Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Análise Matemática II

Engªs Biomédica, Física, Geográfica, Geológica e Minas; Licª Física

data de entrega: 15 de junho de 2005

1. Determine o intervalo de convergência da série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{tg}\left(\frac{1}{n}\right) x^n.$$

2. Mostre que

$$\log(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}, \quad \forall x \in]0,1[.$$

3. Determine uma aproximação para o seguinte integral com erro inferior a 10^{-5}

$$\int_0^1 2x \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{2}\, dx.$$

4. Determine o desenvolvimento em série de Fourier da seguinte função:

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{se } \cos x \geq 0 \\ 0 & \text{se } \cos x < 0 \end{cases}.$$

5. Resolva a seguinte equação diferencial $y' + \dfrac{y}{x} = xy^2$.

6. A cabeça de um prego entra numa prancha de madeira de $0.1m$ de espessura com velocidade $100\, m/s$ e sai com velocidade $40\, m/s$. Admitindo que a desaceleração é, em cada instante, proporcional ao quadrado da velocidade, determine o tempo que a cabeça do prego demora a atravessar a prancha.

7. (a) Seja I_n tal que

$$I_n = \int (\sin x)^n \, dx.$$

Mostre que para todo o número natural $n \geq 2$,

$$I_n = -\frac{1}{n}(\sin x)^{n-1} \cos x + \frac{n-1}{n} I_{n-2}.$$

(b) Mostre que se $|k| < 1$, então

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-(k \sin x)^2}}\, dx = \frac{\pi}{2}\Big[1 + \Big(\frac{1}{2}\Big)^2 k^2 + \Big(\frac{1\times 3}{2\times 4}\Big)^2 k^4 + \Big(\frac{1\times 3\times 5}{2\times 4\times 6}\Big)^2 k^6 + \cdots\Big].$$

8. Considere a seguinte equação diferencial ordinária

$$\frac{dy}{dx} = a(x)y^2 + b(x)y + c(x),$$

com a, b e c funções contínuas num intervalo $D \subset \mathbb{R}$.

(a) Mostre que se $y = f(x)$ é uma solução particular da equação diferencial, então a substituição

$$y = f(x) + \frac{1}{z}$$

permite obter uma equação diferencial ordinária linear de primeira ordem equivalente.

(b) Resolva a equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = (1-x)y^2 + (2x-1)y - x.$$