discreto

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u_H}{\partial t}(t), v_H \right)_H + a_H(u_H(t), v_H) &= (g_H(t), v_H)_H \quad \forall v_H \in \mathring{W}_H, \\ u_H(0) &= R_H u_0, \end{aligned} \quad (4.5)$$

onde $a_H(\cdot, \cdot)$ é a forma sesquilinear definida por (1.59) e $(\cdot, \cdot)_H$ é o produto interno definido por (1.62). Estabelecemos seguidamente um resultado de convergência relativamente à norma $\|\cdot\|_H$ que é induzida pelo produto interno $(\cdot, \cdot)_H$. Note-se, em primeiro lugar, que valem os seguintes lemas.

Lema 4.1 *Para $H \in \Lambda$, com H_{max} suficientemente pequeno, tem-se*

$$a_H(w_H, w_H) \geq C_E \|P_H w_H\|_{H^1(\Omega)}^2 - C_K \|P_H w_H\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad \forall w_H \in \mathring{W}_H, \quad (4.6)$$

onde $C_E > 0$ e C_K denotam constantes que dependem dos coeficientes de A mas não da triangulação \mathcal{T}_H .

A prova deste lema baseia-se no facto de $a(\cdot, \cdot)$ ser coerciva (Teorema 8.2.8 de [40]). Conjugando os lemas 1-4 de [30], concluímos que

$$|a_H(v_H, w_H) - a(P_H v_H, P_H w_H)| \longrightarrow 0 \quad (H \in \Lambda),$$

$v_H, w_H \in \mathring{W}_H$, donde, resulta imediatamente (4.6).

Lema 4.2 *As normas $\|\cdot\|_H$ e $\|P_H \cdot\|_{L^2(\Omega)}$ são equivalentes em \mathring{W}_H .*

Demonstração: Sejam $v_H \in \mathring{W}_H$ e $v_{\Delta,1}$, $v_{\Delta,2}$ e $v_{\Delta,3}$ os valores de v_H nos vértices de $\Delta \in \mathcal{T}_H$. Então vale a seguinte igualdade

$$\int_{\Delta} |P_H v_H|^2 dx dy = 2|\Delta| \int_{\Delta_\mu} |(P_H v_H)(\Phi(\xi, \eta))|^2 d\xi d\eta,$$

onde $\Delta_\mu := \{(\xi, \eta) : \xi, \eta \geq 0, \xi + \eta \leq 1\}$ é o triângulo unitário e Φ é uma aplicação linear tal que $\Phi(\Delta_\mu) = \Delta$. Pelo Teorema 8.8.2 de [40],

$$\begin{aligned} \frac{|\Delta|}{12} (|v_{\Delta,1}|^2 + |v_{\Delta,2}|^2 + |v_{\Delta,3}|^2) &\leq \int_{\Delta} |P_H v_H|^2 dx dy \\ &\leq \frac{|\Delta|}{3} (|v_{\Delta,1}|^2 + |v_{\Delta,2}|^2 + |v_{\Delta,3}|^2). \end{aligned}$$

Como cada vértice interior (x_j, y_ℓ) pertence no mínimo a 4 triângulos (sendo a soma das suas áreas $2|\square_{j,\ell}|$) e no máximo a 8 triângulos (sendo a soma das suas áreas $4|\square_{j,\ell}|$), então, somando sobre todos os triângulos obtemos

$$\frac{1}{6} \|v_H\|_H^2 \leq \|P_H v_H\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{4}{3} \|v_H\|_H^2.$$

■

Pretendemos estabelecer uma estimativa para o erro $R_H u(t, \cdot) - u_H(t)$, onde $u(t, \cdot)$ e $u_H(t)$ são soluções de (4.1) e (4.3), respectivamente, com $t \in (0, T]$. Para o efeito assumimos que $\frac{\partial g}{\partial t}$ e $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ existem em $[0, T] \times \Omega$ e são integráveis em Ω e que $u(t, \cdot), \frac{\partial u}{\partial t}(t, \cdot) \in H^3(\Omega)$.

Definimos, para cada $t \in [0, T]$, a solução $u_{H,t}$ do problema auxiliar

$$a_H(u_{H,t}, w_H) = (g_H^*(t), w_H)_H \quad \forall w_H \in \overset{\circ}{W}_H, \quad (4.7)$$

em que

$$g_H^*(t)(x_j, y_\ell) := \frac{1}{|\square_{j,\ell}|} \int_{\square_{j,\ell}} g(t, x, y) - \frac{\partial u}{\partial t}(t, x, y) \, dx \, dy.$$

Note-se que vale a representação

$$u_H(t) - R_H u(t, \cdot) = e_H(t) + \theta_H(t),$$

com

$$e_H(t) := u_H(t) - u_{H,t} \quad \text{e} \quad \theta_H(t) := u_{H,t} - R_H u(t, \cdot). \quad (4.8)$$

Estimemos, separadamente, $\theta_H(t)$ e $e_H(t)$. Como já foi referido, recorreremos aos resultados de convergência do Capítulo 1 para estabelecer as estimativas pretendidas. Pelo Teorema 1.10, existe uma constante positiva $C > 0$, independente de H , tal que para $H \in \Lambda$, com H_{max} suficientemente pequeno

$$\|\theta_H(t)\|_H \leq C \|P_H \theta_H(t)\|_{H^1(\Omega)} \leq C \left(\sum_{\Delta \in \mathcal{T}_H} |\Delta| (\text{diam} \Delta)^4 \|u(t, \cdot)\|_{H^3(\Delta)}^2 \right)^{1/2}.$$

Por outro lado, tendo em conta as definições de $e_H(t)$ e $\theta_H(t)$, para cada $t \in [0, T]$, obtém-se

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial e_H}{\partial t}(t), w_H \right)_H &= -a_H(u_H(t), w_H) + (g_H(t), w_H)_H - \left(\frac{\partial u_{H,t}}{\partial t}, w_H \right)_H \\ &= -a_H(e_H(t), w_H) - \left(\frac{\partial u_{H,t}}{\partial t}, w_H \right)_H + \left(\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_H(t, \cdot), w_H \right)_H, \end{aligned}$$

para todo $w_H \in \mathring{W}_H$, onde

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_H(t, \cdot) := \frac{1}{|\square_{j,\ell}|} \int_{\square_{j,\ell}} \frac{\partial u}{\partial t}(t, \cdot) dx dy.$$

Concluimos deste modo que, para cada $t \in [0, T]$, $e_H(t)$ é solução do problema variacional semi-discreto

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial e_H}{\partial t}(t), w_H\right)_H + a_H(e_H(t), w_H) \\ &= -\left(\frac{\partial \theta_H}{\partial t}(t), w_H\right)_H - \left(R_H \frac{\partial u}{\partial t}(t, \cdot) - \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_H(t, \cdot), w_H\right)_H \quad \forall w_H \in \mathring{W}_H. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Tomemos, em (4.9), $w_H = e_H(t)$. Pelos lemas 4.1 e 4.2, existem constantes $C_E > 0$ e C_K , independentes de H , tais que

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial e_H}{\partial t}(t), e_H(t)\right)_H + C_E \|P_H e_H(t)\|_{H^1(\Omega)}^2 - C_K \|e_H(t)\|_H^2 \\ & \leq \left(\left\|\frac{\partial \theta_H}{\partial t}(t)\right\|_H + \left\|R_H \frac{\partial u}{\partial t}(t, \cdot) - \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_H(t, \cdot)\right\|_H\right) \|e_H(t)\|_H. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Note-se que

$$\left(\frac{\partial e_H}{\partial t}(t), e_H(t)\right)_H = \sum_{(x_j, y_\ell) \in \Omega_H} |\square_{j,\ell}| \frac{\partial e_H}{\partial t}(t, x_j, y_\ell) e_H(t, x_j, y_\ell) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|e_H(t)\|_H^2.$$

Como $\|e_H(t)\|_H$ pode não ser diferenciável (pode acontecer $e_H(t) = 0$), adicionamos a constante ϵ^2 , obtendo

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|e_H(t)\|_H^2 = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\|e_H(t)\|_H^2 + \epsilon^2 \right),$$

e portanto

$$\left(\frac{\partial e_H}{\partial t}(t), e_H(t)\right)_H = \left(\|e_H(t)\|_H^2 + \epsilon^2 \right)^{1/2} \frac{d}{dt} \left(\|e_H(t)\|_H^2 + \epsilon^2 \right)^{1/2}. \quad (4.11)$$

Atendendo a que $\|e_H(t)\|_H \leq \left(\|e_H(t)\|_H^2 + \epsilon^2 \right)^{1/2}$, de (4.10), resulta

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\|e_H(t)\|_H^2 + \epsilon^2 \right)^{1/2} - C_K \|e_H(t)\|_H \leq \left\| \frac{\partial \theta_H}{\partial t}(t) \right\|_H + \left\| R_H \frac{\partial u}{\partial t}(t, \cdot) - \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_H(t, \cdot) \right\|_H. \quad (4.12)$$

Conjugando (4.12) e o Lema de Gronwall, obtém-se

$$\begin{aligned} & \left(\|e_H(t)\|_H^2 + \epsilon^2 \right)^{1/2} \leq \exp(C_K t) \left[\left(\|e_H(0)\|_H^2 + \epsilon^2 \right)^{1/2} \right. \\ & \quad \left. + \int_0^t \exp(-C_K \tau) \left(\left\| \frac{\partial \theta_H}{\partial t}(\tau) \right\|_H + \left\| R_H \frac{\partial u}{\partial t}(\tau, \cdot) - \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_H(\tau, \cdot) \right\|_H \right) d\tau \right]. \end{aligned}$$

Considerando $\epsilon \rightarrow 0$ resulta

$$\|e_H(t)\|_H \leq \exp(C_K t) \left[\|e_H(0)\|_H + \int_0^t \exp(-C_K \tau) \left(\left\| \frac{\partial \theta_H}{\partial t}(\tau) \right\|_H + \left\| R_H \frac{\partial u}{\partial t}(\tau, \cdot) - \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_H(\tau, \cdot) \right\|_H \right) d\tau \right].$$

Note-se que $\frac{\partial \theta_H}{\partial t}(t, \cdot) = \frac{\partial u_{H,t}}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial t}(t, \cdot)$, e que $\frac{\partial u}{\partial t}(t, \cdot)$ e $\frac{\partial u_{H,t}}{\partial t}$ são, respectivamente, soluções de (4.2) e (4.7), se

$$g^* = \frac{\partial g}{\partial t}(t, \cdot) - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, \cdot)$$

e

$$g_H^*(t)(x_j, y_\ell) := \frac{1}{|\square_{j,\ell}|} \int_{\square_{j,\ell}} \frac{\partial g}{\partial t}(t, x, y) - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x, y) dx dy.$$

Novamente pelo Teorema 1.10, existe uma constante positiva $C > 0$, independente de H , tal que para $H \in \Lambda$, com H_{max} suficientemente pequeno, se tem

$$\left\| \frac{\partial \theta_H}{\partial t}(t) \right\|_H \leq C \left(\sum_{\Delta \in \mathcal{T}_H} |\Delta| (\text{diam} \Delta)^4 \left\| \frac{\partial u}{\partial t}(t, \cdot) \right\|_{H^3(\Delta)}^2 \right)^{1/2}.$$

O resultado de convergência para a solução da aproximação semi-discreta (4.5) é estabelecido no seguinte teorema.

Teorema 4.3 *Suponha-se que as malhas $\bar{\Omega}_H$ satisfazem a condição (Geo) e que o problema (4.2) homogêneo tem uma única solução. Então, para $H \in \Lambda$, com H_{max} suficientemente pequeno, as soluções $u(t, \cdot)$ e $u_H(t)$ de (4.1) e (4.5), respectivamente, com A definido por (1.51) e A_H definido por (1.54), satisfazem*

$$\begin{aligned} \|u_H(t) - R_H u(t, \cdot)\|_H \leq C & \left[\left(\sum_{\Delta \in \mathcal{T}_H} (\text{diam} \Delta)^4 \|u(t, \cdot)\|_{H^3(\Delta)}^2 \right)^{1/2} \right. \\ & + \exp(C_K t) \left(\left(\sum_{\Delta \in \mathcal{T}_H} (\text{diam} \Delta)^4 \|u(0, \cdot)\|_{H^3(\Delta)}^2 \right)^{1/2} \right. \\ & + \int_0^t \exp(-C_K \tau) \left(\left(\sum_{\Delta \in \mathcal{T}_H} (\text{diam} \Delta)^4 \left\| \frac{\partial u}{\partial t}(\tau, \cdot) \right\|_{H^3(\Delta)}^2 \right)^{1/2} \right. \\ & \left. \left. + \left\| R_H \frac{\partial u}{\partial t}(\tau, \cdot) - \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_H(\tau, \cdot) \right\|_H \right) d\tau \right] \end{aligned} \quad (4.13)$$

desde que $u(t, \cdot), \frac{\partial u}{\partial t}(t, \cdot) \in H^3(\Omega)$.

Vejam os seguidamente que no Teorema 4.3 é estabelecida uma estimativa de segunda ordem para o erro se forem usados certos tipos de malhas que são na prática frequentemente usadas.

Se w é uma função com derivadas de segunda ordem limitadas em Ω então

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{|\square_{j,\ell}|} \int_{\square_{j,\ell}} w(x,y) dx dy - w(x_j, y_\ell) dx dy \right| \\ & \leq \left| \frac{1}{|\square_{j,\ell}|} \int_{\square_{j,\ell}} \frac{\partial w}{\partial x}(x_j, y_\ell)(x - x_j) + \frac{\partial w}{\partial y}(x_j, y_\ell)(y - y_\ell) dx dy \right| \\ & \quad + \|w\|_{W^{2,\infty}(\square_{j,\ell})} \left| \frac{1}{|\square_{j,\ell}|} \int_{\square_{j,\ell}} \frac{(x - x_j)^2}{2} + \frac{(y - y_\ell)^2}{2} + \frac{(x - x_j)(y - y_\ell)}{2} dx dy \right|, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{|\square_{j,\ell}|} \int_{\square_{j,\ell}} w(x,y) dx dy - w(x_j, y_\ell) dx dy \right| \\ & \leq \frac{1}{4} \left| \frac{\partial w}{\partial x}(x_j, y_\ell) \right| |h_j - h_{j-1}| + \frac{1}{4} \left| \frac{\partial w}{\partial y}(x_j, y_\ell) \right| |k_\ell - k_{\ell-1}| \\ & \quad + \|w\|_{W^{2,\infty}(\square_{j,\ell})} \left(\frac{1}{24} (|h_j^2 - h_j h_{j-1} + h_{j-1}^2| + |k_\ell^2 - k_\ell k_{\ell-1} + k_{\ell-1}^2|) \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{16} |h_j - h_{j-1}| |k_\ell - k_{\ell-1}| \right). \end{aligned} \quad (4.14)$$

Logo, pelo Teorema 4.3, o erro $\|u_H(t) - R_H u(t, \cdot)\|_H$ é de primeira ordem. Considerando, na desigualdade anterior, w substituído por $\frac{\partial u}{\partial t}$ e assumindo que $\bar{\Omega}_H$ é uniforme em ambas as direções x e y , de (4.13) concluímos que a solução de (4.5) é uma aproximação de segunda ordem. A mesma ordem pode ser obtida para malhas não uniformes $\bar{\Omega}_H$ que são imagens de malhas uniformes. De facto, para uma malha em que $(x_j, y_\ell) := (\phi(\xi_j), \psi(\beta_\ell)) \in \bar{\Omega}_H$, onde $\{\xi_j\}$ e $\{\beta_\ell\}$ definem uma malha uniforme de espaçamento h e ϕ e ψ são funções que têm derivadas de segunda ordem limitadas, tem-se, pela fórmula de Taylor, que $|h_j - h_{j-1}| \leq Ch^2$ e $|k_\ell - k_{\ell-1}| \leq Ch^2$. Assim, de (4.13) e (4.14), podemos concluir que a solução de (4.5) é, neste caso, uma aproximação de segunda ordem. Outro processo para a construção de malhas não uniformes usa o princípio da equidistribuição, já referido na Subsecção 1.1.7. Consideremos uma função M definida em $(0, T] \times \Omega$, limitada inferiormente por alguma constante positiva, tal para cada instante $t \in (0, T]$, $M(t, x, y)$ é um indicador da variação espacial da solução do problema (4.1). Seja $\{(x_j, y_\ell), j = 0, \dots, N, \ell = 1, \dots, M\}$ uma malha obtida por equidistribuição da função monitor M , isto é, $x_0 = y_0 = 0$, $x_N = y_M = 1$ e

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} \int_{y_\ell}^{y_{\ell+1}} M(t, x, y) dy dx = \frac{1}{NM} \int_{\Omega} M(t, x, y) dy dx. \quad (4.15)$$

Suponha-se que M é suficientemente regular. Atendendo a (4.15) obtém-se

$$h_j \int_{y_\ell}^{y_{\ell+1}} M(t, \xi_j, y) dy dx = \frac{1}{NM} \int_{\Omega} M(t, x, y) dy dx,$$

e

$$h_{j-1} \int_{y_\ell}^{y_{\ell+1}} M(t, \xi_{j-1}, y) dy dx = \frac{1}{NM} \int_{\Omega} M(t, x, y) dy dx,$$

em que $\xi_{j-1} \in (x_{j-1}, x_j)$, $\xi_j \in (x_j, x_{j+1})$. Consequentemente, pela fórmula de Taylor, deduzimos que

$$(h_j - h_{j-1}) \int_{y_\ell}^{y_{\ell+1}} M(t, \xi_{j-1}, y) dy = h_j \int_{y_\ell}^{y_{\ell+1}} M_x(t, \xi, y) (\xi_j - \xi_{j-1}) dy,$$

em que $\xi = \xi_{j-1} + \alpha(\xi_j - \xi_{j-1})$, com $\alpha \in (0, 1)$. De igual modo, se prova que

$$(k_\ell - k_{\ell-1}) \int_{x_j}^{x_{j+1}} M(t, x, \eta_{\ell-1}) dx = k_\ell \int_{x_j}^{x_{j+1}} M_y(t, x, \eta) (\eta_\ell - \eta_{\ell-1}) dx,$$

em que $\eta = \eta_{\ell-1} + \alpha(\eta_\ell - \eta_{\ell-1})$, $\alpha \in (0, 1)$, $\eta_{\ell-1} \in (y_{\ell-1}, y_\ell)$, $\eta_\ell \in (y_\ell, y_{\ell+1})$. Assim, novamente de (4.13) e (4.14) resulta que a solução de (4.5) é uma aproximação de segunda ordem.

No Teorema 4.4 estabelecemos uma estimativa para a norma $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ do erro, no caso em que A é o operador de Laplace.

Teorema 4.4 *Seja $u(t, \cdot)$ a solução de (4.1) em que A é o operador de Laplace. Nas condições do Teorema 4.3 e para H_{max} suficientemente pequeno, a solução $u_H(t)$ de (4.5) satisfaz*

$$\begin{aligned} \|P_H u_H(t) - P_H R_H u(t, \cdot)\|_{H^1(\Omega)} \leq C & \left[\left(\sum_{\Delta \in \mathcal{T}_H} |\Delta| (\text{diam} \Delta)^4 \|u(t, \cdot)\|_{H^3(\Delta)}^2 \right)^{1/2} \right. \\ & + \left(\sum_{\Delta \in \mathcal{T}_H} |\Delta| (\text{diam} \Delta)^4 \|u(0, \cdot)\|_{H^3(\Delta)}^2 \right. \\ & + \sum_{\Delta \in \mathcal{T}_H} |\Delta| (\text{diam} \Delta)^4 \int_0^t \left\| \frac{\partial u}{\partial t}(\tau, \cdot) \right\|_{H^3(\Delta)}^2 d\tau \\ & \left. + \int_0^t \|P_H (R_H \frac{\partial u}{\partial t}(\tau, \cdot) - (\frac{\partial u}{\partial t})_H(\tau, \cdot))\|_{L^2(\Omega)}^2 d\tau \right]^{1/2}, \quad (4.16) \end{aligned}$$

desde que $u(t, \cdot), \frac{\partial u}{\partial t}(t, \cdot) \in H^3(\Omega)$.

Demonstração: Sejam $e_H(t)$ e $\theta_H(t)$ definidos por (4.8), considerando em (4.2) e (4.7), respectivamente, o operador de Laplace e a forma sesquilinear discreta correspondente. Pretendemos obter uma estimativa para

$$\|u_H(t) - R_H u(t, \cdot)\|_{H^1(\Omega)} \leq \|e_H(t)\|_{H^1(\Omega)} + \|\theta_H(t)\|_{H^1(\Omega)}.$$

Pelo Teorema 1.10, existe $C > 0$ independente de H tal que, para $H \in \Lambda$, com H_{max} suficientemente pequeno,

$$\|P_H \theta_H(t)\|_{H^1(\Omega)} \leq C \left(\sum_{\Delta \in \mathcal{T}_H} |\Delta| (\text{diam} \Delta)^4 \left\| \frac{\partial u}{\partial t}(t, \cdot) \right\|_{H^3(\Delta)}^2 \right)^{1/2}.$$

Com o fim de estimar $\|P_H e_H(t)\|_{H^1(\Omega)}$, consideremos em (4.9) $w_H = \frac{\partial e_H}{\partial t}(t)$. As normas $\|\cdot\|_H$ e $\|P_H \cdot\|_{L^2(\Omega)}$ são equivalentes em \mathring{W}_H e portanto existem constantes C_1 e C_2 positivas tais que

$$C_2 \|P_H w_H\|_{L^2(\Omega)} \leq \|w_H\|_H \leq C_1 \|P_H w_H\|_{L^2(\Omega)} \quad \forall w_H \in \mathring{W}_H.$$

De modo análogo a (4.11), obtemos

$$a_H \left(e_H(t), \frac{\partial e_H}{\partial t}(t) \right) = \left(\nabla P_H e_H(t), \nabla P_H \frac{\partial e_H}{\partial t}(t) \right)_{L^2(\Omega)} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla P_H e_H(t)\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Da igualdade anterior e (4.9) resulta

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{\partial e_H}{\partial t}(t) \right\|_H^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |P_H e_H(t)|_{H^1(\Omega)}^2 \\ & \leq \left\| \frac{\partial \theta_H}{\partial t}(t) \right\|_H \left\| \frac{\partial e_H}{\partial t}(t) \right\|_H + \left\| R_H \frac{\partial u}{\partial t}(t, \cdot) - \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_H(t, \cdot) \right\|_H \left\| \frac{\partial e_H}{\partial t}(t) \right\|_H \end{aligned}$$

e portanto

$$\begin{aligned} & C_2^2 \left\| P_H \frac{\partial e_H}{\partial t}(t) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |P_H e_H(t)|_{H^1(\Omega)}^2 \\ & \leq \frac{1}{4\xi^2} \left(\left\| P_H \frac{\partial \theta_H}{\partial t}(t) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\| P_H \left(R_H \frac{\partial u}{\partial t}(t, \cdot) - \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_H(t, \cdot) \right) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \\ & \quad + C_1^2 \xi^2 \left\| P_H \frac{\partial e_H}{\partial t}(t) \right\|_{L^2(\Omega)}^2, \end{aligned}$$

qualquer que seja a constante ξ . Tomando ξ tal que $\xi^2 < C_2^2/C_1^2$, obtemos

$$\begin{aligned} |P_H e_H(t)|_{H^1(\Omega)} & \leq \left(|P_H e_H(0)|_{H^1(\Omega)}^2 \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{2\xi^2} \int_0^t \left\| P_H \frac{\partial \theta_H}{\partial t}(\tau, \cdot) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\| P_H \left(R_H \frac{\partial u}{\partial t}(\tau, \cdot) - \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_H(\tau, \cdot) \right) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 d\tau \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Concluimos a demonstração usando o Teorema 1.10. ■

Consideramos agora a discretização do operador diferencial A por diferenças finitas centradas nas células. No que se segue usamos a notação introduzida no Capítulo 2.

Seja, em (4.5), A_H definido por (3.5) e $g_H(t) := M_H g(t, \cdot)$. Definimos, tal como anteriormente, para cada $t \in [0, T]$, a solução $u_{H,t}$ do problema auxiliar

$$a_H(u_{H,t}, w_H) = (g_H^*(t), w_H)_H \quad \forall w_H \in \mathring{W}_H,$$

mas, neste caso,

$$g_H^*(t) := M_H \left(g(t, \cdot) - \frac{\partial u}{\partial t}(t, \cdot) \right).$$

Pretendemos estimar

$$R_H u(t, \cdot) - u_H(t) = e_H(t) + \theta_H(t),$$

em que $e_H(t)$ e $\theta_H(t)$ são definidos por (4.8).

Atendendo ao Teorema 3.20, para $H \in \Lambda$, com H_{max} suficientemente pequeno, vale a estimativa

$$\|\theta_H(t)\|_H \leq C H_{max}^2 \|u(t, \cdot)\|_{H^4(\Omega)}.$$

Estimemos agora $e_H(t)$, para cada $t \in [0, T]$. Como $e_H(t)$ é solução do problema semi-discreto

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial e_H}{\partial t}(t), w_H \right)_H + a_H(e_H(t), w_H) \\ &= - \left(\frac{\partial \theta_H}{\partial t}(t), w_H \right)_H - \left(R_H \frac{\partial u}{\partial t}(t, \cdot) - M_H \left(\frac{\partial u}{\partial t}(t, \cdot) \right), w_H \right)_H \quad \forall w_H \in \mathring{W}_H, \end{aligned}$$

então, pelo Lema 3.9, obtém-se

$$\left(\|e_H(t)\|_H^2 + \epsilon^2 \right)^{1/2} - C_K \|e_H(t)\|_H \leq \left\| \frac{\partial \theta_H}{\partial t}(t) + R_H \frac{\partial u}{\partial t}(t, \cdot) - M_H \left(\frac{\partial u}{\partial t}(t, \cdot) \right) \right\|_H,$$

onde $C_E > 0$ e C_K são constantes independentes de H e ϵ é uma constante arbitrária. Aplicando o Lema de Gronwall à desigualdade anterior e considerando $\epsilon \rightarrow 0$, vem finalmente

$$\begin{aligned} \|e_H(t)\|_H &\leq \exp(C_K t) \left[\|e_H(0)\|_H \right. \\ &\quad \left. + \int_0^t \exp(-C_K \tau) \left(\left\| \frac{\partial \theta_H}{\partial t}(\tau) + R_H \frac{\partial u}{\partial t}(\tau, \cdot) - M_H \left(\frac{\partial u}{\partial t}(\tau, \cdot) \right) \right\|_H \right) d\tau \right]. \end{aligned}$$

Pelo Teorema 3.20 podemos estabelecer estimativas para $\|e_H(0)\|_H$ e $\|\frac{\partial \theta_H}{\partial t}(\tau)\|_H$. Por outro lado, a estimativa para $\|R_H \frac{\partial u}{\partial t}(\tau, \cdot) - M_H(\frac{\partial u}{\partial t}(\tau, \cdot))\|_H$ obtém-se pelo Lema 3.19. Provamos desta forma o resultado seguinte.

Teorema 4.5 *Seja Ω uma união de rectângulos. Para cada $t \in (0, T]$, sejam $u(t, \cdot)$ a solução de (4.1), com A definido por (3.1), $u_H(t)$ a solução de (4.5) com A_H definido por (3.5) e $g_H(t) := M_H g(t, \cdot)$. Então, existe $C > 0$ tal que para $H \in \Lambda$, com H_{max} suficientemente pequeno, se tem*

$$\|u_H(t) - R_H u(t, \cdot)\|_H \leq C \left[H_{max}^2 \|u(t, \cdot)\|_{H^4(\Omega)} + \exp(C_K t) \left(H_{max}^2 \|u(0, \cdot)\|_{H^4(\Omega)} + \int_0^t \exp(-C_K \tau) H_{max}^2 \left\| \frac{\partial u}{\partial t}(\tau, \cdot) \right\|_{H^4(\Omega)} d\tau \right) \right],$$

desde que $u(t, \cdot), \frac{\partial u}{\partial t}(t, \cdot) \in H^4(\Omega)$.

4.2 Resultados numéricos

Nesta secção apresentamos aplicações do método (4.3), com o objectivo de ilustrar o resultado de convergência que obtivemos na secção anterior.

Seja $u_{j,\ell}^n$ a solução numérica obtida pela combinação dos métodos Crank-Nicolson e (4.5), no instante t_n para ponto $(x_j, y_\ell) \in \Omega_H$. Denotamos por u_H^n a função de rede definida por $u_H^n(x_j, y_\ell) := u_{j,\ell}^n$. Tendo em conta as propriedades de convergência do método de Crank-Nicolson, o erro

$$u(t_n, x_j, y_\ell) - u_{j,\ell}^n = u(t_n, x_j, y_\ell) - u_H(t_n)(x_j, y_\ell) + u_H(t_n)(x_j, y_\ell) - u_{j,\ell}^n,$$

onde $u_H(t_n)$ é solução da semi-discretização (4.3) no instante $t = t_n$, é dominado pelo termo de discretização espacial

$$u(t_n, x_j, y_\ell) - u_H(t_n)(x_j, y_\ell).$$

Nos resultados numéricos que apresentamos seguidamente, calculamos $\|R_H u(t_n, \cdot) - u_H^n\|_H$ em vez de $\|R_H u(t_n, \cdot) - u_H(t_n)\|_H$.

Consideremos o problema (4.1), onde A é o operador de Laplace, definido no rectângulo $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$, com g e u_0 tais que o problema tem solução $u(t, x, y) = t \sin(\pi x) \sin(\pi y)$.

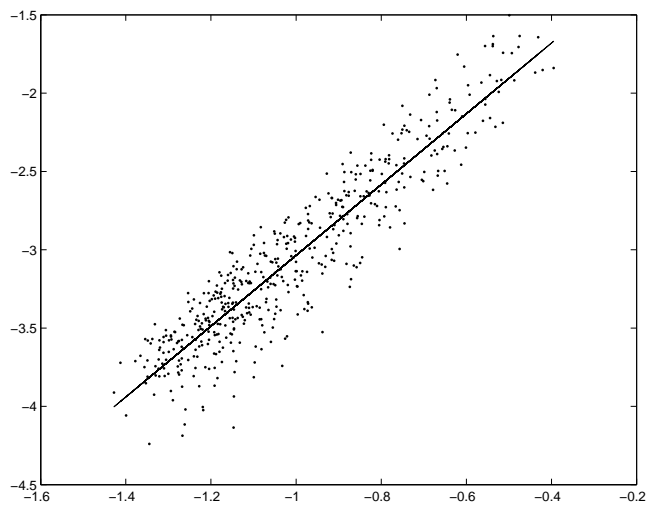


Figura 4.1: $\log(\|R_H u(1, \cdot) - u_H^{40}\|_H)$ versus $\log(h_{max})$.

A Figura 4.1 ilustra o comportamento do erro da solução numérica em 500 malhas geradas aleatoriamente, sendo essas malhas formadas por $N - 1 \times M - 1$ pontos em Ω , com N e M a variar de 10 a 110. Para a integração em ordem ao tempo, usamos o método Crank-Nicolson com passo uniforme $\Delta_t = 0.025$. A linha, que corresponde à recta dos mínimos quadrados, tem declive 2.2602.

Apêndice A

Espaços de Sobolev

Nesta secção descrevemos os espaços de Sobolev e apresentamos resultados frequentemente usados na teoria dos elementos finitos que desempenham um papel fundamental neste trabalho.

Existe uma vasta literatura onde se encontra informação detalhada sobre os espaços referidos. Relativamente à notação que usamos e à formulação dos teoremas A.1–A.4, seguimos de perto [1].

Sejam Ω um domínio de \mathbb{R}^n , $n \in \mathbb{N}$. Denotamos por $L^p(\Omega)$ a classe de todas as funções de mensuráveis à Lebesgue, v , definidas em Ω , tais que

$$\|v\|_{L^p(\Omega)} := \left(\int_{\Omega} |v(x)|^p dx \right)^{1/p} < \infty, \quad 1 \leq p < \infty,$$

$$\|v\|_{L^\infty(\Omega)} := \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} |v(x)| < \infty, \quad p = \infty.$$

O espaço de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$, $m \in \mathbb{N}_0$ e $1 \leq p \leq \infty$, é definido da seguinte forma

$$W^{m,p}(\Omega) := \{v \in L^p(\Omega) : D^\alpha v \in L^p(\Omega), |\alpha| \leq m\},$$

onde $D^\alpha v$ representa a derivada no sentido das distribuições. Aqui, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$

é um n -uplo de inteiros não negativos, $|\alpha| = \sum_{j=1}^n \alpha_j$ e $D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$. A

norma em $W^{m,p}(\Omega)$ é definida por

$$\|v\|_{W^{m,p}(\Omega)} := \left(\sum_{i=1}^m |v|_{W^{i,p}(\Omega)}^p \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

onde

$$|v|_{W^{m,p}(\Omega)} := \left(\sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha v\|_{L^p(\Omega)} \right)^{1/p},$$

e

$$\|v\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} := \max_{0 \leq i \leq m} |v|_{W^{i,\infty}(\Omega)}, \quad |v|_{W^{i,\infty}(\Omega)} := \max_{|\alpha|=i} \|D^\alpha v\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

$W^{m,2}(\Omega)$ é um espaço de Hilbert com produto interno

$$(v, w)_m := \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} D^\alpha v(x) \overline{D^\alpha w(x)} dx.$$

Vamos agora definir o espaço de Sobolev $W^{s,p}(\Omega)$, onde s é um índice real positivo. Para $0 < \sigma < 1$, sejam

$$|v|_{W^{\sigma,p}(\Omega)} := \left(\int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|v(x) - v(y)|^p}{|x - y|^{n+\sigma p}} dx dy \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

e

$$|v|_{W^{\sigma,\infty}(\Omega)} := \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} \frac{|v(x) - v(y)|}{|x - y|^\sigma}.$$

O espaço $W^{s,p}(\Omega)$, $s = [s] + \sigma$, $0 < \sigma < 1$, e $1 \leq p < \infty$, é definido como o conjunto de funções $v \in W^{[s],p}(\Omega)$ com a norma

$$\|v\|_{W^{s,p}(\Omega)} := \left(\|v\|_{W^{[s],p}(\Omega)}^p + |v|_{W^{\sigma,p}(\Omega)}^p \right)^{1/p},$$

onde

$$|v|_{W^{s,p}(\Omega)} := \left(\sum_{|\alpha|=[s]} |D^\alpha v|_{W^{s-[s],p}(\Omega)}^p \right)^{1/p}.$$

O espaço de Sobolev $W^{s,\infty}(\Omega)$ define-se analogamente introduzindo as alterações naturais relativamente às normas.

Seja $C^m(\Omega)$, $m \in \mathbb{N}_0$, o espaço vectorial das funções φ contínuas em Ω tais que as suas derivadas de ordem $|\alpha| \leq m$, $D^\alpha \varphi$, são contínuas em Ω . Escrevemos $C(\Omega)$ para denotar $C^0(\Omega)$. Seja $C^\infty(\Omega) := \bigcap_{m=0}^{\infty} C^m(\Omega)$. Os subespaços $C_0(\Omega)$ e $C_0^\infty(\Omega)$ são formados por todas as funções em $C(\Omega)$ e $C^\infty(\Omega)$, respectivamente, que têm suporte compacto em Ω .

Denotamos por $W_0^{s,2}(\Omega)$ o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ em $W^{s,2}(\Omega)$. Para os espaços $W^{s,2}(\Omega)$ e $W_0^{s,2}(\Omega)$ usamos, respectivamente, a representação $H^s(\Omega)$ e $H_0^s(\Omega)$.

Teorema A.1 Os espaços $C_0(\Omega)$ e $C_0^\infty(\Omega)$ são densos em $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$.

Sejam $m \in \mathbb{N}$ e $1 \leq p < \infty$. Seja p' o expoente conjugado de p ($p' = \infty$ se $p = 1$ e $p' = p/(p-1)$ se $1 < p < \infty$). Denotamos por $W^{-m,p'}(\Omega)$ o espaço dual de $W_0^{m,p}(\Omega)$ e por $\|\cdot\|_{-m,p'}$ a respectiva norma. Se $p = p' = 2$, representamos o espaço $W^{-m,2}(\Omega)$ por $H^{-m}(\Omega)$ e a respectiva norma por $\|\cdot\|_{-m}$.

Os teoremas de mergulho têm um papel fundamental na teoria dos espaços de Sobolev. Note-se que muitos autores usam a designação “imersão” em vez de “mergulho”.

Teorema A.2 Seja Ω um domínio com a propriedade do cone em \mathbb{R}^n . Sejam $s > 0$ e $1 < p < n$. Os seguintes mergulhos verificam-se

- a) $W^{s,p}(\Omega) \rightarrow L^r(\Omega)$ se $n > sp$, $p \leq r \leq np/(n-sp)$;
- b) $W^{s,p}(\Omega) \rightarrow L^r(\Omega)$ se $n = sp$, $p \leq r < \infty$;
- c) $W^{s,p}(\Omega) \rightarrow C(\bar{\Omega})$ se $n < sp$.

Teorema A.3 Sejam $0 \leq t \leq s < \infty$, $0 < p \leq q < \infty$ e $s - n/p \geq t - n/q$. Então verifica-se o mergulho

$$W^{t,p}(\Omega) \rightarrow W^{s,q}(\Omega).$$

Teorema A.4 (Rellich-Kondrachov) Sejam Ω um domínio em \mathbb{R}^n , Ω_0 um subdomínio de Ω limitado e Ω_0^k a intersecção de Ω_0 com um plano de dimensão k em \mathbb{R}^n . Sejam j, m inteiros com $j \geq 0$, $m \geq 1$, e $1 \leq p < \infty$.

- a) Se Ω tem a propriedade do cone e $mp \leq n$ então os seguintes mergulhos são compactos

$$\begin{aligned} W^{j+m,p}(\Omega) &\rightarrow W^{j,q}(\Omega_0^k) & \text{se } 0 < n - mp < k \leq n \text{ e} \\ & & 1 \leq q < kp/(n - mp), \\ W^{j+m,p}(\Omega) &\rightarrow W^{j,q}(\Omega_0^k) & \text{se } n = mp, 1 \leq k \leq n \text{ e } 1 \leq q < \infty. \end{aligned}$$

- b) Se Ω tem a propriedade do cone e $mp > n$ então os seguintes mergulhos são compactos

$$\begin{aligned} W^{j+m,p}(\Omega) &\rightarrow C^j(\bar{\Omega}), \\ W^{j+m,p}(\Omega) &\rightarrow W^{j,q}(\Omega_0^k) & \text{se } 1 \leq q \leq \infty. \end{aligned}$$

O teorema seguinte, cuja demonstração se encontra, por exemplo, em [76], é um resultado de compacidade em espaços $L^p(\Omega)$.

Teorema A.5 (Critério de compacidade de Kolmogorov) *Seja Ω um subconjunto aberto e limitado de \mathbb{R}^n , $n \geq 1$, e seja $M \subset L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$. Então M é relativamente compacto se e só se*

a) M é limitado em $L^p(\Omega)$,

b) $\lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{\Omega} |\varphi(x + \eta) - \varphi(x)|^p dx = 0$, verifica-se uniformemente para $\varphi \in M$.

O Lema de Bramble-Hilbert tem um papel fundamental na obtenção de estimativas para funcionais lineares em espaços de Sobolev. Este lema está amplamente divulgado na literatura e a título de exemplo referimos [10]–[12] e [17]. O artigo de Dupon e Scott, [23], é uma referência clássica para a demonstração do Lema de Bramble-Hilbert no espaço $W^{s,p}(\Omega)$, com s um real positivo.

Lema A.6 (Bramble-Hilbert) *Sejam Ω um subconjunto aberto de \mathbb{R}^n com fronteira de Lipschitz contínua, s um número real positivo e P_s o conjunto dos polinómios (com n variáveis) de grau menor que s . Então existe uma constante $C = C(\Omega, s, p)$ tal que*

$$\inf_{P \in P_s} \|v - P\|_{W^{s,p}(\Omega)} \leq C |v|_{W^{s,p}(\Omega)} \quad \forall v \in W^{s,p}(\Omega).$$

Note-se que se f é uma funcional linear limitada no espaço $W^{s,p}(\Omega)$ tal que

$$f(P) = 0 \quad \forall P \in P_s,$$

então, pelo lema anterior,

$$|f(v)| \leq C \|f\|_{s,p,\Omega}^* |v|_{W^{s,p}(\Omega)} \quad \forall v \in W^{s,p}(\Omega),$$

onde $\|\cdot\|_{s,p,\Omega}^*$ é a norma no espaço dual de $W^{s,p}(\Omega)$.

Lema A.7 (Gronwall) *Sejam g e v funções contínuas em $[0, T]$, com g diferenciável em $(0, T)$, e $h \in L^1(0, T)$ uma função não negativa, tais que*

$$v(t) \leq g(t) + \int_0^t h(\tau)v(\tau) d\tau \quad \forall t \in [0, T].$$

Então

$$v(t) \leq \exp(H(t)) \left(g(0) + \int_0^t g'(\tau) \exp(-H(\tau)) d\tau \right) \quad \forall t \in [0, T],$$

$$\text{com } H(t) = \int_0^t h(\tau) d\tau.$$

A demonstração deste lema pode ser consultada, por exemplo, em [77].

Apêndice B

Operadores elípticos

Nesta secção fazemos o resumo das principais definições relacionadas com operadores elípticos que são usadas ao longo do trabalho.

Seja Ω um subconjunto aberto e limitado de \mathbb{R}^n , $n \in \mathbb{N}$. Consideremos o operador diferencial de ordem $2m$, $m \in \mathbb{N}$,

$$A := \sum_{|\alpha| \leq m} \sum_{|\beta| \leq m} (-1)^{|\beta|} D^\beta a_{\alpha\beta}(x) D^\alpha. \quad (\text{B.1})$$

A classificação do operador diferencial anterior, depende apenas das propriedades dos coeficientes das derivadas de ordem mais elevadas, isto é, das derivadas de ordem $2m$. Os termos de ordem $2m$ constituem a parte principal de operador, que denotamos por $A^{(2m)}$,

$$A^{(2m)} := (-1)^m \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} D^\beta a_{\alpha\beta}(x) D^\alpha.$$

A é elíptico em $x \in \Omega$ se

$$\sum_{|\alpha|=|\beta|=m} a_{\alpha\beta}(x) \xi^{\alpha+\beta} \neq 0 \quad \forall 0 \neq \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Aqui, $\xi^{\alpha+\beta}$ é uma abreviatura para o polinómio $\xi_1^{\alpha_1+\beta_1} \xi_2^{\alpha_2+\beta_2} \dots \xi_n^{\alpha_n+\beta_n}$.

A é uniformemente elíptico se existe $\epsilon > 0$ tal que

$$\left| \operatorname{Re} \left(\sum_{|\alpha|=|\beta|=m} a_{\alpha\beta}(x) \xi^{\alpha+\beta} \right) \right| \geq \epsilon |\xi|^{2m} \quad \forall x \in \Omega \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n. \quad (\text{B.2})$$

Seguindo [56], introduzimos agora o conceito de sistema uniformemente e fortemente elíptico em Ω .

Consideremos o sistema de equações diferenciais

$$l_{ij}u_j = f_i \quad i = 1, \dots, N,$$

em que

$$l_{ij} = \sum_{|\rho|=0}^{|s_i|} \sum_{|\sigma|=0}^{|s_j|} (-1)^{|\rho|} D^\rho a_{ij}^{\rho,\sigma}(x) D^\sigma,$$

$u = (u_1, \dots, u_N)$ e $f = (f_1, \dots, f_N)$. O sistema diz-se uniformemente fortemente elíptico se as funções coeficiente $a_{ij}^{\rho,\sigma}$ são uniformemente limitadas e se existe uma constante positiva C_0 tal que, para cada $\xi \in \mathbb{R}^n$ e cada vector de números complexos $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_N)$, a desigualdade

$$\sum_{i,j}^N \operatorname{Re}(\xi^{s_i} a_{ij}^{s_i,s_j}(x) \xi^{s_j} \eta_i \bar{\eta}_j) \geq C_0 \sum_{i=1}^N |\eta_i|^2 |\xi|^{2|s_i|} \quad (\text{B.3})$$

é válida para qualquer $x \in \Omega$.

Vamos agora apresentar os conceitos de elipticidade e coercividade de uma forma sesquilinear. Sejam V e H espaços de Hilbert tais que $V \subset H \subset V'$ em que estes mergulhos são contínuos e densos e seja $a(.,.) : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ uma forma sesquilinear. Dizemos que $a(.,.)$ é V -elíptica se

$$|a(v, w)| \leq C_l \|v\|_V \|w\|_V \quad \forall v, w \in V, \quad (\text{B.4})$$

e

$$|a(v, v)| \geq C_E \|v\|_V^2 \quad \forall v \in V, \quad (\text{B.5})$$

onde C_l e C_E são constantes positivas independentes de v e w .

Dizemos que $a(.,.)$ é V -coerciva se satisfaz (B.4) e se existem constantes $C_E > 0$ e C_K tais que

$$|a(v, v)| \geq C_E \|v\|_V^2 - C_K \|v\|_H^2 \quad \forall v \in V. \quad (\text{B.6})$$

A (B.6) chamamos desigualdade de Gårding.

Apêndice C

Convergência discreta

Nesta seção apresentamos conceitos gerais de Teoria de Convergência Discreta. Sobre este assunto destacamos os trabalhos de Grigorieff ([37]), Reinhardt ([59]) e Stummel ([67], [68]).

Sejam X um conjunto e $(X_\iota)_{\iota \in I}$ uma sucessão de conjuntos tais que X e X_ι , $\iota \in I$, são não vazios. A aplicação \lim com imagens em X e cujo domínio é o conjunto de sucessões $(u_\iota)_{\iota \in I}$ de elementos $u_\iota \in X_\iota$, $\iota \in I$, diz-se uma convergência discreta se as seguintes propriedades se verificam:

- (L1) se a sucessão $(u_\iota)_{\iota \in I}$ converge discretamente para u , então cada subsucessão $(u_\iota)_{\iota \in I'}$ converge discretamente para u ;
- (L2) se sucessão $(u_\iota)_{\iota \in I}$ não converge discretamente para u , então existe subsucessão $(u_\iota)_{\iota \in I'}$ tal que nenhuma das suas subsucessões $(u_\iota)_{\iota \in I''}$ converge discretamente para u .

À imagem $u \in X$ da aplicação \lim em $(u_\iota)_{\iota \in I}$ chamamos limite discreto de $(u_\iota)_{\iota \in I}$. Como objectivo de simplificar a notação escrevemos $u_\iota \rightarrow u$ ($\iota \in I$), para representar $\lim(u_\iota)_{\iota \in I} = u$.

Se a aplicação \lim é uma convergência discreta e sobrejectiva então o par $(X, \prod_{\iota \in I} X_\iota)$ diz-se uma aproximação discreta em relação a \lim .

Definimos seguidamente convergência discreta, estabilidade e consistência de uma sucessão de operadores e apresentamos um teorema que relaciona estes conceitos.

Considerem-se os operadores $A : X \rightarrow Y$ e $A_\iota : X_\iota \rightarrow Y_\iota, \iota \in I$. Para simplificar a notação usamos o símbolo \lim para denotar quer a convergência discreta de $\prod_{\iota \in I} X_\iota$ em X , quer a convergência discreta de $\prod_{\iota \in I} Y_\iota$ em Y .

Dizemos que a sucessão $(A_\iota)_{\iota \in I}$ converge discretamente para A e escrevemos

$$A_\iota \rightarrow A \quad (\iota \in I),$$

se para todo $u \in X$ e toda a sucessão discretamente convergente $(u_\iota)_{\iota \in I}, u_\iota \in X_\iota$, se tem

$$u_\iota \rightarrow u \quad \implies \quad A_\iota u_\iota \rightarrow Au \quad (\iota \in I).$$

A sucessão $(A_\iota)_{\iota \in I}$ é estável se, para quaisquer sucessões $(u_\iota)_{\iota \in I}$ e $(v_\iota)_{\iota \in I}$ tais que $(A_\iota u_\iota)_{\iota \in I}$ e $(A_\iota v_\iota)_{\iota \in I}$ convergem discretamente, vale

$$\lim(u_\iota)_{\iota \in I} = \lim(v_\iota)_{\iota \in I} \quad \implies \quad \lim(A_\iota u_\iota)_{\iota \in I} = \lim(A_\iota v_\iota)_{\iota \in I}.$$

A sucessão de operadores $(A_\iota)_{\iota \in I}$ diz-se consistente com A se para todo $u \in X$ existe uma sucessão $(u'_\iota)_{\iota \in I}, u'_\iota \in X_\iota$, tal que

$$u'_\iota \rightarrow u \quad \text{e} \quad A_\iota u'_\iota \rightarrow Au \quad (\iota \in I).$$

Teorema C.1 *A estabilidade de $(A_\iota)_{\iota \in I}$ e a consistência com A são necessárias e suficientes para a sobrejectividade de $\lim : \prod_{\iota \in I} X_\iota \rightarrow X$ e a convergência discreta $A_\iota \rightarrow A \quad (\iota \in I)$.*

Apresentamos seguidamente outro conceito fundamental.

A sucessão $(A_\iota)_{\iota \in I}$ diz-se inversamente estável se para quaisquer sucessões $(A_\iota u_\iota)_{\iota \in I}$ e $(A_\iota v_\iota)_{\iota \in I}$ tais que $(u_\iota)_{\iota \in I}$ e $(v_\iota)_{\iota \in I}$ convergem discretamente, vale

$$\lim(A_\iota u_\iota)_{\iota \in I} = \lim(A_\iota v_\iota)_{\iota \in I} \quad \implies \quad \lim(u_\iota)_{\iota \in I} = \lim(v_\iota)_{\iota \in I}.$$

Note-se que muitas vezes se usa apenas o termo “estável” para o conceito “inversamente estável”.

O teorema seguinte estabelece condições suficientes para a relação de convergência

$$A_\iota u_\iota \rightarrow Au \quad \implies \quad u_\iota \rightarrow u \quad (\iota \in I). \quad (\text{C.1})$$

Teorema C.2 *Seja $(A_\iota)_{\iota \in I}$ uma sucessão inversamente estável. Então a consistência de $(A_\iota)_{\iota \in I}$ com A é uma condição necessária e suficiente para a sobrejectividade de $\lim : \prod_{\iota \in I} X_\iota \rightarrow X$, a injectividade de A e a relação de convergência inversa (C.1).*

Introduzimos finalmente o conceito de compacidade discreta.

Sejam $Z_\iota \subseteq X_\iota$, $\iota \in I$, conjuntos não vazios. O subespaço $\prod_{\iota \in I} Z_\iota$ de $\prod_{\iota \in I} X_\iota$ diz-se discretamente compacto se para toda a subsucessões I' de I e toda a sucessão de elementos $u_\iota \in Z_\iota$, $\iota \in I$, existem $u \in X$ e uma subsucessão I'' de I' tais que $u_\iota \rightarrow u$ ($\iota \in I''$). Em particular, a sucessão $(u_\iota)_{\iota \in I}$ de elementos $u_\iota \in X_\iota$, $\iota \in I$, diz-se discretamente compacta se $\prod_{\iota \in I} \{u_\iota\}$ é discretamente compacto, isto é, se para toda a sucessão I' de I , existem $u \in X$ e uma subsucessão $I'' \subseteq I'$ tais que $u_\iota \rightarrow u$ ($\iota \in I''$).

Sejam X , Y , X_ι e Y_ι , $\iota \in I$, espaços normados, tais que $(X, \prod_{\iota \in I} X_\iota)$ é uma aproximação discreta, e $(u_\iota)_{\iota \in I}$, $u_\iota \in X_\iota$, é limitada. A sucessão de operadores $(K_\iota)_{\iota \in I}$, $K_\iota : X_\iota \rightarrow Y_\iota$, diz-se discretamente compacta se $(K_\iota u_\iota)_{\iota \in I}$ é discretamente compacta.

Bibliografia

- [1] R.A. Adams, 1975, Sobolev Spaces, Academic Press, New York.
- [2] S. Agmon, 1965, Lectures on elliptic boundary value problems, Jr. Van Nostrand Mathematical Studies, Van Nostrand, New York.
- [3] D.N. Arnold, F. Brezzi, 1985, Mixed and nonconforming finite element methods: implementation, postprocessing and error estimates, RAIRO Modél. Math. Anal. Numér. 19, 7-32.
- [4] I. Babuška, M. Feistauer, P. Šolín, 2001, On one approach to a posteriori error estimates for evolution problems solved by the method of lines, Numer. Math. 89, 225-256.
- [5] S. Barbeiro, J.A. Ferreira, 2001, A nonstandard linear finite element method for a planar elasticity problem, Appl. Numer. Math., 37, 331-340.
- [6] S. Barbeiro, J.A. Ferreira, A superconvergent linear FE approximation for the solution of an elliptic system of PDE's, aceite para publicação em J. Comput. Appl. Math..
- [7] S. Barbeiro, J.A. Ferreira, J. Brandts, Superconvergence of piecewise linear semi-discretizations for parabolic equations with nonuniform triangulations, aceite para publicação em J. Math. Fluid Mech..
- [8] S. Barbeiro, J.A. Ferreira, R.D. Grigorieff, Supraconvergence of a finite difference scheme for solutions in $H^s(0, L)$, aceite para publicação em IMA J. Numer. Anal..
- [9] D. Bojović, B.S. Jovanović, 2001, Fractional order convergence rate estimates of finite difference method on nonuniform meshes, Comput. Methods Appl. Math. 1, 213-221.
- [10] D. Braess, 1992, Finite Elements, Springer, Berlin.

-
- [11] J.H. Bramble, S.R. Hilbert, 1970, Estimation of linear functionals on Sobolev spaces with application to Fourier transforms and spline interpolation, *SIAM J. Numer. Anal.* 7, 112-124.
- [12] J.H. Bramble, S.R. Hilbert, 1970/1971, Bounds for a class of linear functionals with applications to Hermite interpolation, *Numer. Math.* 16, 362-369.
- [13] J.H. Brandts, 1994, Superconvergence and a posteriori error estimation for triangular mixed finite elements, *Numer. Math.* 68, 311-324.
- [14] J.H. Brandts, 1994, Superconvergence phenomena in finite element methods, PhD Thesis, University of Utrecht.
- [15] J.H. Brandts, 1999, Superconvergence of mixed finite element semi-discretizations of two time-dependent problems. *Appl. Math.* 44, 43-53.
- [16] G.F. Carey, D.L. Humphrey, 1979, Finite element mesh refinement algorithm using element residuals, *Lect. Notes in Comp. Science* 76, 243-249.
- [17] P.G. Ciarlet, 1978, *The finite element method for elliptic problems*, North-Holland, Amsterdam.
- [18] R. Courant, K. Friedrichs, H. Lewy, 1928, Über die Partiellen Differenzgleichungen der Mathematischen Physik, *Math. Ann.* 100, 32-74.
- [19] P. Chatzipantelidis, R.D. Lazarov, V. Thomée, 2004, Error estimates for a finite volume element method for parabolic equations in convex polygonal domains, *Numer. Methods for Partial Diff. Equations* 20, 650-674.
- [20] J.Jr. Douglas, T. Dupont, M.F. Wheeler, 1974, An L^∞ estimate and a superconvergence result for a Galerkin method for elliptic equations based on tensor products of piecewise polynomials, *Rev. Française Automat. Informat. Recherche Opérationnelle Sér Rouge* 8, no. R-2, 61-66.
- [21] J.Jr. Douglas, J.E. Roberts, 1985, Global estimates for mixed methods for second order elliptic equations, *Math. Comp.* 44, 39-52.
- [22] J.Jr. Douglas, J. Wang, 1989, Superconvergence of mixed finite element methods on rectangular domains, *Calcolo* 26, 121-133.
- [23] T. Dupont, R. Scott, 1980, Polynomial approximation of functions in Sobolev spaces, *Math. Comput.* 34, 441-463.
- [24] R. Duran, 1990, Superconvergence for rectangular mixed finite elements, *Numer. Math.* 58, 287-298.

- [25] R. Duran, M.A. Muschietti, R. Rodrigues, 1991, On the asymptotic exactness of error estimates for linear triangular finite element methods, *Numer. Math.* 59, 107-127.
- [26] J.A. Ferreira, 1994, Métodos adaptativos para problemas parabólicos: estudo da convergência, Tese de Doutorado, Universidade de Coimbra.
- [27] J.A. Ferreira, 1997, On the convergence on nonrectangular grids, *J. Comp. Appl. Math.* 85, 333-344.
- [28] J.A. Ferreira, 1997, The negative norms in the supraconvergence of FDM's for two-dimensional domains, *Pré-Publicações do Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra*, 97-06.
- [29] J.A. Ferreira, 2004, On the supraconvergence of elliptic finite difference schemes: general boundary conditions and low regularity, *Pré-Publicações do Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra*, 04-27.
- [30] J.A. Ferreira, R.D. Grigorieff, 1998, On the supraconvergence of elliptic finite difference schemes, *Appl. Num. Math.* 28, 275-292.
- [31] P.A. Forsyth, P.H. Sammon, 1988, Quadratic convergence for cell-centered grids, *Appl. Num. Math.* 4, 377-394.
- [32] B. Garcia-Archila, 1992, A supraconvergent scheme for the Korteweg-de Vries equation, *Numer. Math.* 61, 292-310.
- [33] B. Garcia-Archila, J.M. Sanz-Serna, 1991, A finite difference formula for the discretization of d^3/dx^3 on nonuniform grids, *Math. Comp.* 57, 239-257.
- [34] I. Gohberg, S. Goldberg, M. Kaashoek, 1990, *Classes of linear operators, Vol. I, Operator Theory: Advances and Applications*, 49, Birkhuser Verlag, Basel.
- [35] G. Goodsell, J.R. Whiteman, 1989, A unified treatment of superconvergent recovered gradient functions for piecewise linear finite element approximations, *Internat. J. Numer. Methods Engrg.*, 27, 469-481.
- [36] D.F. Griffiths, D.J. Higham, A.B. Ross, 2001, Equidistributing grids, *Technical Report NA/198, University of Dundee and University of Strathclyde Mathematics Research Report 2*.
- [37] R.D. Grigorieff, 1973, Zur Theorie linearer approximationsregulärer Operatoren, I, II, *Math. Nachr.* 55, 233-249.
- [38] R.D. Grigorieff, 1981/82, Zur diskreten Kompaktheit von Funktionen auf nichtäquidistanten Gittern in R , *Numer. Funct. Anal. Optim.* 4, no. 4, 383-395.

- [39] R.D. Grigorieff, 1988, Some stability inequalities for compact finite difference operators, *Math. Nachr.* 135, 93-101.
- [40] W. Hackbusch, 1992, *Theory and numerical treatment of elliptic differential equations*, Springer, Berlin.
- [41] F. de Hoog, D. Jackett, 1985, On the rate of convergence of finite difference schemes on nonuniform grids, *J. Austral. Math. Soc. Ser. B* 26, 247-256.
- [42] B.S. Jovanović, L.D. Ivanović, E.E. Süli, 1987, Convergence of finite difference schemes for elliptic equations with variable coefficients, *IMA J. Numer. Anal.* 7, 301-305.
- [43] B.S. Jovanović, B.Z. Popović, 2001, Convergence of a finite difference scheme for the third boundary-value problem for an elliptic equation with variable coefficients, *Comput. Methods Appl. Math.* 1, 356-366.
- [44] N.V. Kopteva, 1999, Uniform convergence with respect to a small parameter of a scheme with central difference on refining grids, *Comp. Math. Math. Physics* 39, 1662-1678.
- [45] N.V. Kopteva, M. Stynes, 2001, A robust adaptive method for a quasi-linear one-dimensional convection-diffusion problem, *SINUM* 39, 1664-1667.
- [46] N.V. Kopteva, 2001, Maximum norm a posteriori error estimates for a one-dimensional convection-diffusion problem, *SINUM* 39, 423-441.
- [47] H.O. Kreiss, T.A. Manteuffel, B. Swartz, B. Wendroff, A.B. White Jr., 1986, Supraconvergent schemes on irregular grids, *Math. Comp.* 47, 537-554.
- [48] P.D. Lax, R. D. Richtmeyer, 1956, Survey of the stability of linear finite difference equations, *Comm. Pure Appl. Math.* 9, 267-293.
- [49] R. Lazarov, V. Makarov, W. Weinelt, 1984, On the convergence of difference schemes for the approximation of solutions $u \in W_2^m$ ($m > 0.5$) of elliptic equations with mixed derivatives, *Numer. Math.* 44, 223-232.
- [50] P. Lesaint, M. Zlámal, 1979, Superconvergence of the gradient of finite element solutions, *R.A.I.R.O. Analyse Numérique* 13, 139-166.
- [51] C.D. Levermore, T.A. Manteuffel, A.B. White Jr., 1987, Numerical solutions of partial differential equations on irregular grids, *Computational techniques and applications: CTAC-87*, 417-426, North-Holland, Amsterdam.
- [52] N. Levine, 1985, Superconvergent recovery of the gradient from piecewise linear finite element approximations, *IMA J. Numer. Anal.*, 5, 407-427.

- [53] J.A. Mackenzie, 1998, The efficient generation of simple two-dimensional adaptive grids, *SIAM J. Sci. Comput.* 19, 1340-1365.
- [54] T.A. Manteuffel, A.B. White Jr., 1986, The numerical solution of second order boundary value problems on nonuniform meshes, *Math. Comp.* 47, 511-535.
- [55] M.A. Marletta, 1988, Supraconvergence of discretization methods on nonuniform meshes, M. Sc. Thesis, Oxford University.
- [56] L. Nirenberg, 1955, Remarks on strongly elliptic partial differential equations, *Comm. Pure and Appl. Math.*, 8, 648-674.
- [57] L.A. Oganessian, L.A. Ruhovec, 1969, An investigation of the rate of convergence of variation-difference schemes for second order elliptic equations in a two-dimensional region with smooth boundary, *Ž. Vyčisl. Mat. i Mat. Fiz.*, 9, 1102-1120.
- [58] Y. Qiu, D.M. Sloan, 1999, Analysis of difference approximations to a singularly perturbed two-point boundary value problem on an adaptively generated grid, *J. Comput. Appl. Math.*, 101, 1-25.
- [59] H.J. Reinhardt, 1985, Analysis of approximation methods for differential and integral equations, *Applied Mathematical Sciences* 57, Springer, New York.
- [60] M. Renardy, R. Rogers, 1993, An introduction to partial differential equations, *Texts in Applied Mathematics*, 13. Springer, New York.
- [61] H.G. Roos, T. Linß, 2001, Gradient recovery for singularly perturbed boundary value problems I: one-dimensional convection-diffusion, *Computing* 66, 163-178.
- [62] R.D. Russell, 1979, Mesh selection methods, *Lect. Notes in Comp. Science* 76, 228-242.
- [63] T.F. Russell, M.F. Wheeler, 1983, Finite element and finite difference methods for continuous flows in porous media, *The Mathematics of Reservoir Simulation*, R. E. Ewing, ed., SIAM, Philadelphia, 35-106.
- [64] A.A. Samarskii, 1963, Local one dimensional schemes on nonuniform nets, *Ž. Vyčisl. Mat. i Mat. Fiz.* 3, 431-466, traduzido para Inglês em U.S.S.R. *Comput. Math. and Math. Phys.* 3, 572-619.
- [65] A.A. Samarskii, 1984, *Theorie der Differenzenverfahren*, Geest & Portig, Leipzig.

- [66] M.N. Spijker, 1968, Stability and Convergence of Finite-Difference Methods, Thesis, Leiden.
- [67] F. Stummel, 1970, Diskrete Konvergenz linearer Operatoren. I, Math. Ann. 190, 45-92.
- [68] F. Stummel, 1972, Discrete convergence of mappings, Topics in numerical analysis, Academic Press, London, 285-310.
- [69] V. Thomée, 1997, Galerkin Finite Element Methods for Parabolic Problems, Berlin: Springer.
- [70] V. Thomée, L.B. Wahlbin, 2000, Stability and analyticity in maximum-norm for simplicial Lagrange finite element semidiscretizations of parabolic equations with Dirichlet boundary conditions, Numer. Math. 87, 373-389.
- [71] A.N. Tikhonov, A.A. Samarskii, 1962, Homogeneous difference schemes on nonuniform nets, Ž. Vyčisl. Mat. i Mat. Fiz. 2, 812-832, traduzido para Inglês em U.S.S.R. Comput. Math. and Math. Phys. 2, 927-953.
- [72] J.G. Verwer, J.M. Sanz-Serna, 1984, Convergence of method of lines approximations to partial differential equations, Computing 33, 297-313.
- [73] L.B. Wahlbin, 1995, Superconvergence in Galerkin finite element methods, Lect. Notes in Math. 1605, Springer, Berlin.
- [74] A. Weiser, M.F. Wheeler, 1988, On convergence of block-centered finite differences for elliptic problems, SIAM J. Numer. Anal. 25, 351-375.
- [75] M.F. Wheeler, J. R. Whiteman, 1987, Superconvergent recovery of gradients on subdomains from piecewise linear finite-element approximations, Numer. Methods for Partial Diff. Equations, 3, 65-82.
- [76] J. Wloka, 1971, Funktionalanalysis und Anwendungen, Walter de Gruyter, Berlin-New York.
- [77] J. Wloka, 1987, Partial differential equations, Cambridge University Press, Cambridge.
- [78] M. Zlámal, 1977, Some superconvergence results in the finite element method, Lecture Notes in Math., Vol. 606, Springer, Berlin.
- [79] M. Zlámal, 1978, Superconvergence and reduced integration in finite element method, Math. Comp. 32, 663-685.

Índice Remissivo

- aproximação discreta, 52, 90, 145
- Bramble-Hilbert, Lema de, 140
- compacidade discreta, 56, 94
- condição de fronteira
 - de Dirichlet, 3, 29, 48, 89
 - de Robin, 3, 29
- consistência, 146
- convergência, 10, 35, 41, 74, 85, 122,
130, 132, 135
 - discreta, 53, 91, 145
 - discreta fraca, 92
- equação diferencial
 - elíptica, 3, 29, 88
 - na forma não divergente, 14
 - parabólica, 125
- equidistribuição, 22, 25, 131
- erro de truncatura, 50
- espaço de Sobolev, 137
- estabilidade, 7, 35, 40, 41, 65, 84,
113, 146
- forma sesquilinear
 - coerciva, 40, 127, 144
 - elíptica, 144
- Gronwall, Lema de, 140
- Kolmogorov, Critério de compacidade
de, 140
- método das linhas, 125
- método de diferenças finitas
 - centradas nas células, 49, 89, 126,
134
 - centradas nos vértices, 4, 30, 126
- método de elementos finitos, 6, 34, 39
- método de volumes finitos, 51
- malha
 - adaptativa, 22, 23, 25
 - não uniforme, 4, 30, 88
 - regular, 19
 - Shishkin, 22, 23
- mergulho, 139
 - compacto, 56, 94, 139
- norma
 - de índice negativo, 75, 77, 97
 - de Sobolev, 137
 - de Spijker, 59
 - dual, 7, 77, 97
- operador
 - adjunto, 74, 79, 103
 - de diferenças centradas, 4
 - de Laplace, 97, 132
 - elíptico, 143
 - uniformemente elíptico, 30, 143
- pós-processamento, 19
- problema de elasticidade, 42
- problema variacional, 6, 31, 38
 - semi-discreto, 127
- Rellich-Kondrachov, Teorema de, 139

semi-discretização, 126
sistema uniformemente elíptico, 37,
42, 144
superconvergência, 1, 2
supraconvergência, 1, 2, 10, 35, 47,
87

termo fonte, 17
triangulação, 33