Análise Matemática II

Eng$^{\text{a}}$s Biomédica, Física, Geográfica, Geológica e Minas; Lic$^{\text{a}}$ Física

Ano lectivo de 2004/2005 folha 4

Séries Numéricas

38. Calcule um valor aproximado das seguintes séries numéricas com um erro inferior a 10^{-4}:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^4}$; (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(\pi n)}{n}$.

39. Administra-se a um indivíduo uma dose de Q unidades de um certo remédio. A quantidade que permanece na corrente sanguínea ao fim de t minutos é Qe^{-ct}, com $c > 0$. Suponha que a mesma dose é administrada a intervalos sucessivos de T minutos.

(a) Mostre que a quantidade $A(k)$ do remédio presente na corrente sanguínea imediatamente após tomadas as primeiras k doses é

$$A(k) = \sum_{n=0}^{k-1} Qe^{-ncT}.$$

(b) Determine um majorante para a quantidade de remédio presente na corrente sanguínea após um número arbitrário de doses.

40. Deixa-se cair uma bola de borracha de uma altura de 10 metros. A bola eleva-se aproximadamente metade da altura após cada queda. Use a série geométrica para aproximar o percurso total feito pela bola até atingir o repouso.

Séries de Potências

41. Determine o intervalo de convergência das seguintes séries de potências:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$; (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n+1}$; (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{x^n}$;

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} 3^n x^n$; (e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!}$ (f) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{\ln n}$.

42. Determine um desenvolvimento em série de potências das seguintes funções e indique o respectivo raio de convergência:

(a) $f(x) = \dfrac{1}{4+x^2}$; (b) $f(x) = \dfrac{1}{x-5}$; (c) $f(x) = \dfrac{1}{(1+x)^2}$;

(d) $f(x) = \ln(1+x)$; (e) $f(x) = \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$.

43. Determine um desenvolvimento em série de potências para as seguintes primitivas:

(a) $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t^4}\,dt$; (b) $\displaystyle\int_0^x \frac{\text{arc tg } t}{t}\,dt$.

44. Determine um valor aproximado dos seguintes integrais, com erro inferior a 10^{-5}:

(a) $\displaystyle\int_0^{0.5} \frac{1}{\sqrt{1+x^3}}\,dx$; (b) $\displaystyle\int_0^{0.5} \text{arc tg } x\,dx$; (c) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\cos(1/x)}{1-x^2}\,dx$.

45. Determine a série de Taylor na vizinhança dos valores indicados:

(a) $f(x) = 1 + x + x^2, \quad a = 2$; (b) $f(x) = \dfrac{1}{x}, \quad a = 1$; (c) $f(x) = x\cos(2x), \quad a = 0$.

46. Use a multiplicação de séries de potências para determinar os cinco primeiros termos diferentes de zero dos desenvolvimentos em série de potências das seguintes funções:

(a) $f(x) = e^x \sin x$; (b) $f(x) = \operatorname{th} x$.

47. (a) Mostre que $\quad \dfrac{\pi}{4} = 4\text{arc tg } \dfrac{1}{5} - \text{arc tg } \dfrac{1}{239}$.

(b) Use o desenvolvimento em série de potências de arc tg x para calcular π como a soma de uma série numérica.

(c) Determine a precisão da aproximação de π que se obtém quando se consideram apenas os três primeiros termos dessa série.

48. Use a série binomial para representar em série de potências as seguintes funções:

(a) (i) $f(x) = \sqrt{1+x}$; (ii) $f(x) = \sqrt{1+x^2}$; (iii) $f(x) = \dfrac{1}{(2+x)^3}$.

(b) Determine, em cada caso, $f^{(10)}(0)$.

49. Mostre que:

(a) $e^x \geq 1 + x + \dfrac{x^2}{2}, \quad \forall x > 0$; (b) $\operatorname{ch} x - 1 - \dfrac{x^2}{2} > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

50. Mostre que $\quad x - \dfrac{x^3}{6} < \sin x < x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120}, \quad \forall x > 0$.

51. A força da gravidade num objecto de massa m a uma altura h acima da superfície da Terra é dada pela expressão

$$F = \frac{mgR^2}{(R+h)^2},$$

onde R é o raio da Terra e g é a aceleração da gravidade.

(a) Expresse F como uma série de potências em h/R.

(b) Observe que aproximando F pelo primeiro termo da série, se obtém a expressão $F \approx mg$, que é geralmente usada quando h é muito menor que R.