9. (a) Mostre que
$$\log(1+x) > x - \frac{x^2}{2},$$
para todo $x \in]0,+\infty[$.

   (b) Determine a natureza do integral impróprio
$$\int_1^{+\infty} \sin\left(\frac{\pi}{2x\log(1+x)+x^3}\right).$$

10. Mostre que
$$0 < \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\log(1+x+t)}\,dt < \frac{2}{\log(1+x)},$$
para todo $x \in]0,+\infty[$.

11. Mostre que se n é um inteiro positivo então
$$\int_0^1 (\log x)^n\,dx = (-1)^n n!.$$

12. Determine os valores de a para os quais o integral
$$\int_0^{+\infty} e^{ax}\,dx$$
é convergente.

13. Considere o integral
$$I = \int_0^{\pi/2} \log(\sin x)\,dx.$$

   (a) Mostre que I é convergente.

   (b) Mostre que
$$I = \int_0^{\pi/2} \log(\cos x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \log\left(\frac{\sin(2x)}{2}\right)\,dx.$$

   (c) Conclua que $I = -\frac{\pi}{2}\log 2$.

Coordenadas Paramétricas e Coordenadas Polares

14. **(i)** Faça o esboço das seguintes curvas

(a) $x = 2t+4, \quad y = t-1;$

(b) $x = 3-t, \quad y = 2t-3, \quad -1 \le t \le 4;$

(c) $x = 2\cos\theta, \quad y = \frac{1}{2}\sin\theta, \quad 0 \le \theta \le 2\pi;$

(d) $x = 2\cos\theta, \quad y = \frac{1}{2}\sin\theta, \quad 0 \le \theta \le \pi;$

(e) $x = \sqrt{t}, \quad y = 1-t, \quad t \ge 0;$

(f) $x = 1-2t, \quad y = t^2+4, \quad 0 \le t \le 3.$

(ii) Elimine o parâmetro para encontrar a equação cartesiana das curvas.

15. Suponha que a posição de uma partícula no instante de tempo t é dada por

$$x_1 = 3\sin t, \quad y_1 = 2\cos t, \quad 0 \le t \le 2\pi,$$

e a posição de uma segunda partícula é dada por

$$x_2 = -3 + \cos t, \quad y_2 = 1 + \sin t, \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

Faça o esboço de ambas as trajectórias. Existem pontos de intersecção? E existem pontos de colisão, ou seja, há algum instante de tempo em que as partículas ocupam a mesma posição?

16. Calcule a área limitada pelas curvas

(a) $x = \cos t$, $y = e^t$, $0 \le t \le \pi/2$, a recta $x = 0$ e a recta $y = 1$;

(b) $x = t - \dfrac{1}{t}$, $y = t + \dfrac{1}{t}$, $t > 0$ e a recta $y = 2.5$.

17. Use as equações paramétricas de uma elipse, $x = a\cos\theta$, $y = b\sin\theta$, $0 \le \theta \le 2\pi$, para calcular a área limitada por essa curva.

18. Calcule o comprimento das seguintes curvas

(a) $x = t^3, \quad y = t^2 \quad 0 \le t \le 4$; (b) $x = r(\theta - \sin\theta), \quad y = r(1 - \cos\theta), \quad 0 \le \theta \le 2\pi$.

19. Determine as coordenadas polares dos pontos em coordenadas cartesianas

(a) $(1, 1)$; (b) $(2\sqrt{3}, -2)$; (c) $(-1, -\sqrt{3})$; (d) $(-2, 3)$.

20. Esboce a região determinada em coordenadas polares pelas seguintes desigualdades

(a) $0 \le r \le 2, \quad \dfrac{\pi}{2} \le \theta \le \pi$; (b) $-1 \le r \le 1, \quad \dfrac{\pi}{4} \le \theta \le \dfrac{3\pi}{4}$.

21. Determine a equação cartesiana das curvas descritas em coordenadas polares

(a) $r = 2$; (b) $r\cos\theta = 1$; (c) $r^2 = \sin(2\theta)$; (d) $r^2 = \theta$.

22. Exprima em coordenadas polares as seguintes equações cartesianas

(a) $y = 5$; (b) $x^2 + y^2 = 25$; (c) $x^2 = 4y$; (d) $x^2 - y^2 = 1$; (e) $2xy = 1$.

23. Esboce as curvas de equação

(a) $r = 5$; (b) $\theta = 3\dfrac{\pi}{4}$; (c) $r = 1 - 3\cos\theta$;
(d) $r = \theta$, $\theta \ge 0$; (e) $r = 4\theta$, $\theta \le 0$; (f) $r = 2\sin(2\theta)$.

24. Determine o declive da recta tangente à curva no ponto especificado pelo valor de θ.

(a) $r = 2\cos\theta$, $\theta = \dfrac{\pi}{2}$; (b) $r = \dfrac{1}{\theta}$, $\theta = 2\pi$; (c) $r = 4 - 3\sin\theta$, $\theta = \pi$.

25. Calcule a área

(a) limitada pela curva $r^2 = \sin(2\theta)$;

(b) interior ao cardióide $r = 4(1 - \cos\theta)$ e exterior à circunferência $r = 6$;

(c) interior $r = 2\sin(2\theta)$ e exterior a $r = 1$;

(d) interior a $r = k$ e exterior a $r = k\sin(3\theta)$, $k > 0$.

26. Calcule o comprimento

(a) da espiral logarítmica $r = e^{2\theta}$ desde $\theta = 0$ até $\theta = 2\pi$;

(b) do cardióide $r = 1 + \cos\theta$.