Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Análise Matemática II

Ano Lectivo 2004/2005 - 2^0 Semestre **Folha 5**

Equações Diferenciais de Segunda Ordem (continuação)

1. Resolva as seguintes equações diferenciais:

   (a) $9y'' + y = 3x + e^{-x}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2;$

   (b) $y'' + y = \sec x, \quad y(0) = 1, \quad y(\pi/4) = 1.$

2. Uma mola com uma massa de 3 kg é mantida esticada 0.6 m além do seu comprimento natural por uma força de 20 N. Partindo da posição de equilíbrio, se lhe for aplicado um impulso que lhe dá uma velocidade inicial de 1.2 m/s, determine a posição da massa ao fim de t segundos.

3. Uma mola com uma massa de 2 kg tem comprimento natural de 0.5 m. É necessária uma força de 25.6 N para a manter esticada com um comprimento de 0.7 m. Suponha que essa mola está imersa num fluído com constante de amortecimento $c = 40$. Determine a posição da massa em qualquer instante t se a mola iniciar o movimento a partir da sua posição de equilíbrio e lhe for aplicado um impulso que lhe dá uma velocidade inicial de 0.6 m/s.

4. Uma mola com uma massa de 2 kg tem uma constante de amortecimento 14. É necessária uma força de 6 N para a manter esticada 0.5 m além do seu comprimento natural. Se a mola for esticada 0.2 m além do seu comprimento natural e então solta com velocidade zero, determine a posição da massa em qualquer instante t.

5. Suponha que uma mola tem constante k e uma massa m. Seja $w = \sqrt{k/m}$. Suponha que a constante de amortecimento é tão pequena que a força de amortecimento pode ser desprezada. Se uma força externa $F(t) = F_0 \cos(w_0 t)$ for aplicada, onde $w_0 \neq w$, use o método dos coeficientes indeterminados para mostrar que o movimento da massa é descrito pela equação

$$x(t) = c_1 \cos(wt) + c_2 \sin(wt) + \frac{F_0}{m(w^2 - w_0^2)} \cos(w_0 t).$$

6. Suponha que uma mola tem constante k, uma massa m e constante de amortecimento $c = 0$. Seja $w = \sqrt{k/m}$. Se uma força externa $F(t) = F_0 \cos(wt)$ for aplicada, onde $w_0 = w$, use o método dos coeficientes indeterminados para mostrar que o movimento da massa é descrito pela equação
$$x(t) = c_1 \cos(wt) + c_2 \sin(wt) + \frac{F_0}{2mw} t \sin(wt).$$

Séries de Potências e Equações Diferenciais

7. Use séries de potências para resolver as seguintes equações diferenciais:
   (a) $y' - y = 0$;
   (b) $y' = x^2 y$;
   (c) $y'' + xy' + y = 0$;
   (d) $(x^2+1)y'' + xy' - y = 0$.

8. Use séries de potências para resolver as seguintes equações diferenciais:
   (a) $y'' - xy' - y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$;
   (b) $y'' = xy, \quad y(0) = -3, \quad y'(0) = 2$.

9. A solução do problema de valor inicial
$$x^2 y'' + xy' + x^2 y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$
é chamada função de Bessel de ordem zero.

   Determine uma expansão em série de potências da função de Bessel.

Séries de Fourier

10. Mostre que as seguintes funções são periódicas e determine os respectivos períodos fundamentais:
    (a) $\sin(4x)$;
    (b) $\mathrm{tg}(4+x)$;
    (c) $\cos(-5x)$;
    (d) $\pi + \cos(7x)$.

11. Determine se f é par ou ímpar:
    (a) $f(x) = 2x^5 - 3x^2 + 2$;
    (b) $f(x) = x^3 - x^7$;
    (c) $f(x) = e^{-x^2}$;
    (d) $f(x) = 1 + \sin x$;
    (e) $f(x) = \mathrm{ch} x$;
    (f) $f(x) = x^{-3}$;