Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra
Análise Matemática II

Ano Lectivo 2004/2005 - 2^0 Semestre **Folha 6**

Séries de Fourier (continuação)

1. Verifique que:
   (a) A soma de funções pares é ainda uma função par;
   (b) A soma de funções ímpares é ainda uma função ímpar;
   (c) O produto de funções pares é ainda uma função par;
   (d) O produto de duas funções ímpares é uma função par;
   (e) O produto de uma função par por uma ímpar é uma função ímpar.

2. Mostre que:
   (a) $\displaystyle\int_{-L}^{L} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right).\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = 0,\ \ n \neq m \geq 1;$ (b) $\displaystyle\int_{-L}^{L} \left(\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right)^2 dx = L,\ \ n \geq 1;$

   (c) $\displaystyle\int_{-L}^{L} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right).\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = 0,\ \ n \neq m \geq 1;$ (d) $\displaystyle\int_{-L}^{L} \left(\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right)^2 dx = L,\ \ n \geq 1;$

   (e) $\displaystyle\int_{-L}^{L} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right).\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = 0,\ \ n, m \geq 1.$

3. Calcule a série de Fourier das seguintes funções:
   (a) $f(x) = \begin{cases} \sin(x) & \text{se } \sin(x) \geq 0 \\ 0 & \text{se } \sin(x) < 0 \end{cases}$; (b) $f(x) = \begin{cases} \cos(x) & \text{se } \cos(x) \geq 0 \\ 0 & \text{se } \cos(x) < 0 \end{cases}$;

   (c) $f(x) = \begin{cases} 1,\ 0 \leq x < \pi \\ 0,\ -\pi \leq x < 0 \\ \text{periódica de período } 2\pi \end{cases}$; (d) $f(x) = x^3 - x$, $|x| \leq 1$ e período 2.

4. Calcule a série de Fourier da função periódica de período 2, definida por $f(x) = x^2$ quando $-1 \leq x \leq 1$. Avalie-a no ponto $x = 1$ para calcular o valor de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

5. Desenhe o gráfico da função do Exercício 3 c) e, a partir dele, desenhe também o gráfico da sua respectiva série de Fourier.

6. Escreva como séries de cossenos as seguintes funções:

   (a) $f(x) = x$, para $0 \leq x \leq \pi$; (b) $f(x) = x^2$, para $0 \leq x \leq \pi$.

7. Escreva como séries de senos as mesmas funções do exercício anterior.

8. Escreva como séries de cossenos as seguintes funções:

   (a) $f(x) = x$, para $0 \leq x \leq 2\pi$; (b) $f(x) = x^2$, para $0 \leq x \leq 2\pi$.

   Compare os resultados obtidos com os dos exercícios 6 e 7, tendo em conta que as funções coincidem no intervalo $]0, \pi[$.

9. Use a série de Fourier do exercício 3 c) e a identidade de Parseval para mostrar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

10. Use a série de Fourier do exercício 3 d) e a identidade de Parseval para mostrar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}.$$

Aplicação das Séries de Fourier - Equação do Calor

11. Resolva a seguinte equação diferencial:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & t > 0, \quad 0 < x < \pi \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, & t > 0 \\ u(x,0) = \sin(x), & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}.$$

12. Resolva a seguinte equação diferencial:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & t > 0, \quad 0 < x < 1 \\ u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0, & t > 0 \\ u(x,0) = \cos(\pi x), & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}.$$