Séries de Fourier

52. Mostre que se $\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}\Big(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)\Big)$ é a Série de Fourier da função f então
$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx, \qquad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx, \quad n \geq 1,$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx, \quad n \geq 1.$$

53. Para cada uma das seguintes funções f, faça um esboço do gráfico da função e determine a sua série de Fourier:
   (a) f é uma função par de período 2π tal que $f(x) = x$, para $x \in [0, \pi]$.
   (b) $f(x) = |\sin x|, \forall x$.
   (c) f é uma função de período 2π e $f(x) = \begin{cases} -1, & x \in]-\pi, 0[\\ 1, & x \in [0, \pi]. \end{cases}$

54. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função periódica de período 2π, definida por $f(x) = x^2$, para $-\pi \leq x \leq \pi$. Determine a série de Fourier de f.

55. Seja f uma função definida por $f(x) = x$, $0 \leq x \leq \pi$. Determine uma extensão de f a $\mathbb{R}$ tal que f tenha um desenvolvimento em série de Fourier usando apenas termos em $\cos(nx)$.

56. Considere as seguines funções f, definidas no intervalo $]-\pi, \pi[$ pelas expressões:
   (a) $f(x) = 3x - 5$; (b) $f(x) = \cos\frac{x}{2}$; (c) $f(x) = x + |x|$.

   Para cada uma das funções determine:

   (i) o gráfico no intervalo $x \in [-3\pi, 3\pi[$ de modo que a função admita um desenvolvimento em Série de Fourier;

   (ii) o desenvolvimento de f em Série de Fourier.

Equações diferenciais

57. Resolva as seguintes equações diferenciais:
   (a) $y' = x^2 y$; (b) $yy' = -x$; (c) $y' = \dfrac{6x^2}{2y + \cos y}$.

58. Determine a solução de cada uma das seguintes equações diferenciais que satisfazem as condições indicadas:

(a) $y' = \sin(5x), \quad y(\pi) = -3;$

(b) $ye^{-x}y' = x, \quad y(0) = 1;$

(c) $y' = \dfrac{2x\cos^2 x + 1}{2y\cos^2 x}, \quad y(0) = -5.$

59. Um tanque contém 20 kg de sal dissolvido em 5000 l de água. Num dado instante começa a entrar água que contém 0.03 kg de sal por litro a uma taxa de 25 l por minuto. A solução é misturada e sai do tanque à mesma taxa. Determine a quantidade de sal que permanece no tanque ao fim de meia hora.

60. Num dado instante, existem 600 bactérias em cultura. O número de bactérias aumenta de 600 para 1800 em duas horas. Supondo que as bactérias crescem a uma taxa proporcional ao número de bactérias presentes em cada instante, determine o número de bactérias ao fim de quatro horas.

61. Resolva as seguintes equações diferenciais:

(a) $y' + 3x^2y = 6x^2;$ (b) $y' + 2xy = 1;$ (c) $y'\cos x = y\sin x + \sin(2x), \quad -\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}.$

62. Determine a solução de cada uma das seguintes equações diferenciais que satisfazem as condições indicadas:

(a) $x^2y' + xy = 1, \quad x > 0, \quad y(1) = 2;$

(b) $y' + y = x + e^x, \quad y(0) = 0;$

(c) $x^2y' + 2xy = \cos x, \quad y(\pi) = 0.$

63. Determine uma equação linear equivalente à equação de Bernoulli

$$y' + p(x)y = q(x)y^n.$$

64. Resolva as seguintes equações diferenciais:

(a) $xy' + y = -xy^2;$ (b) $y' + \dfrac{2}{x}y = \dfrac{y^3}{x^2};$ (c) $(x^2 + y^2) + (x^2 - xy)y' = 0;$

(d) $yy' = x + 4ye^{\frac{x}{y}};$ (e) $y' = \dfrac{1}{3}[(1-2x)y^4 - y];$ (f) $x\sin xe^{-y} - yy' = 0.$

65. De acordo com a lei de arrefecimento de Newton, a taxa à qual um objecto arrefece é directamente proporcional à diferença entre a temperatura do objecto e a do meio ambiente circundante. Se determinado objecto arrefece de 125 graus para 100 graus em meia hora, quando circundado por ar à temperatura de 75 graus, determine a temperatura do objecto ao fim de mais meia hora.