Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra
EXAME de Análise Matemática II
Licenciaturas em Bioquímica, Química e Química Industrial
20 de Junho de 2005

ATENÇÃO: Deve justificar as suas respostas e apresentar os cálculos que efectuar.

Duração: 2 horas 30 minutos

I

1. Considere a curva definida por

$$\begin{cases} x = e^{\frac{t}{\pi}} \cos t \\ \\ y = e^{\frac{t}{\pi}} \sin t \end{cases} \qquad t \in [0, \pi]$$

   (a) Faça um esboço desta curva.
   (b) Mostre que esta curva pode ser expressa em coordenadas polares por $r = e^{\frac{\theta}{\pi}}$, com $0 \leq \theta \leq \pi$.
   (c) Calcule o comprimento da curva.

2. Considere a sucessão $(a_n)_{n \in N}$ definida por recorrência da seguinte forma:

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ \\ a_{n+1} = 2 - \dfrac{1}{a_n}, \quad n \geq 1 \end{cases}$$

   (a) Mostre, por indução, que para todo o n pertencente a N, $\quad a_n > 1$.
   (b) Mostre que a sucessão $(a_n)_{n \in N}$ é decrescente.
   (c) Mostre que a sucessão $(a_n)_{n \in N}$ é convergente e determine o seu limite.

II

1. (a) Defina série numérica absolutamente convergente.
   (b) Mostre que se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ são séries numéricas absolutamente convergentes então, para todo o $x \in R$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

   é uma série convergente.

2. Determine a natureza e, no caso de serem convergentes, a soma das seguintes séries:

$$a) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1} + (-2)^n}{4^{n-2}} \qquad\qquad b) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$$

3. (a) Calcule o limite da sucessão $(\frac{8^n}{1+8^n})_{n \in N}$ e diga, justificando, se a sucessão $((-1)^n \frac{8^n}{1+8^n})_{n \in N}$ é convergente.
   (b) Determine o intervalo de convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{1+8^n} x^n$

III

1. Determine a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'' + y' - 2y &= x + e^x \\ y'(0) &= -\frac{1}{6} \\ y(0) &= 0 \end{cases}$$

2. Use séries de potências para concluir que a solução geral da equação diferencial

$$y' + y = 0$$

é dada por Ce^{-x}, onde C é uma constante arbitrária.

IV

1. Seja $f : [0, 2\pi] \to R$ definida por $f(x) = x$.

    (a) Determine um desenvolvimento em série de Fourier de f em cossenos.

    (b) Calcule a soma da série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}.$$