Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Análise Matemática II

Ano Lectivo 2004/2005 - 2^0 Semestre **Folha 2**

Sucessões Numéricas (continuação)

1. Usando os resultados já conhecidos para limites de funções, calcule:

   (a) $\lim \frac{1}{n^r}, r > 0$; (b) $\lim n\sin(1/n)$; (c) $\lim n^{(1/n)}$;

   (d) $\lim n^2 e^{-n}$; (e) $\lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

2. Usando o critério das sucessões enquadradas, calcule:

   (a) $\lim \frac{1}{n\sqrt{n^{-4}+2n^{-2}+7}}$; (b) $\lim \sin(n)n^{-1} - \cos(n)e^{-n}$; (c) $\lim \frac{1}{n!}$.

3. Verifique se as seguintes sucessões convergem, indicando o limite em caso afirmativo:

   (a) $a_n = \begin{cases} \frac{n+1}{n} & \text{se } n \text{ par} \\ \frac{n}{n+1} & \text{se } n \text{ ímpar} \end{cases}$;

   (c) $b_n = \cos\left(\frac{2}{3}\pi n\right)$.

4. Um certa espécie de coelhos reproduz-se de uma forma muito regular. A cada mês, cada casal de coelhos dá origem a um novo casal de coelhos, com a excepção do seu primeiro mês de vida, no qual não se reproduzem.

   a) Supondo que se começa com um casal de coelhos recém-nascidos, define de forma recursiva a sucessão C_n, onde C_n é o número de casais de coelhos que existirão ao fim de n meses.

   b) Será que a razão entre os coelhos que existem num dado mês e os que existirão no mês seguinte converge? Se sim para que valor?

Séries Numéricas

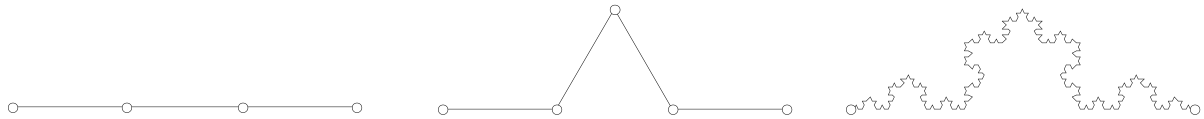
5. Estude a convergência das seguintes séries, indicando a sua soma caso convirjam:

   (a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{n-1}}{3^{n-1}}$; (b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{7\times 5^{n-2}}{3^{n+1}}$; (c) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^{n-1}}{2^{n+3}}$;

   (d) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^{n+1}+(-2)^n}{5^{n-2}}$; (e) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5^{n+1}+(-2)^n}{3^{n-2}}$.

6. A curva de Koch é definida recursivamente da seguinte forma: Começa-se com um segmento de recta, divide-se em três, desenha-se um triângulo equilátero tendo como base o pedaço central do segmento, e depois apaga-se esse pedaço.

Ficamos então com quatro segmentos mais pequenos que o original, nos quais repetiremos o procedimento e assim por diante. No limite obteremos a curva de Koch.



Sabendo que o comprimento da curva de Koch é o limite dos comprimentos das curvas que a vão aproximando, calcule-o. Calcule ainda a área delimitada pela curva e pelo segmento original.

7. Estude a convergência das seguintes séries, indicando a sua soma quando possível:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$; (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ com $x_n = \begin{cases} 1+e^n & \text{se } n < 10^6 \\ \frac{2}{3^{n-1}} & \text{se } n \geq 10^6 \end{cases}$; (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$;

   (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$; (e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n - a_{n+1})$, onde $a_n \to L$; (f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$.

8. Usando os critérios de comparação determine a natureza das seguintes séries:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3+3n+7}{n^4-2n^3-5}$; (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2+2}{n^4-3n+5}$; (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \sin(1/n)$; (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \sin^2(1/n)$.

9. Usando o critério de D'Alembert determine a natureza das seguintes séries:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{n!}$; (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n^n}$; (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{8^n n!}{n^n}$.

10. Calcule as somas (a) e (b) do exercício anterior, com erro menor que 0.01.
    (Nota: Para a segunda tenha em conta que a sucessão $(1+1/n)^n$ é crescente)

11. Usando o critério da raíz determine a natureza das seguintes séries:

    (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-n}$; (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (n\sin(\pi/3n))^n$; (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$; (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$.

12. Calcule as somas (a) e (d) do exercício anterior com erro menor que 0.01.

13. Usando o critério do integral calcule a natureza das seguintes séries:

    (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$ com $p > 1$; (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$ com $p \leq 1$; (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} ne^{-n}$.

14. Calcule as somas (a) (com $p = 2$) e (c) do exercício anterior com erro menor que 0.01.