Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra
Análise Matemática II

Ano Lectivo 2004/2005 - 2^0 Semestre **Folha 3**

Séries Numéricas (continuação)

1. Usando o Critério de Leibniz determine a natureza das seguintes séries:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$; (b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n n}{n^2-2}$; (c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\ln n}$.

2. Calcule as somas do exercício anterior com erro inferior a 0.01.

3. Determine os valores de p para os quais cada uma das séries é convergente:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^p}$; (b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^p \ln n}$.

4. Determine a natureza das seguintes séries:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n2^n}$; (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{6}{5}\right)^n$; (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$;

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos n}{n^2}$; (e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{(-1)^n}{n+3} - \frac{1}{n^2+3}\right)$; (f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n^3+1}}{3n^3+4n^2+2}$;

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}$.

5. (a) Mostre que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n}{n!}$ converge, para todo o $a \in \mathbb{R}$.

(b) Deduza que $\displaystyle\lim \frac{a^n}{n!} = 0$.

Séries de Funções

6. Calcule

(a) $\displaystyle\int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \frac{1}{1+x^2}\right) dx$; (b) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3^n} \sin x\right) dx$.

7. Use o Critério de Weierstrass para concluir que as séries seguintes são uniformemente convergentes:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in [0,1];$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^2} \sin x, \quad x \in [0, 2\pi]$

   (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^2+1} \cos x, \quad x \in [0, 2\pi].$

8. Determine o intervalo de convergência das seguintes séries:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}};$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n+1};$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{x^n};$

   (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} 3^n x^n;$ (e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!}$ (f) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{\ln n}.$

9. Determine uma representação em série de potências para as seguintes funções e indique o raio de convergência:

   (a) $f(x) = \dfrac{1}{4+x^2};$ (b) $f(x) = \dfrac{1}{x-5};$ (c) $f(x) = \dfrac{1}{(1+x)^2};$

   (d) $f(x) = \dfrac{1}{(1+x)^3};$ (e) $f(x) = \ln(1+x);$ (f) $f(x) = \ln(5-x);$

   (g) $f(x) = \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right).$

10. Determine uma representação em série de potências para as seguintes primitivas:

   (a) $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^4}\,dx;$ (b) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\,dx;$ (c) $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^6}\,dx.$

11. Use séries de potências para aproximar o valor dos seguintes integrais, com erro inferior a 10^{-7}:

   (a) $\displaystyle\int_0^{0.5} \frac{1}{1+x^7}\,dx;$ (b) $\displaystyle\int_0^{0.5} \operatorname{arctg} x\,dx.$

12. Determine a série de Taylor em torno do valor dado, a, das seguintes funções:

   (a) $f(x) = 1 + x + x^2, \quad a = 2;$ (b) $f(x) = \dfrac{1}{x}, \quad a = 1;$

   (c) $f(x) = \cos(\pi x), \quad a = 0;$ (d) $f(x) = x\cos(2x), \quad a = 0.$

13. Use as operações multiplicação e divisão de séries de potências para determinar os três primeiros termos diferentes de zero da série de Maclaurin para as seguintes funções:

   (a) $f(x) = e^{-x^2}\cos x;$ (b) $f(x) = \dfrac{\ln(1-x)}{e^x}.$