Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Análise Matemática II

Ano Lectivo 2004/2005 - 2^0 Semestre **Folha 1**

Coordenadas Paramétricas e Coordenadas Polares

1. Faça o esboço das seguintes curvas

   (a) $x = 2t + 4, \quad y = t - 1;$ (b) $x = 3 - t, \quad y = 2t - 3, \quad -1 \leq t \leq 4;$

   (c) $x = 2\cos\theta, \quad y = \dfrac{1}{2}\sin\theta, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi;$ (d) $x = 2\cos\theta, \quad y = \dfrac{1}{2}\sin\theta, \quad 0 \leq \theta \leq \pi;$

   (e) $x = \sqrt{t}, \quad y = 1 - t, \quad t \geq 0;$ (f) $x = 1 - 2t, \quad y = t^2 + 4, \quad 0 \leq t \leq 3.$

   Elimine o parâmetro para encontrar a equação cartesiana das curvas.

2. Suponha que a posição de uma partícula no instante de tempo t é dada por

$$x_1 = 3\sin t, \quad y_1 = 2\cos t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

   e a posição de uma segunda partícula é dada por

$$x_2 = -3 + \cos t, \quad y_2 = 1 + \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

   Faça o esboço de ambas as trajectórias. Existem pontos de intersecção? E existem pontos de colisão, ou seja, há algum instante de tempo em que as partículas ocupam a mesma posição?

3. Calcule a área limitada pelas curvas

   (a) $x = \cos t, \ y = e^t, \ 0 \leq t \leq \pi/2$, a recta $x = 0$ e a recta $y = 1$;

   (b) $x = t - \dfrac{1}{t}, \ y = t + \dfrac{1}{t}, \ t > 0$ e a recta $y = 2.5$.

4. Use as equações paramétricas de uma elipse, $x = a\cos\theta$, $y = b\sin\theta$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, para calcular a área limitada por essa curva.

5. Calcule o comprimento das seguintes curvas

   (a) $x = t^3, \quad y = t^2 \quad 0 \leq t \leq 4;$ (b) $x = r(\theta - \sin\theta), \quad y = r(1 - \cos\theta), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$

6. Calcule a área da superfície do elipsóide obtido pela rotação da elipse $x = a\cos\theta$, $y = b\sin\theta$, $a > b$, em torno do eixo dos xx.

7. Calcule a área da superfície obtida pela rotação da curva $x = t^3$, $y = t^2$, $0 \leq t \leq 1$,

   (a) em torno do eixo dos xx; (b) em torno do eixo dos yy.

8. Determine as coordenadas polares dos pontos em coordenadas cartesianas

   (a) $(1, 1)$; (b) $(2\sqrt{3}, -2)$; (c) $(-1, -\sqrt{3})$; (d) $(-2, 3)$.

9. Esboce a região determinada em coordenadas polares pelas seguintes desigualdades

   (a) $0 \leq r \leq 2, \quad \dfrac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi;$ (b) $-1 \leq r \leq 1, \quad \dfrac{\pi}{4} \leq \theta \leq \dfrac{3\pi}{4}.$

10. Determine a equação cartesiana das curvas descritas em coordenadas polares

    (a) $r = 2$; (b) $r\cos\theta = 1$; (c) $r^2 = \sin(2\theta)$; (d) $r^2 = \theta$.

11. Exprima em coordenadas polares as seguintes equações cartesianas

    (a) $y = 5$; (b) $x^2 + y^2 = 25$; (c) $x^2 = 4y$; (d) $x^2 - y^2 = 1$; (e) $2xy = 1$.

12. Esboce as curvas de equação

    (a) $r = 5$; (b) $\theta = 3\frac{\pi}{4}$; (c) $r = 1 - 3\cos\theta$;
    (d) $r = \theta$, $\theta \geq 0$; (e) $r = 4\theta$, $\theta \leq 0$; (f) $r = 2\sin(2\theta)$.

13. Determine o declive da recta tangente à curva no ponto especificado pelo valor de θ.

    (a) $r = 2\cos\theta$, $\theta = \frac{\pi}{2}$; (b) $r = \frac{1}{\theta}$, $\theta = 2\pi$; (c) $r = 4 - 3\sin\theta$, $\theta = \pi$.

14. Calcule a área

    (a) limitada pela curva $r^2 = \sin(2\theta)$;

    (b) interior ao cardióide $r = 4(1 - \cos\theta)$ e exterior à circunferência $r = 6$;

    (c) interior $r = 2\sin(2\theta)$ e exterior a $r = 1$;

    (d) interior a $r = k$ e exterior a $r = k\sin(3\theta)$, $k > 0$.

15. Calcule o comprimento

    (a) da espiral logarítmica $r = e^{2\theta}$ desde $\theta = 0$ até $\theta = 2\pi$;

    (b) do cardióide $r = 1 + \cos\theta$.

Sucessões Numéricas

16. Estude quanto à convergência as sucessões a seguir definidas.

    (a) $a_n = n(n-1)$; (b) $a_n = \frac{3 + 5n^2}{n + n^2}$; (c) $a_n = \frac{2^n}{3^{n+1}}$; (d) $a_n = 2 + \cos(n\pi)$;
    (e) $a_n = \text{arctg}(2n)$; (f) $a_n = \frac{\ln(n^2)}{n}$; (g) $a_n = \frac{n!}{2^n}$; (h) $a_n = (-1)^n \sin(1/n)$.

17. (a) Mostre que se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente então

    $$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

    (b) Seja $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão tal que

    $$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{1}{1 + a_n} \text{ para } n \geq 1.$$

    Sabendo que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente, determine o seu limite.

18. Determine os 8 primeiros termos da sucessão $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$,

    $$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 1 + \frac{1}{1 + a_n} \text{ para } n \geq 1.$$

    Utilize o resultado seguinte

    $$\boxed{\text{Se } \lim_{n\to\infty} a_{2n} = L \text{ e } \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = L, \text{ então } (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ é convergente e } \lim_{n\to\infty} a_n = L.}$$

    para mostrar que $\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{2}$.