Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra
Análise Matemática II

Ano Lectivo 2004/2005 - 2^0 Semestre **Folha 4**

Séries de Funções (continuação)

1. Use a série binomial para representar em série de potências as seguintes funções:

   (a) $f(x) = \sqrt{1+x}$; (b) $f(x) = \dfrac{1}{(2+x)^3}$.

2. (a) Use a série binomial para representar em série de potências a função $f(x) = \sqrt{1+x^2}$.

   (b) Determine $f^{(10)}(0)$.

3. (a) Represente em série de potências a função $f(x) = \dfrac{x}{(1-x)^2}$.

   (b) Use a alínea anterior para determinar a soma da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^n}$.

Equações Diferenciais de Segunda Ordem

4. Resolva a equação diferencial:

   (a) $y'' - y' - 6y = 0$; (b) $2y'' + 3y' - y = 0$; (c) $y'' - \pi^2 y = 0$;

   (d) $4y'' + 12y' + y = 0$; (e) $y'' - 2y' + y = 0$; (f) $y'' - 2y' + 2y = 0$;

   (g) $2y'' + y' + y = 0$; (h) $y'' + \pi^2 y = 0$.

5. Mostre que se a, b e c são constantes positivas e se $y(x)$ é solução de $ay'' + by' + cy = 0$ então

$$\lim_{x\to+\infty} y(x) = 0.$$

6. Resolva o problema de condição inicial:

   (a) $y'' - y' - 6y = 0,\ \ y(0) = 2,\ \ y'(0) = 1$;

   (b) $y'' - 2y' + y = 0,\ \ y(2) = 1,\ \ y'(2) = 2$;

   (c) $y'' - 2y' + 2y = 0,\ \ y(0) = 3,\ \ y'(0) = 0$;

   (d) $y'' + \pi^2 y = 0,\ \ y(1) = \pi,\ \ y'(1) = \pi$.

7. Resolva, se possível, o seguinte problema de contorno:

   (a) $y'' - y' - 6y = 0,\ \ y(1) = e^6,\ \ y(-1) = e^4$;

   (b) $y'' - 2y' + y = 0,\ \ y(-1) = 0,\ \ y(0) = 2$;

   (c) $y'' - 2y' + 2y = 0,\ \ y(-\pi) = 1,\ \ y(\pi) = 1$;

   (d) $y'' + \pi^2 y = 0,\ \ y(-1/4) = 0,\ \ y(1/4) = 2$.

8. Resolva as seguntes equações diferenciais, usando o método dos coeficientes indeterminados:

   (a) $y'' - y' - 6y = x^2 - 5x$;

   (b) $y'' - 2y' + y = x^2 + x + 1$;

   (c) $y'' - y' - 6y = 2e^{2x}$;

   (d) $y'' - 2y' + y = e^{-x}$;

   (e) $y'' - y' - 6y = 5\cos(x)$;

   (f) $y'' - 2y' + y = 17\cos(x)$;

   (g) $y'' - y' - 6y = 5\cos(x) + 2e^{2x}$;

   (h) $y'' - 2y' + y = x^2 + e^{2x} + 1$.

9. Resolva o problema de condição inicial:

   (a) $y'' - y' - 6y = 2e^{2x},\ \ y(0) = 1,\ \ y'(0) = 1$;

   (b) $y'' - 2y' + y = x^2 + x + 1;\ \ y(0) = 8,\ \ y'(0) = 2$.

10. Resolva as seguntes equações diferenciais, usando o método dos coeficientes indeterminados:

    (a) $y'' - y' - 6y = 6xe^{4x} + e^{4x}$;

    (b) $y'' - 2y' + y = \cos(2x)e^{3x}$;

    (c) $y'' - 4y = e^x\cos(x)$;

    (d) $y'' - \pi^2 y = \cos(\pi x)$;

    (e) $y'' - 2y' + y = 5e^x$;

    (f) $y'' - y' - y = 2e^{\frac{1}{3}x}$.

11. Resolva as seguntes equações diferenciais, usando o método da variação das constantes:

    (a) $y'' - y' = e^x$;

    (b) $y'' - 3y' + 2y = \sin(x)$;

    (c) $y'' - y = \dfrac{1}{x}$;

    (d) $y'' - 3y' + 2y = \dfrac{1}{1 + e^{-x}}$;

    (e) $y'' + y = \operatorname{cosec}(x)$.