Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Análise Matemática II

Eng^as Biomédica, Física, Geográfica, Geológica e Minas; Lic^a Física

data de entrega: 25 de maio de 2005

1. Calcule
$$\lim_n \frac{\log\sqrt{n+1}-\log\sqrt{n}}{n(1-\cos\frac{1}{n})}.$$

2. Usando as propriedades dos limites das sucessões prove que $\lim\limits_{x\to+\infty}\cos x$ não existe.

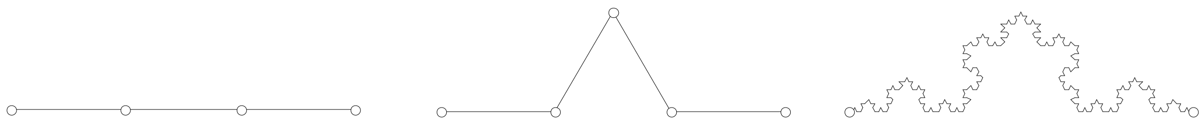
3. (a) Mostre que se $\lim\limits_n u_n=\lambda\in\bar{\mathbb{R}}$, então $\lim\limits_n \dfrac{u_1+\ldots+u_n}{n}=\lambda$.
   (b) Mostre que se $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão de termos não negativos, então
   $$\lim_n u_n=\lambda \quad\Longrightarrow\quad \lim_n \sqrt[n]{u_1\ldots u_n}=\lambda.$$
   (c) Mostre que se o Critério de D'Alembert permite concluir a natureza de uma série de termos não negativos, isto é, se
   $$\lim_n \frac{u_{n+1}}{u_n}\neq 1,$$
   o mesmo acontece com o Critério de Cauchy.

4. (a) Prove que a série
   $$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \mathrm{sh}\left(\frac{1}{n}\right)$$
   é simplesmente convergente.
   (b) Calcule o valor aproximado da soma da série da alínea anterior com 5 casas decimais correctas.

5. Determine a natureza da seguinte série
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{10-\pi n}{n+\sqrt{n^5}+\sqrt{n}}.$$

6. Usando as propriedades das séries numéricas mostre que
$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\log(2n+1)}{2\log n}\right)^n=0.$$

7. A curva de Koch é definida recursivamente da seguinte forma: começa-se com um segmento de recta, divide-se em três, desenha-se um triângulo equilátero tendo como base o pedaço central do segmento e depois apaga-se esse pedaço. Fica-se então com quatro segmentos mais pequenos que o original, nos quais se repete o procedimento e assim por diante. No limite obtém-se a curva de Koch.



   (a) Mostre que o comprimento da curva cresce indefinidamente com o número de segmentos.
   (b) Calcule a área limitada pela curva de Koch e pelo segmento original.