DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA DA UNIVERSIDADE DE COIMBRA

ANÁLISE MATEMÁTICA II

Eng$^{\text{a}}$s Biomédica, Física, Geográfica, Geológica e Minas; Lic$^{\text{a}}$ Física

DATA DE ENTREGA: 4 DE MAIO DE 2005

1. Calcule

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{(x+1)^2-1}}\,dx.$$

2. Determine a natureza do integral impróprio

$$\int_0^{+\infty} \log\left(\frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{ch} x + 1}\right) dx.$$

3. Prove que se f é uma função contínua no intervalo $[a, +\infty[$ então

$$\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx \text{ convergente} \Longrightarrow \int_a^{+\infty} f(x)\,dx \text{ convergente.}$$

4. (a) Trace a curva dada por

$$\begin{cases} x = t^2 \\ y = 2t \end{cases}, \quad t \in [0, \sqrt{3}].$$

   (b) Calcule a área da figura limitada pela curva definida na alínea anterior e as rectas $y = 0$ e $x = 3$.

5. (a) Seja $\rho = f(\theta)$, com $\theta \in [0, 2\pi[$ e f uma função diferenciável, uma curva em coordenadas polares. Mostre que o comprimento dessa curva é dado por

$$C = \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(f'(\theta)\right)^2 + \left(f(\theta)\right)^2}\,d\theta.$$

   Sugestão: Assuma como conhecido que o comprimento de uma curva em coordenadas paramétricas, da forma $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, com $t \in [a, b]$ e φ, ψ diferenciáveis em $[a, b]$, é dado por

$$\int_a^b \sqrt{\left(\varphi'(t)\right)^2 + \left(\psi'(t)\right)^2}\,dt.$$

   (b) Mostre, usando coordenadas polares e coordenadas paramétricas, que o perímetro de uma circunferência de raio r é igual a $2\pi r$.

6. (a) Esboce a curva de equação em coordenadas polares

$$\rho = 2\cos(\theta), \quad \theta \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}].$$

   (b) Calcule a área limitada pela curva definida na alínea anterior e pelas rectas $\theta = -\dfrac{\pi}{4}$ e $\theta = \dfrac{\pi}{4}$.

7. Mostre que a área A da região limitada por uma curva fechada de equações paramétricas

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, \quad t \in [T_0, T],$$

   é dada por

$$A = \int_{T_0}^{T} \varphi(t)\psi'(t)\,dt.$$