Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Análise Matemática II

Eng^{a}s Biomédica, Física, Geográfica, Geológica e Minas; Lic^{a} Física

Ano lectivo de 2004/2005

Integrais impróprios: critérios de comparação

- 1^o **critério de comparação** Sejam f e g duas funções contínuas e não negativas num intervalo I de extremos a e b $(a, b \in \overline{\mathbb{R}}, a < b)$. Se existe $M > 0$ tal que

$$f(x) \leq Mg(x)$$

para qualquer $x \in I$, então

$$\int_a^b g(x)\,dx \text{ é convergente} \Longrightarrow \int_a^b f(x)\,dx \text{ é convergente},$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = +\infty \Longrightarrow \int_a^b g(x)\,dx = +\infty.$$

- 2^o **critério de comparação** Sejam f e g duas funções contínuas e não negativas num intervalo I, semi-aberto, de extremos a e b $(a, b \in \overline{\mathbb{R}}, a < b)$ e

$$d = \begin{cases} -\infty \text{ se } f \text{ e } g \text{ são contínuas em }]-\infty, b] \\ a^+ \text{ se } f \text{ e } g \text{ são contínuas em }]a, b] \\ b^- \text{ se } f \text{ e } g \text{ são contínuas em } [a, b[\\ +\infty \text{ se } f \text{ e } g \text{ são contínuas em } [a, +\infty[, \end{cases}$$

então

$$\lim_{x \to d} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda \in]0, +\infty[\Longrightarrow \begin{cases} \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \text{ é convergente} \Longleftrightarrow \int_a^b g(x)\,dx \text{ é convergente}, \\ \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = +\infty \Longleftrightarrow \int_a^b g(x)\,dx = +\infty, \end{cases}$$

$$\lim_{x \to d} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \Longrightarrow \begin{cases} \displaystyle\int_a^b g(x)\,dx \text{ é convergente} \Longrightarrow \int_a^b f(x)\,dx \text{ é convergente}, \\ \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = +\infty \Longrightarrow \int_a^b g(x)\,dx = +\infty, \end{cases}$$

$$\lim_{x \to d} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty \Longrightarrow \begin{cases} \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \text{ é convergente} \Longrightarrow \int_a^b g(x)\,dx \text{ é convergente}, \\ \displaystyle\int_a^b g(x)\,dx = +\infty \Longrightarrow \int_a^b f(x)\,dx = +\infty. \end{cases}$$

- Se f é uma função contínua com um número finito de pontos de descontinuidade num intervalo de extremos a e b, com $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, então

$$\int_a^b |f(x)|\,dx \text{ convergente} \Longrightarrow \int_a^b f(x)\,dx \text{ convergente.}$$

- Se $a, b, \alpha \in \mathbb{R}$ então

$$\boxed{\begin{array}{l} \alpha < 1 \Longrightarrow \displaystyle\int_a^b \frac{1}{(b-x)^\alpha} = \frac{(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha}, \\[2ex] \alpha \geq 1 \Longrightarrow \displaystyle\int_a^b \frac{1}{(b-x)^\alpha} = +\infty. \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \alpha < 1 \Longrightarrow \displaystyle\int_a^b \frac{1}{(x-a)^\alpha} = \frac{(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha}, \\[2ex] \alpha \geq 1 \Longrightarrow \displaystyle\int_a^b \frac{1}{(x-a)^\alpha} = +\infty. \end{array}}$$

- Se $\alpha \in \mathbb{R}$ então

$$\boxed{\begin{array}{l} \alpha > 1 \Longrightarrow \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} = \frac{1}{\alpha-1}, \\[2ex] \alpha \leq 1 \Longrightarrow \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} = +\infty. \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \alpha > 1 \Longrightarrow \displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{(-x)^\alpha} = \frac{1}{\alpha-1}, \\[2ex] \alpha \leq 1 \Longrightarrow \displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{(-x)^\alpha} = +\infty. \end{array}}$$