Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra
1^a Frequência de Análise Matemática II
Licenciaturas em Bioquímica, Química e Química Industrial
6 de Abril de 2005

ATENÇÃO: Deve justificar as suas respostas e apresentar os cálculos que efectuar.

Duração: 2 horas

I

1. (a) Represente graficamente a curva C definida por

$$\begin{cases} x = 2 + 2\cos\theta \\ y = 2\sin\theta \end{cases} \qquad \theta \in [\tfrac{5\pi}{4}, \tfrac{9\pi}{4}]$$

   (b) Determine uma equação da recta tangente à curva C no ponto $(2+\sqrt{2}, -\sqrt{2})$.

II

1. Represente graficamente as curvas definidas, em coordenadas polares, por
   a) $r = 2\cos\theta,\quad \theta \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ *b)* $\theta = \frac{\pi}{4}$ *c)* $\theta = -\frac{\pi}{4}$
2. Determine a área da região delimitada pelas três curvas do exercício anterior.

III

1. Defina sucessão limitada e sucessão convergente.
2. Considere a sucessão $(a_n)_{n\in N}$ definida por

$$\begin{cases} a_1 = 4 \\ a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + 2) \end{cases}$$

   (a) Mostre, por indução, que a sucessão $(a_n)_{n\in N}$ é decrescente.
   (b) Mostre que
   $$a_n \geq 2, \qquad \forall n \in N.$$
   (c) Mostre que a sucessão $(a_n)_{n\in N}$ é convergente e calcule o seu limite.
3. (a) Usando resultados conhecidos sobre limites de funções, mostre que, se $g : [0, +\infty[\to R$ é uma função positiva e derivável tal que
   $$\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$$
   então para todo o $k \in R$ fixado, temos
   $$\lim(1 + \frac{k}{g(n)})^{g(n)} = e^k.$$
   (b) Mostre que $\lim(1 - \frac{\pi}{n+3})^n = e^{-\pi}$.

   Sugestão: Use o resultado anterior depois de decompôr a expressão $(1 - \frac{\pi}{n+3})^n$ num produto onde apareça uma potência com a mesma base e com expoente $(n+3)$.

(c) Determine a natureza da série

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1-\frac{\pi}{n+3})^{n^2}.$$

IV

1. (a) Mostre , usando a definição de série convergente, que, se $|d|<1$ então a série
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_0 d^{n-1} = \frac{a_0}{1-d}.$$
Sugestão: Use a expressão $\frac{a(1-r^{n-1})}{1-r}$ para a soma dos n primeiros termos duma progressão geométrica de razão r e primeiro termo a.

   (b) Mostre que a série
$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{1000^{n+2}}$$
é convergente e, se possível determine a sua soma.

2. (a) Considere uma sucessão $(a_n)_{n\in N}$ onde para cada $n \in N$
$$0 \le a_n \le \frac{(2n)!}{(n!)^2}(\frac{1}{5})^n.$$
Determine, justificando, a natureza da série de termo geral a_n.

   (b) Calcule $\lim a_n$.

3. Considere a série
$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{4n^2+4}.$$

   (a) Mostre que a série é convergente.

   (b) Determine um valor aproximado para a soma da série com um erro inferior a 0.01