Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Análise Matemática II

Eng$^{\text{a}}$s Biomédica, Física, Geográfica, Geológica e Minas; Lic$^{\text{a}}$ Física

Ano lectivo de 2004/2005

séries numéricas: critérios de convergência

- 1^o **critério de comparação** Sejam $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ duas séries de termos não negativos tais que

$$u_n \leq M v_n, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

para um certo número real positivo M. Então

$$\sum_{n=1}^{+\infty} v_n \text{ é convergente} \Longrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} u_n \text{ é convergente},$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = +\infty \Longrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} v_n = +\infty.$$

- 2^o **critério de comparação** Sejam $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ duas séries de termos não negativos. Então

$$\lim_n \frac{u_n}{v_n} = \lambda \in]0,+\infty[\Longrightarrow \begin{cases} \sum_{n=1}^{+\infty} u_n \text{ é convergente} \Longleftrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} v_n \text{ é convergente}, \\ \\ \sum_{n=1}^{+\infty} u_n = +\infty \Longleftrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} v_n = +\infty, \end{cases}$$

$$\lim_n \frac{u_n}{v_n} = 0 \Longrightarrow \begin{cases} \sum_{n=1}^{+\infty} v_n \text{ é convergente} \Longrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} u_n \text{ é convergente}, \\ \\ \sum_{n=1}^{+\infty} u_n = +\infty \Longrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} v_n = +\infty, \end{cases}$$

$$\lim_n \frac{u_n}{v_n} = +\infty \Longrightarrow \begin{cases} \sum_{n=1}^{+\infty} u_n \text{ é convergente} \Longrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} v_n \text{ é convergente}, \\ \\ \sum_{n=1}^{+\infty} v_n = +\infty \Longrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} u_n = +\infty. \end{cases}$$

- **Critério de D'Alembert** Seja $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ uma série de termos não negativos. Então

$$\lim_n \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lambda \Longrightarrow \begin{cases} \lambda \in [0,1[\Longrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} u_n \text{ é convergente}, \\ \\ \lambda = 1^+ \vee \lambda \in]1,+\infty[\Longrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} u_n = +\infty. \end{cases}$$

- **Critério de Cauchy** Seja $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ uma série de termos não negativos. Então

$$\lim_n \sqrt[n]{u_n} = \lambda \Longrightarrow \begin{cases} \lambda \in [0,1[\Longrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} u_n \text{ é convergente}, \\ \\ \lambda = 1^+ \vee \lambda \in]1,+\infty[\Longrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} u_n = +\infty. \end{cases}$$

- Se $\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n|$ é convergente então $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ é convergente.

- **Critério de Leibniz** Se $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é decrescente e $\lim_n u_n = 0$, então $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n u_n$ é convergente.

- **Série geométrica de razão r**: $\sum_{n=1}^{+\infty} ar^{n-1}$

$$\boxed{\begin{array}{l} |r| < 1 \Longrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} ar^{n-1} = \dfrac{a}{1-r}, \\ \\ r \geq 1 \Longrightarrow \begin{cases} a > 0 \Longrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} ar^{n-1} = +\infty, \\ a < 0 \Longrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} ar^{n-1} = -\infty, \end{cases} \\ \\ r \leq -1 \Longrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} ar^{n-1} \text{ é divergente.} \end{array}}$$

- **Série de Dirichlet**: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$

$$\boxed{\begin{array}{l} 0 < \alpha \leq 1 \Longrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^\alpha} = +\infty, \\ \\ \alpha > 1 \Longrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^\alpha} \text{ é convergente.} \end{array}}$$