Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra
2^a Frequência de Análise Matemática II
Licenciaturas em Bioquímica, Química e Química Industrial
30 de Maio de 2005

ATENÇÃO: Deve justificar as suas respostas e apresentar os cálculos que efectuar.

Duração: 2 horas

I

1. Considere a seguinte equação diferencial:

$$y'' - 4y = 0.$$

   (a) Determine a solução geral desta equação diferencial.

   (b) Determine, por dois processos diferentes, a solução geral da equação diferencial

$$y'' - 4y = x + e^x.$$

   (c) Determine a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'' - 4y & = & x + e^x \\ y(0) & = & -\frac{1}{3} \\ y'(0) & = & -\frac{7}{12} \end{cases}$$

II

1. Mostre que, se $f : R \to R$ é uma função ímpar, periódica de período 2π e integrável com módulo integrável, então a série de Fourier de f é uma série de funções em senos.

2. Seja $f :]0, \frac{\pi}{2}[\to R$ definida por $f(x) = x^2$. Determine um desenvolvimento em série de Fourier desta função em cossenos.

3. Seja

$$\begin{array}{rccl} f: & R & \to & R \\ & x & \to & \begin{cases} 0, & x \in [-\pi, 0[\\ 2, & x \in [0, \pi[\\ & \text{periódica de período } 2\pi \end{cases} \end{array}$$

   (a) Mostre que a série de Fourier de f é dada por

$$g(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{(2k-1)\pi} \sin[(2k-1)x].$$

   (b) Use o resultado anterior para determinar a soma da série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)}.$$

III

1. (a) Determine todos os valores de x para os quais a série

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{e^n}{n^2} x^n$$

é convergente.

(b) Determine todos os valores de x para os quais a série

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{e^n}{n^2}(x-e)^n$$

é convergente.

2. Determine um desenvolvimento em série de potências de x da função f definida por

$$f(x) = log(e+x)$$

e o raio de convergência dessa série.

3. Sabendo que, se uma sucessão de funções contínuas $(f_n)_{n\in N}$, definidas em $X \subset R$, converge uniformemente para uma função f, então f é uma função contínua, prove o seguinte resultado: Se a série de funções $\sum_{n=1}^{\infty} g_n$ converge uniformemente para S, em $X \subset R$ e g_n são funções contínuas em X então S é uma função contínua.

Sugestão: Use a definição de série de funções.

4. Será que a função g definida por

$$\begin{array}{llll} g: & [0, \frac{\pi}{2}] & \rightarrow & R \\ & x & \rightarrow & \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+2x} \cos\frac{nx}{2} \end{array}$$

é uma função contínua em $[0, \frac{\pi}{2}]$? Justifique a sua resposta.

Sugestão: Use o critério de Weierstrass, tendo em atenção o intervalo onde a função está definida.