Análise Matemática III

Engenharia Civil

2005/2006

Exercícios propostos para as aulas práticas

Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Algumas noções topológicas em $\mathbb{R}^n$

1. Verifique se cada um dos seguintes conjuntos é ou não vizinhança dos pontos P indicados

   (a) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, (x-3)^2 + (y-1)^2 < 1\}, \quad P = (3,1);$

   (b) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, (x-3)^2 + (y-1)^2 \leq \frac{1}{2}\}, \quad P = (3,1);$

   (c) $\mathbb{R}^2, \quad P = (3,1);$

   (d) $\{(3,1)\}, \quad P = (3,1);$

   (e) Uma recta que contenha o ponto $(3,1), \quad P = (3,1);$

   (f) Uma bola fechada de centro em $(2,1,5), \quad P = (2,1,5);$

   (g) Uma recta que contenha $(2,1,5), \quad P = (2,1,5);$

   (h) Um plano que contenha $(2,1,5), \quad P = (2,1,5).$

2. Considere os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$:

$$S_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, (x > 0 \,\wedge\, x + y < 1) \vee (1 < x < 3 \,\wedge\, 0 < y < 2)\}\,;$$

$$S_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, xy \neq 0\}\,;$$

$$S_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, \tfrac{xy}{y-x^2} \in \mathbb{R} \text{ ou } xy = 0\}\,;$$

$$S_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, \tfrac{2x}{4-x^2-y^2} \in \mathbb{R} \text{ ou } x = 0\}\,.$$

   Para cada um deles,

   (a) determine o interior, o exterior, a fronteira, o fecho e o derivado;

   (b) verifique se são abertos, fechados ou limitados.

Cálculo Diferencial em $\mathbb{R}^n$

1. Domínios

3. Descreva geometricamente o domínio das seguintes funções :

   (a) $f(x,y) = \dfrac{xy}{y-2x};$

   (b) $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{1-x^2-y^2}};$

   (c) $f(x,y) = \log(xy);$

   (d) $f(x,y) = \dfrac{x^3}{3} + \arcsin(y+3);$

   (e) $f(x,y,z) = \sqrt{4-x^2-y^2-z^2};$

   (f) $f(x,y) = \sqrt{\dfrac{x^2+y^2+2x}{x^2+y^2-2x}};$

   (g) $f(x,y) = \log[x \log(y-x^2)];$

(h) $f(x,y) = \log\left[(16 - x^2 - y^2)(x^2 + y^2 - 4)\right]$;

(i) $f(x,y,z) = h(x) + h(y) + h(z)$, onde h é uma função real de variável real com domínio $[0, \pi/2]$;

(j) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x^4 + y^6)}{x^4 + y^6} & \text{se} \quad x > 0 \\ y + \sqrt{1-x} & \text{se} \quad x \leq 0 \end{cases}$.

2. Limites e continuidade

4. Prove, usando a definição que $\lim\limits_{P \to P_0} f(P) = L$, sendo

   (a) $f(x,y) = 2x + 3y$, $P_0 = (1,3)$ e $L = 11$;

   (b) $f(x,y) = xy$, $P_0 = (0,0)$ e $L = 0$;

   (c) $f(x,y) = \dfrac{x^4 y^4}{x^4 + 1}$, $P_0 = (0,0)$ e $L = 0$;

   (d) $f(x,y) = \dfrac{x^3 y^2}{x^2 + y^2}$, $P_0 = (0,0)$ e $L = 0$.

5. Calcule (se existir)

   (a) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} \dfrac{x^2}{x^2 + y^2}$;

   (b) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(\pi/2, 1/\sqrt{2}, 1/2)} \log\left(\dfrac{\sin x}{2} + (yz)^{\frac{2}{3}}\right)$;

   (c) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,-1)} \dfrac{2xy}{(x+y)^2}$;

   (d) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^4 - 4y^4}{2x^2 + 4y^2}$;

   (e) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,3)} \dfrac{xy - 2x - y + 2}{(x-1)(y^2 - 4y + 4)}$.

6. Usando trajectórias convenientes tire conclusões sobre a existência dos seguintes limites

   (a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2}{x^2 + y^2}$;

   (b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy(x^2 - y^2)}{x^4 + y^4}$;

   (c) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \dfrac{2xy - 2y}{(x-1)^2 + y^2}$;

   (d) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy(x-y)}{x^2 + y^4}$;

   (e) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^4}{x^3 + y^6}$;

   (f) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(1,0,0)} \dfrac{(x-1)yz}{(x-1)^3 + y^3 + z^3}$.

7. Seja $D \subseteq \mathbb{R}^n$ com $D = D_1 \cup D_2$ e seja P_0 ponto de acumulação de D_1 e também de D_2. Sendo $f : D \to \mathbb{R}$, mostre que se

$$\lim_{\substack{P \to P_0 \\ P \in D_1}} f(P) = \lim_{\substack{P \to P_0 \\ P \in D_2}} f(P) = L$$

então $\lim\limits_{P \to P_0} f(P) = L$.

8. Sejam $f, g : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $P_0 \in D'$. Suponha-se que $|f(P)| \leq |g(P)|$ para todo o $P \in (V \setminus \{P_0\}) \cap D$, onde V é uma vizinhança de P_0 e que $\lim\limits_{P \to P_0} g(P) = 0$. Prove que $\lim\limits_{P \to P_0} f(P) = 0$.

9. Sejam $f, g : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $P_0 \in D'$. Suponha-se que existe uma vizinhança V de P_0 tal que g é limitada em $(V \setminus \{P_0\}) \cap D$ e que $\lim\limits_{P \to P_0} f(P) = 0$. Prove que $\lim\limits_{P \to P_0} f(P)g(P) = 0$.

10. Mostre que

   (a) $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2 + 2y^2) \sin \frac{1}{xy} = 0\,;$ (b) $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2 y}{x^2 + 2y^2} = 0\,;$

   (c) $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 + xy - y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0;$ (d) $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2 \sin y}{x^2 + 2y^2} = 0\,.$

11. Determine o domínio das seguintes funções e estude a existência de limite nos pontos P_0 indicados.

   (a) $\displaystyle f(x, y) = \frac{x^2}{x^2 + y^2}$ em $P_0 = (0, 0)$;

   (b) $\displaystyle f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}$ em $P_0 = (0, 0)$;

   (c) $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\[2ex] 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ em $P_0 = (0, 0)$;

   (d) $\displaystyle f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x + y}$ em $P_0 = (-1, 1)$;

   (e) $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - y^2}{x + y} & \text{se } x \neq -y \\[2ex] 0 & \text{se } x = -y \end{cases}$ em $P_0 = (-1, 1)$;

   (f) $\displaystyle f(x, y) = \frac{x^2 - 2xy + y^2}{x^2 y - y^3}$ em $P_0 = (-1, 1)$;

   (g) $\displaystyle f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (y - x)^2}$ em $P_0 = (0, 0)$;

   (h) $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\[2ex] 1 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ em $P_0 = (0, 0)$;

(i) $f(x,y,z) = \dfrac{x^2yz}{x^8+y^4+z^2}$ em $P_0=(0,0,0)$;

(j) $f(x,y) = \begin{cases} x & \text{se } x=y \\ \\ x^2 & \text{se } x \neq y \end{cases}$ em $P_0=(1,1)$;

(k) $f(x,y) = \dfrac{x\,|y|}{|x|+|y|}$ em $P_0=(0,0)$;

(l) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|y|}{x^2}\, e^{-\frac{|y|}{x^2}} & \text{se } x \neq 0 \\ \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$ em $P_0=(0,0)$.

12. Sejam $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e $g: E \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$duas funções com $f(D) \subseteq E$ e seja P_0 um ponto de acumulação de D. Suponha-se que $\lim\limits_{P\to P_0} f(P) = Q_0$, em que Q_0 é um ponto de acumulação de E e que $\lim\limits_{Q\to Q_0} g(Q) = M_0$. Prove então que $\lim\limits_{P\to P_0} g\circ f\ (P) = M_0$, se uma das condições seguintes for verificada:

    (a) $\exists r>0 : \forall P \in D, 0 < \| P - P_0 \| < r \Rightarrow f(P) \neq Q_0$;

    (b) g é contínua em Q_0.

13. Calcule os limites indicados, depois de escrever cada uma das funções como composição de duas:

    (a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\log(1-x^2-y^2)}{x^2+y^2}$;

    (b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$;

    (c) $\lim\limits_{(x,y)\to(2,0)} \dfrac{\sin(xy)}{xy}$.

14. Determine o domínio de continuidade das funções definidas por:

    (a) $f(x,y) = \begin{cases} x^2+y^2 & \text{se } x^2+y^2 \leq 1 \\ \\ 0 & \text{se } x^2+y^2 > 1 \end{cases}$;

    (b) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3x^2y}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$;

    (c) As funções dos exercícios 11 (c), (d), (e), (f), (g), (j) e (l);

(d) $f(x,y) = \begin{cases} e^{\frac{y}{x}} & \text{se } x \neq 0 \\ \\ 2y & \text{se } x = 0 \end{cases}$;

(e) $f(x,y) = \begin{cases} 1+x^2 & \text{se } y = 0 \\ \\ 1+y^2 & \text{se } x = 0 \\ \\ 0 & \text{se } x \neq 0 \text{ e } y \neq 0 \end{cases}$;

(f) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{se } x < y^2 \\ \\ 0 & \text{se } x \geq y^2 \end{cases}$;

(g) $f(x,y) = \begin{cases} x+y & \text{se } xy = 0 \\ \\ 0 & \text{se } xy \neq 0 \end{cases}$.

<u>3. Derivadas Parciais</u>

15. Usando a definição de derivada parcial, determine

(a) $f_x(0,0)$ e $f_y(1,2)$, sendo $f(x,y) = x^2y$;

(b) $f_x(1,1)$ e $f_y(0,0)$, sendo

$$f(x,y) = \begin{cases} x \text{ se } x < y \\ y \text{ se } x \geq y \end{cases} ;$$

16. Mostre que a função f definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^4} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

possui derivadas parciais em $(0,0)$, embora seja descontínua nesse ponto.

17. Calcule as derivadas parciais de $1^{\underline{a}}$ ordem das funções seguintes:

(a) $f(x,y) = e^{2xy^3}$;

(b) $f(x,y,z) = \log(e^x + z^y)$;

(c) $f(x,y,z) = e^x \sin y + \cos(z - 3y)$;

(d) $f(x,y) = (\text{cotg}x)^{\text{tg}y}$;

(e) $f(x,y) = \arcsin\sqrt{\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}$;

(f) $f(x,y,z) = \cos(y\sqrt{x^2+z^2})$;

(g) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y}{x^6+y^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$;

(h) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x+y} & \text{se} \quad x+y \neq 0 \\ x & \text{se} \quad x+y = 0 \end{cases}$.

18. Calcule as derivadas parciais de 2ª ordem das funções seguintes:

    (a) $f(x,y) = \log(x+y) + \log(x-y)$;

    (b) $f(x,y,z) = \sin(xyz)$;

    (c) $f(x,y,z) = x^2e^{yz} + y\log z$.

19. Prove que, sendo $f(x,y) = -\log(x^3+y^3)$ se tem $f_{xy} = f_xf_y$.
    Nota: A igualdade acima nem sempre é verdadeira.

20. Uma função $f(x,y)$ diz-se *harmónica* se verificar a equação seguinte, dita *equação de Laplace*,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \ .$$

    Prove que as seguintes funções são harmónicas:

    (a) $f(x,y) = \text{arctg}(\frac{y}{x})$;

    (b) $f(x,y) = \log(\sqrt{x^2+y^2})$.

21. Sejam $u(x,y)$ e $v(x,y)$ duas funções com derivadas contínuas até à ordem 2. Prove que, se

$$\begin{cases} u_x(x,y) &= & v_y(x,y) \\ u_y(x,y) &= & -v_x(x,y) \end{cases} ,$$

    então u é uma função harmónica.

22. Sendo $w(x,y) = \cos(x-y) + \log(x+y)$ prove que $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$.

23. Calcule todas as derivadas de 3ª ordem da funçã definida por $z(x,y) = \log(x^2+y^2)$.

24. Utilizando o *Teorema de Schwarz*, mostre que não existe nenhuma função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $\dfrac{\partial f}{\partial x} = xy^2 + 1$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y} = y^2$.

25. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x+y} & \text{se} \quad x \neq -y \\ 0 & \text{se} \quad x = -y \end{cases}$.
    Calcule $f_y(x,0)$, $f_x(0,y)$ e mostre que $f_{xy}(0,0) \neq f_{yx}(0,0)$.

4. Diferenciabilidade e diferenciais

26. Usando a definição , verifique se são diferenciáveis as seguintes funções nos pontos dados:

    (a) $f(x,y,z) = x\,y\,z$, em todo o seu domínio;

    (b) $f(x,y) = \begin{cases} x^2+y^2 & \text{se } x \neq 0 \\ y^4 & \text{se } x = 0 \end{cases}$ no ponto $P=(0,0)$;

    (c) $f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \neq y^2 \\ y-1 & \text{se } x = y^2 \end{cases}$ no ponto $P=(1,1)$.

27. Usando condições necessárias ou suficientes para a diferenciabilidade de uma função num dado ponto, verifique se são diferenciáveis as seguintes funções nos pontos dados:

    (a) $f(x,y) = e^{x^2+y^2}$, no ponto $(2,1)$;

    (b) $f(x,y,z) = x^2 e^{yz} + y \log z$, no ponto $(1,2,1)$;

    (c) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(xy-y)}{(x-1)^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (1,0) \\ \\ 2 & \text{se } (x,y) = (1,0) \end{cases}$ no ponto $(1,0)$;

    (d) $f(x,y,z) = \cos(y\sqrt{x^2+z^2})$, no ponto $(0,1,0)$.

28. Determine, caso exista, o diferencial total das funções seguintes nos pontos indicados:

    (a) $f(x,y) = \log(x^2+y^2) + x\mathrm{tg}y$, no ponto $(0,\frac{\pi}{4})$;

    (b) $f(x,y,z) = x^2 e^{yz} + y \log z$, no ponto $(2,0,1)$;

    (c) $f(x,y) = \arcsin\frac{x}{y} + x^3 e^y$, no ponto $(1,2)$;

    (d) $f(x,y) = \log(x^2+y^2) + x\mathrm{cotg}y$, no ponto $(0,\frac{\pi}{4})$;

    (e) $f(x,y) = \dfrac{xy^3}{x^4+y^6}$, no ponto $(0,0)$;

    (f) $f(x,y,z) = x^\alpha y^\beta z^\gamma$, no ponto $(1,1,1)$ e sendo α,β,γ constantes.

29. Usando diferenciais, calcule o valor aproximado das seguintes funções nos pontos dados:

    (a) $f(x,y) = \cos(x^2+y)$, no ponto $(0.1, 3.14)$;

    (b) $g(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, no ponto $(2.001, 0.003, -0.001)$;

    (c) $h(x,y) = x^3y^2$, no ponto $(1.02, 0.97)$.

30. Calcule um valor aproximado para $(3.05)^2 \times (2.01)^3 \times (1.006)^6$.

31. Uma caixa sem tampa vai ser construída com madeira de $0.5cm$ de espessura. O comprimento interno deve ter $70cm$, a largura interna $40cm$ e a altura interna $35cm$. Use o conceito de diferencial para calcular a quantidade aproximada de madeira que será utilizada na construção da caixa.

32. Qual é, aproximadamente, o acréscimo sofrido pelo volume de um cilindro quando o raio da sua base, sendo inicialmente de $30cm$, é aumentado em $5cm$ e a altura, inicialmente de $1.2m$, é reduzida em $5cm$.

5. Derivada da função composta

33. Calcule $\frac{du}{dt}$ sendo $u = \log(\sin\frac{x}{y})$ e $\begin{cases} x &= 3t^2 \\ y &= \sqrt{1+t^2} \end{cases}$.

34. Calcule $\frac{\partial u}{\partial s}$ e $\frac{\partial u}{\partial t}$ sendo $u = x^2 e^{xy} + y^2 \sin(xy)$ e $\begin{cases} x &= s^2 t \\ y &= s\, e^t \end{cases}$.

35. Calcule $\frac{dz}{dy}$ sendo $z = f(x^2+y^2, x+y)$ e $x = \phi(y)$.

36. Sendo $u = x^3 F(\frac{y}{x}, \frac{z}{x})$, prove que $x\, u_x + y\, u_y + z\, u_z = 3u$.

37. Sendo $z = \frac{y^2}{2} + \phi(\frac{1}{x} + \log\, y)$, prove que $y\, z_y + x^2 z_x = y^2$.

38. Considere a função h definida por $h(x,y) = f\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$, onde f é uma função real de variável real diferenciável. Se $g(u,v) = h(x(u,v), y(u,v))$ e $x(u,v) = u\cos v$, $y(u,v) = u\sin v$,

    (a) verifique que $\frac{\partial g}{\partial v}(u,v) = 0$;

    (b) calcule $\frac{\partial g}{\partial u}(1,0)$, sabendo que $f'(1) = 2$.

39. A função $f(u,v,w)$ é diferenciável e as suas derivadas satisfazem

$$f_u(\alpha,\alpha,\beta) = f_v(\alpha,\alpha,\beta) = \alpha\beta$$
$$f_w(\alpha,\alpha,\beta) = \alpha^2 - \beta^2\,.$$

Calcule o valor das derivadas parciais da função $g(x,y) = f(x^2 - y, 3x - 3y^2, 2x)$, no ponto $(2,1)$.

40. Sendo $z = x\,\phi(x+y) + \psi(x+y)$, prove que $z_{x^2} - 2z_{xy} + z_{y^2} = 0$.

41. Sejam f e g funções de uma variável que admitem derivadas de 1 e 2ª ordens. Sendo $c \in \mathbb{Z}^+$, prove que a função $u(x,t) = f(x + c\,t) + g(x - c\,t)$ verifica a seguinte equação (dita *equação de propagação*):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,.$$

42. **1.**Sendo $\phi(x)$, $\psi(x,y)$ e $\eta(x,y,z)$, funções com derivadas de todas as ordens, calcule $F''(\theta)$ nos seguintes casos:

    (a) $F(\theta) = \psi(\cos\theta, \theta^3)$;

    (b) $F(\theta) = \eta(\phi(\theta), \sin\theta, \theta)$;

    (c) $F(\theta) = \phi(\eta(\theta,\theta,\theta) + \psi(\theta,\theta))$.

    2.Determine as derivadas parciais de 2ª ordem das funções $f(u,v)$ nos seguintes casos:

    (a) $f(u,v) = \psi(u\cos v, u\sin v)$;

(b) $f(u,v) = \psi(\psi(u,v), \psi(v,u))$;

(c) $f(u,v) = \phi(\phi(uv))$.

43. Seja $w(x,y,z) = f(y-z, z-x, x-y)$ com f função real admitindo derivadas parciais contínuas de todas as ordens.

(a) Mostre que $\dfrac{\partial w}{\partial x} + \dfrac{\partial w}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial z} = 0$.

(b) Calcule $\dfrac{\partial^2 w}{\partial y \partial x}$ e $\dfrac{\partial^2 w}{\partial z \partial y}$.

44. Seja $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^+$ uma função de classe C^3. Sendo $F(x,y) = \log g(2x, y^2)$,

(a) Calcule as derivadas parciais de 1ª ordem de F em função das derivadas parciais de g;

(b) Sabendo que g e as suas derivadas satisfazem as seguintes relações
$g(0,\beta) = 2\beta$
$g_{uv}(0,\beta) = g_u(0,\beta) g_v(0,\beta) = \beta$, mostre que $\dfrac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}(0,1) = 1$.

6. Teorema da função implícita

45. Mostre que a equação $x^2 + y^2 - z^2 - xy = 0$ define z como função implícita de x e y numa vizinhança do ponto $(1,1,1)$ e calcule $\dfrac{\partial z}{\partial x}(1,1)$ e $\dfrac{\partial z}{\partial y}(1,1)$.

46. Suponha que a equação $f(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}) = 0$ define z como função implícita de x e y nas condições do teorema da função implícita. Mostre que então $x\,\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\,\dfrac{\partial z}{\partial y} = z$.

47. Seja $H(x,y) = \sin(3x - y)$. Calcule $\dfrac{dH}{dt}$ nos pontos em que as equações

$$\begin{cases} x^3 + 2y = 2t^3 \\ x - y^2 = t^2 + 3t \end{cases}$$

definem implicitamente, nas condições do teorema, funções $x(t)$ e $y(t)$.

48. Para que pontos (x_0, y_0) (e nas respectivas vizinhanças), define a expressão $y^2 - 2xy = 1$:

(a) y como função implícita de x ;

(b) x como função implícita de y .

49. Seja $f(\theta)$ uma função com derivada contínua, para todo o $\theta \in \mathbb{R}$, e tal que $f(1) = e + 2$.

(a) Prove que a equação $\frac{z^2}{2} + e^{xy} = f(\frac{x}{y})$ define z como função implícita de x e y numa vizinhança do ponto $(1,1,-2)$.

(b) Prove que $(x\,\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\,\dfrac{\partial z}{\partial y})_{(1,1)} = e$.

50. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função com derivadas parciais contínuas em $\mathbb{R}^2$ e tal que

$$\begin{cases} f(1,2) &= f(2,1) &= 0 \\ f_x(1,2) &= 1 & \\ f_y(2,1) &= 2 & \end{cases}.$$

(a) Prove que a equação $(z + f(x,y))(z + f(y,x)) = 1$ define z como função implícita de x e y numa vizinhança do ponto $(1,2,1)$.

(b) Calcule $z_x(1,2)$.

51. Determine uma relação do tipo $F(x,y,z) = 0$ que defina z como função implícita de x e y, com domínio $\mathbb{R}^2$, e satisfazendo

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{4x^3y}{3z^2+1} \\ \\ z(1,y) = y \end{cases}.$$

52. Considere a equação $x - z + (y+z)^2 - 6 = 0$.

(a) Mostre que a equação dada define z como função implícita de x e y numa vizinhança do ponto $(3,-3,1)$.

(b) Calcule $\dfrac{\partial z}{\partial x}(3,-3)$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}(3,-3)$ e $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(3,-3)$.

53. Sejam f, g e h funções diferenciáveis. Sabendo que a relação $f[g(xy, zx)] = 0$ define implicitamente $z = h(x,y)$, prove que

$$x\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y} = -z\,.$$

54. Considere a equação

$$\log(xyz) + e^{x+2y-ez} = 0\,.$$

(a) Prove que numa vizinhança de $(1, 1/2, 2/e)$ esta equação define x como função implícita de y e z.

(b) Calcule $\dfrac{\partial x}{\partial y}\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{e}\right)$ e $\dfrac{\partial^2 x}{\partial z \partial y}\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{e}\right)$.

55. Usando a definição , calcule as derivadas direccionais das funções seguintes nos pontos P_0 dados e segundo o vector $\vec{v}$ indicado.

(a) $f(x,y) = x^2 - xy$ em $P_0 = (0,1)$ e $\vec{v} = 3\hat{\imath} + 4\hat{\jmath}$;

(b) $f(x,y,z) = xyz^2$ em $P_0 = (0,1,0)$ e $\vec{v} = 2\hat{\imath} + \hat{\jmath} + \hat{k}$.

56. Determine os vectores $\vec{v}$, não nulos, para os quais existe $D_{\vec{v}}f(P_0)$, sendo

(a) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$, $\quad P_0 = (0,0)$;

(b) $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$, $\quad P_0 = (0,0)$;

(c) $f(x,y) = \begin{cases} xy^2 \text{ se } y \geq 0 \\ x^3 \text{ se } y < 0 \end{cases}$, $\quad P_0 = (0,0)$.

57. Sejam $f(x,y) = \sin(xy)$ e $g(t) = \sin((\pi + \frac{t}{\sqrt{2}})(\frac{1}{2} + \frac{t}{\sqrt{2}}))$.

   (a) Calcule $g'(0)$;

   (b) Utilize o resultado da alínea anterior para calcular pela definição $D_{\hat{v}} f(\pi, \frac{1}{2})$ sendo $\vec{v} = \frac{\hat{\imath}}{\sqrt{2}} + \frac{\hat{\jmath}}{\sqrt{2}}$.

58. Calcule $D_{\hat{v}} f(P_0)$, sendo:

   (a) $f(x,y) = e^x tg\, y + 2x^2 y$; $P_0 = (0, \frac{\pi}{4})$; $\vec{v} = -\frac{\hat{\imath}}{\sqrt{2}} + \frac{\hat{\jmath}}{\sqrt{2}}$.

   (b) $f(x,y,z) = 3x^2 y + 2yz$; $P_0 = (-1, 0, 4)$; $\vec{v} = \frac{\hat{\imath}}{\sqrt{2}} - \frac{\hat{k}}{\sqrt{2}}$.

   (c) $f(x,y,z) = x^2 z + y\, e^{xz}$; $P_0 = (1, -2, 3)$; $\vec{v} = \hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + 3\hat{k}$.

   (d) $f(x,y) = x^2 - xy - 2y^2$; $P_0 = (1, 2)$; $\vec{v}$ é um vector que faz um ângulo de 60^O com OX .

59. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função dada por $f(x,y) = \begin{cases} x + y & \text{se } x < y \\ 2y & \text{se } x \geq y \end{cases}$.

   (a) Calcule $D_{\hat{v}} f(0,0)$, onde $\vec{v} = -\frac{\hat{\imath}}{\sqrt{5}} + \frac{2\hat{\jmath}}{\sqrt{5}}$.

   (b) Prove que f não é diferenciável em $(0,0)$.

60. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função tal que $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$. Sabendo que, para um dado vector unitário $\hat{u}$ do plano, $D_{\hat{u}} f(0,0) = 3$, prove que f não é diferenciável em $(0,0)$.

61. Determine o gradiente das seguintes funções :

   (a) $f(x,y) = x^2 - 5xy + 3y^2$;

   (b) $f(x,y) = x^2 log\, y$;

   (c) $f(x,y,z) = z^2 e^{xy}$.

62. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = x^2 + y^2 cos\, x$. Indique todos os vectores unitários $\hat{v}$ onde a derivada direccional atinge os seguintes valores:

   (a) valor máximo de $D_{\hat{v}} f(0, \pi)$;

   (b) valor mínimo de $D_{\hat{v}} f(0, \pi)$;

   (c) $D_{\hat{v}} f(0, \pi) = 0$.

   (d) Resolva as alíneas anteriores para o ponto $P = (\pi, 2\pi)$.

   (e) Mostre que as direcções onde a derivada direccional se anula são ortogonais às direcções onde ela atinge os valores extremos.

63. Num mapa topográfico de uma região montanhosa, faça coincidir a Rosa dos Ventos com o referencial ortonormado usual XOY, por forma a que o semi-eixo positivo OY tenha a "direcção Norte". A altitude em cada ponto (x,y) representado no mapa é dada, em metros, pela função

$$h(x,y) = 3000 - 2x^2 - y^2 .$$

Suponha que um alpinista se encontra no ponto (30,-20), sobre a curva de nível de valor 800 da função h.

(a) Se o alpinista se mover na direcção sudoeste, estará a subir ou a descer?

(b) Em que direcção deverá o alpinista mover-se por forma a

(b.1) ascender mais rapidamente;

(b.2) percorrer um caminho plano.

64. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{y} & \text{se } y \neq 0 \\ \\ 0 & \text{se } y = 0 \end{cases} .$$

(a) Mostre que f admite todas as derivadas parciais de 1ª ordem em $(0,0)$.

(b) Prove que f admite derivada direccional segundo qualquer vector (não nulo) $\vec{v}$ do plano, sendo

$$D_{\hat{v}} f(0,0) = \langle \bigtriangledown f(0,0), \hat{v} \rangle \ .$$

(c) Mostre que f não é diferenciável em $(0,0)$, justificando a sua resposta.

65. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0 \\ \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases} .$$

Mostre que

(a) f é contínua em $(0,0)$;

(b) f possui derivada em $(0,0)$ segundo qualquer vector não nulo;

(c) f não é diferenciável em $(0,0)$.

8. Plano tangente e recta normal a uma superfície

66. Determine a equação do plano tangente às seguintes superfícies nos pontos indicados:

(a) $z = x^2 + y^2$ no ponto $P_0 = (1, –2, 5)$;

(b) $(x-1)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 3$ no ponto $P_0 = (0, 1, –1)$;

(c) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{8} = 0$ no ponto $P_0 = (4, 3, 4)$;

(d) $x^2 + y^2 + z^2 = 2rz$ no ponto $P_0 = (r\cos\theta, r\sin\theta, r)$ com $r > 0$;

(e) $z^2 = x^2 + y^2$ no ponto $P_0 = (1, 1, \sqrt{2})$;

(f) $x^2 + y^2 = 25$ no ponto $P_0 = (3, 4, 2)$.

67. Mostre que, para $a, b, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, as superfícies de equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2} \qquad \text{e} \qquad x^2 + y^2 + \left(z - \frac{b^2 + c^2}{c}\right)^2 = \frac{b^2}{c^2}\left(b^2 + c^2\right)$$

são tangentes nos pontos $(0, \pm b, c)$.

68. Seja f uma função diferenciável e S a superfície de equação $z = y\, f(\frac{x}{y})$.

(a) Determine uma equação do plano tangente a S num ponto $(x_0, y_0, z_0) \in S$.

(b) Mostre que todos os planos tangentes a S passam em $(0, 0, 0)$.

69. Prove que toda a recta normal a uma esfera passa no seu centro.

70. Determine os pontos do parabolóide $z = 4x^2 + 9y^2$ onde a normal à superfície é paralela à recta que passa por $P(-2, 4, 3)$ e $Q(5, -1, 2)$.

71. Prove que o plano tangente à superfície $z = x^2 - y^2$ no ponto $P = (a, b, c)$ é intersectado pelo eixo dos zz no ponto $(0, 0, -c)$.

72. Considere a superfície S definida por

$$x^2 + y^2 - z^2 - 2x = 0\,.$$

Determine os pontos de S nos quais o plano tangente a S é paralelo aos planos coordenados.

9. Extremos

73. Determine os extremos das seguintes funções:

(a) $f(x, y) = x\, y\, e^{x-y}$;

(b) $f(x, y) = \sin x \cos y$;

(c) $f(x, y) = (y^2 - x)^2$;

(d) $f(x, y) = (x^2 + y^2 - 1)^2$;

(e) $f(x, y, z) = 4 - x^2$;

(f) $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + x - y + 1$;

(g) $f(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + 4z^2$;

(h) $f(x, y, z) = xy + yz + xz + \frac{1}{4}(x^2 + y^2 + z^2)$;

(i) $f(x, y) = x^2 - 2xy^2 + y^4 - y^5$;

(j) $f(x, y) = (x - y)^2 - x^4 - y^4$.

74. Determine os extremos da função $z = f(x, y)$ definida implicitamente pela equação $z^2 - z(x^2 + y^2) = 1$, nas condições do Teorema da Função Implícita e tais que

(a) $f(0, 0) = 1$;

(b) $f(0, 0) = -1$.

75. Considere a seguinte equação , $e^z + x^2 + y^2 - \frac{z^2}{2} = 1$.

(a) Mostre que a equação acima define z como função implícita de x e y.

(b) Seja $z = h(x, y)$ a função implícita da alínea anterior. Faça o estudo completo dos extremos locais de $h(x, y)$.

Nota: A equação $e^z - \frac{z^2}{2} - 1 = 0$ tem uma única solução real, que é $z = 0$.

76. Utilizando, se possível, o método dos *Multiplicadores de Lagrange*, determine os extremos locais das seguintes funções sujeitas às condições de ligação indicadas:

(a) $f(x, y) = x^2 - 2x + y^2 + 2y - 1$; $x^2 - 4x + y^2 = -2$;

(b) $f(x, y, z) = x - 2y + 2z$; $x^2 + y^2 + z^2 = 1$;

(c) $f(x, y) = 2x^2 + xy - y^2 + y$; $2x + 3y = 1$;

(d) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$; $x - y + z = 1$;

(e) $f(x, y, z) = z - x^2 - y^2$; $\left\{ \begin{array}{lcl} x + y + z & = & 1 \\ x^2 + y^2 & = & 4\,; \end{array} \right.$

77. Entre todos os paralelipípedos rectângulos cuja soma das medidas das suas arestas é $12cm$, qual é o que tem maior volume?

78. Determine o ponto do plano de equação $x + y + 2z = 1$ que está mais perto do ponto $M = (1, 2, 3)$.

79. Determine os extremos absolutos da função definida por $f(x, y) = x^3$ sobre o conjunto $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$.

80. Uma dada empresa produz um certo artigo em 3 fábricas. Em cada uma delas produzem-se x, y e z milhões de unidades do artigo, com despesa anual dada por $L(x, y, z) = 2(x^2 + y^2 + z) + 500$. No próximo ano comercial, a empresa vai produzir, no total, quatro milhões de unidades de artigo. Sabendo que duas das fábricas devem ter uma produção que satisfaça a restrição adicional $x^2 + y^2 = 2$ (em milhões de unidades), determine as quantidades x, y e z que cada fábrica deve produzir de modo a minimizar a despesa anual.

Equações diferenciais lineares

1. Dependência e independência linear de funções

81. Estude quanto à independência linear os seguintes conjuntos de funções, nos conjuntos indicados :

(a) $f_1(x) = x, \quad f_2(x) = x + 1, \quad$ em $\mathbb{R}$;

(b) $f_1(x) = x, \quad f_2(x) = |x|, \quad$ em $\mathbb{R}$;

(c) $f_1(x) = x, \quad f_2(x) = |x|, \quad$ em $\mathbb{R}^+$;

(d) $f_1(x) = 0, \quad f_2(x) = x, \quad f_3(x) = e^x, \quad$ em $\mathbb{R}$;

(e) $f_1(x) = \sin x, \quad f_2(x) = \cos x, \quad f_3(x) = 1, \quad$ em $\mathbb{R}$;

(f) $f_1(x) = \sin^2 x, \quad f_2(x) = \cos^2 x, \quad f_3(x) = 1, \quad$ em $\mathbb{R}$;

(g) $f_1(x) = \cos 2x, \quad f_2(x) = 1, \quad f_3(x) = \cos^2 x, \quad$ em $\mathbb{R}$;

(h) $f_1(x) = e^x, \quad f_2(x) = e^{-x}, \quad f_3(x) = e^{4x}, \quad$ em $\mathbb{R}$.

82. Considerando $f_1(x) = 2$ e $f_2(x) = e^x$, repare que $f_1(0) - 2f_2(0) = 0$. Pode garantir que f_1 e f_2 são linearmente dependentes em qualquer intervalo contendo $x = 0$?

2. Solução de uma equação diferencial

83. Nas alíneas seguintes averigue se y é ou não solução da equação diferencial dada:

(a) $y = 3x + \dfrac{2}{x} + 4, \qquad y''' + \dfrac{3}{x}y'' = 0$;

(b) $y = c_1 x + \dfrac{2}{x} + c_2, \qquad y''' + \dfrac{3}{x}y'' = 0, \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$;

(c) $y = c_1 e^x + c_2 e^{2x}, \qquad y'' - 3y' + 2y = 0, \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$;

(d) $y = e^x(c_1 \cos x + c_2 \sin x), \qquad y'' - 2y' + 2y = 0, \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$.

84. Determine a solução dos seguintes problemas de valores iniciais:

(a) $y''' = 4x^2 + 3, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2 \quad$ e $\quad y''(0) = 1$;

(b) $y' + \dfrac{y}{x} = x, \quad y(1) = 0$;

(c) $yy' + x = 0, \quad y(0) = 1$;

(d) $\dfrac{d\,y}{d\,t} = \dfrac{1}{t + y^2}, \quad y(-2) = 0$;

(e) $x^2 u' + x(x+2)u = e^x, \quad u(1) = \dfrac{e}{2}$.

85. Sejam $a, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções contínuas e seja y uma função derivável em $\mathbb{R}$ e tal que

$$y'(x) \leq a(x)y(x) + b(x)\,, \quad \forall x \in \mathbb{R}\,.$$

Fixando $x_0 \in \mathbb{R}$, seja z a solução do problema de Cauchy

$$\begin{cases} z' = a(x)z + b(x) \\ z(x_0) = y(x_0) \end{cases}$$

Mostre que $y(x) \leq z(x)$, para todo o $x \geq x_0$.

3. Sistema fundamental de soluções

86. Verifique se as funções e^x e e^{2x} constituem um sistema fundamental de soluções para as seguintes equações diferenciais:

(a) $y'' - 3y' + 2y = 0$;

(b) $y''' - 4y'' + 5y' - 2y = 0$.

87. Verifique se as funções seguintes constituem um sistema fundamental de soluções para a equação diferencial $y''' = 0$:

(a) $\{1, x+1, x^2\}$;

(b) $\{x^2, x^2+1, (x^2+1)^2\}$;

(c) $\{x+1, (x+1)^2\}$;

(d) $\{1, x-1, (x+2)^2\}$;

(e) $\{x, 2x\}$.

88. Em todas as alíneas as funções apresentadas são, em certos intervalos, soluções de determinadas equações diferenciais lineares homogéneas. Averigue se cada um dos sistemas de soluções é um sistema fundamental de soluções para uma equação diferencial linear homogénea num certo intervalo, determine essa equação e o correspondente intervalo.

(a) $\{2, x-4, x^2\}$.

(b) $\{x^3, x^4\}$.

(c) $\{e^x, e^{3x}, e^{5x}\}$.

(d) $\{x-1, \sin x, \cos x\}$.

(e) $\{1, x, \sin x, \cos x\}$.

(f) $\{2, x+2, x-4\}$.

(g) $\{e^x, \sinh x, \cosh x\}$.

(h) $\{x^2, x-\frac{1}{2}, (x-1)^2\}$.

4. Equações diferenciais lineares de ordem n de coeficientes constantes

89. Determine o integral geral das seguintes equações diferenciais lineares de coeficientes constantes e, nos casos indicados, determine o integral particular que verifica as condições iniciais dadas.

(a) $y'' - y' - 2y = 0$; $\quad \begin{cases} y(0) &= 0 \\ y'(0) &= 3 \end{cases}$.

(b) $y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 0$; $\quad \begin{cases} y(0) &= 1 \\ y'(0) &= 0 \\ y''(0) &= -3 \end{cases}$.

(c) $\dfrac{d^3x}{dt^3} - 2\dfrac{d^2x}{dt^2} - 3\dfrac{dx}{dt} = 0$; $\quad \begin{cases} x(0) &= 1 \\ x'(0) &= 6 = x''(0) \end{cases}$.

(d) $((D-1)^2+1)y = 0$; $\quad \begin{cases} y(0) &= 0 \\ y'(\frac{\pi}{2}) &= c^{\frac{\pi}{2}} \end{cases}$.

(e) $y^{(4)} + y^{(2)} = 0$.

(f) $y^{(4)} = y$.

(g) $(D^3 - 4D^2 + 4D)y = 0$.

(h) $y^{(4)} + 18y'' + 81y = 0$.

(i) $y^{(n+2)} + y^{(n)} = 0$.

(j) $y^{(n+1)} + y^{(n)} = 0$.

(k) $y^{(n+2)} = y^{(n)}$.

(l) $((D+1)^2 + 4)^2 y = 0$.

90. Determine uma equação diferencial linear, homogénea e de coeficientes constantes que admite a seguinte solução particular:

(a) $y = 4e^{2x} + 3e^{-x}$;

(b) $y = 7 + 2x + 5e^{3x}$;

(c) $y = 2x + 5xe^{3x}$;

(d) $y = 4 + 2x^2 - e^{-3x}$;

(e) $y = 4e^{-x}\sin 2x$;

(f) $y = 6xe^{2x}\sin 3x$;

(g) $y = 6 + 3xe^{x}\cos x$;

(h) $y = x^2 - 5\sin 3x$;

(i) $y = \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x$;

(j) $y = xe^{-x}\sin 2x - 3e^{-x}\cos 2x$;

91. Usando o método do polinómio anulador, integre as seguintes equações diferenciais completas de coeficientes constantes.

(a) $y'' - 9\,y = e^{3x}$;

(b) $y''' - 4\,y'' + 5\,y' - 2\,y = 2x + 3$;

(c) $y'' - y' - 6\,y = e^{3x}\sin 2x$;

(d) $y'' + 4\,y = \sin^2 2x$;

(e) $y''' - y' = 3(2 - x^2)$;

(f) $y'' - y = 3e^{2x}\cos x$;

(g) $y'' + y = xe^{x} + 2e^{-x}$.

92. Determine a solução geral da equação $y''' + 4\,y' = \cos x$.
Sabendo que e^{x^2} é uma solução particular da equação $y''' + 4\,y' = f(x)$, determine:

(a) o integral geral de $y''' + 4\,y' = 2\,f(x) - 3\cos x$;

(b) a função $f(x)$.

93. Determine o integral geral da equação diferencial

$$y'' + y = \cos x$$

sabendo que $\frac{x\sin x}{2}$ é um integral particular dessa mesma equação .

5. Equações diferenciais lineares de ordem n de coeficientes variáveis

94. Utilizando o método do abaixamento de ordem (método de d'Alembert), encontre os integrais gerais das seguintes equações diferenciais, sabendo que as equações homogéneas associadas admitem os integrais particulares, y_i, indicados.

(a) $y'' + y = \sec x$;

(b) $x\,y'' - y' = 0$;

(c) $y'' - 4\,y' + 4\,y = e^{-x}$;

(d) $x\,y'' - y' = x^2 e^{x}$;

(e) $x\,y'' + 2\,y' - x\,y = -e^x$, com $y_1 = \dfrac{e^x}{x}$;

(f) $x^3\,y''' - 6x^2\,y'' + 15x\,y' - 15\,y = 0$, com $y_1 = x$ e $y_2 = x^3$;

(g) $x^3\,y''' - x^2\,y'' + 2x\,y' - 2\,y = 0$, com $y_1 = x$;

(h) $6x^2\,y'' - 9x\,y' + 6\,y = x$, com $y_1 = x^2$;

(i) $x\,y''' - y'' + x\,y' - y = 0$, com $y_1 = \sin x$ e $y_2 = \cos x$;

(j) $\cos^2 x\,y'' - 2\,y = 0$, com $y_1 = \operatorname{tg} x$;

(k) $(1 + x^2)\,y'' + 2x\,y' - 2\,y = 4x^2 + 2$, com $y_1 = x$.

95. Utilizando o método da variação das constantes arbitrárias (método de Lagrange), encontre os integrais gerais das seguintes equações diferenciais, sabendo que as equações homogéneas associadas admitem os integrais particulares, y_i, indicados.

(a) $y''' - y' = 3(2 - x^2)$;

(b) $y'' - 9\,y' = e^{3x}$;

(c) $x\,y'' + y' = x^2$, com $y_1 = \log x$;

(d) $y''' - y'' - 4\,y' + 4\,y = x^2$;

(e) $y''' - y'' + 2\,y = x + e^x$;

(f) $6x^2\,y'' - 9x\,y' + 6\,y = x$, com $y_1 = x^2$;

(g) $x^2\,y'' + x\,y' - y = 2x$, com $y_1 = x$ e $y_2 = \dfrac{1}{x}$;

(h) $e^x(x-1)\,y'' - xe^x\,y' + e^x\,y = e^{2x}(x-1)^2$, com $y_1 = x$ e $y_2 = e^x$.

96. Determine:

(a) Para $x > e$, funções $a_0(x)$, $a_1(x)$ e $f(x)$ de tal modo que 1 , $1 + x$ e $1 + \log x$ sejam integrais particulares de
$$y'' + a_0(x)\,y' + a_1(x)\,y = f(x)\,;$$

(b) O integral geral da equação diferencial obtida na alínea anterior, justificando convenientemente.

97. Sabendo que a equação diferencial
$$x^2\,y'' + x\,y' - y = 8x^3$$
admite como soluções particulares x^3 e $x^3 + \frac{1}{x}$, determine o seu integral geral.

98. Considere a seguinte equação diferencial
$$\begin{vmatrix} x^2 & x & y \\ 0 & 1 & y' \\ 1 & 0 & y'' \end{vmatrix} = (x^2 + x - 1)\,e^x\,. \qquad (*)$$

(a) Mostre que e^x e $e^x + \dfrac{1}{x}$ são duas soluções particulares de $(*)$;

(b) Conclua, a partir da alínea anterior, e justificando, que $\dfrac{1}{x}$ é uma solução particular da equação diferencial homogénea associada a $(*)$;

(c) Mostre que $\{x, \frac{1}{x}\}$ é um sistema fundamental de soluções para a equação homogénea associada a $(*)$;

(d) Indique a solução geral de $(*)$.

99. Considere a equação diferencial

$$(1-x^2)\,\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} = 0\,.$$

(a) Classifique-a;

(b) Mude a variável independente de x para t através da relação $x = \cos t$ e resolva a equação obtida. Escreva a solução geral da equação dada.

(c) Resolva a equação dada por outro processo.

Questões de exames

100. Seja f a função real definida por:

$$f\,(x,y) = \frac{y^2 \ln(1-y)\sqrt{y-x^2+2}}{x^2+y^2}.$$

(a) Determine o domínio D de f e represente-o geometricamente **.**

(b) Indique o interior, o derivado e a fronteira de D e conclua se D é aberto ou fechado.

(c) Seja g a função real definida por

$$g\,(x,y) = y^2 - 1.$$

Identifique as curvas de nível e faça um esboço do gráfico de g.

(d) Considere a função real h definida por

$$h\,(x,y) = \begin{cases} f\,(x,y) & \text{se } \ (x,y) \in D \wedge x \neq -y^2 \\ g\,(x,y) & \text{se } \ (x,y) \in D \wedge x = -y^2 \end{cases}.$$

Analise a existência de limite nos pontos $P_0 = (-1,-1)$ e $P_1 = (0,0)$.

101. Seja f a função real definida por:

$$f\,(x,y) = \frac{\sqrt{y}\ln\left(1-\frac{y^2}{4}-x^2\right)}{x^2+\sqrt{y}}.$$

(a) Determine o domínio D de f e represente-o geometricamente.

(b) Indique o interior, o fecho e a fronteira de D e conclua se D é aberto ou fechado.

(c) Seja g a função real definida por

$$g\,(x,y) = -\frac{1}{2} + \sqrt{x^2+y^2}.$$

Identifique as curvas de nível e faça um esboço do gráfico de g.

(d) Considere a função real h definida por

$$h\,(x,y)=\begin{cases} f\,(x,y) & \text{se } (x,y)\in D\wedge y\neq 0\\ g\,(x,y) & \text{se } y=0\end{cases}.$$

Analise a existência de limite nos pontos $P_0=(0,0)$ e $P_1=(\frac{1}{2},0)$.

102. Considere a função $f:D\subset \mathbb{R}^2\longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y)=\frac{(y-x)\ln{(x+1)}}{\sqrt{y^2+(y-x)^2}}.$$

(a) Determine D, domínio de f.

(b) Considere a função $g:\mathbb{R}^2\longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$g(x,y)=\begin{cases} f(x,y) & ,(x,y)\in D\wedge x\neq y^2\\ \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}xy\right)}{\frac{\pi}{4}xy}+\alpha & ,(x,y)\in D\wedge x=y^2\end{cases},$$

com $\alpha\in\mathbb{R}$.

i. Determine α de forma a que $\displaystyle\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} g(x,y)$ não exista;

ii. Determine α de forma a que $\displaystyle\lim_{(x,y)\longrightarrow(1,1)} g(x,y)$ exista.

103. Sejam $a\in\mathbb{R}$ e f a função real definida em $\mathbb{R}^2$ por:

$$f(x,y)=\begin{cases} x+y & \text{se } x\leq y\\ \dfrac{a\,x\,(x-y)}{\sin{(x-y)}} & \text{se } x>y\end{cases}.$$

(a) Determine para que valores de $\underline{a}$, f é contínua em $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x=y\}$.

(b) Determine para que valores de $\underline{a}$, existe $\dfrac{\partial f}{\partial x}\,(0,0)$.

(c) Existe algum valor de $\underline{a}$, para o qual f seja diferenciável em $(0,0)$?

104. Seja $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ a função dada por

$$f(x,y)=\begin{cases} x+y & \text{se } x<y\\ 2y & \text{se } x\geq y\end{cases}.$$

(a) Analise a existência de $\dfrac{\partial\, f}{\partial\, v}\,(0,0)$, onde $v=-\dfrac{\hat{\imath}}{\sqrt{5}}+\dfrac{2\hat{\jmath}}{\sqrt{5}}$.

(b) Prove que f não é diferenciável em $(0,0)$.

105. Seja $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ a função dada por

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^3}{y} & \text{se } y\neq 0\\ 0 & \text{se } y=0\end{cases}.$$

(a) Prove que f admite derivada direccional em $(0,0)$ segundo qualquer vector (não nulo) v do plano, sendo

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = (\bigtriangledown f(0,0) \mid v)\,.$$

(b) Mostre que f não é diferenciável em $(0,0)$, justificando a sua resposta.

106. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Mostre que

(a) f é contínua em $(0,0)$;

(b) f possui derivada em $(0,0)$ segundo qualquer vector não nulo;

(c) f não é diferenciável em $(0,0)$.

107. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\, \sin \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

(a) Mostre que f é contínua em $(0,0)$.

(b) Mostre que f possui derivada em $(0,0)$ segundo qualquer vector não nulo.

(c) Defina $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ e estude a continuidade destas funções em $(0,0)$.

(d) f é diferenciável em $(0,0)$? Justifique.

108. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} x^3 & \text{se } x < 0 \\ x\,(x+y) & \text{se } x \geq 0 \end{cases}.$$

(a) Mostre que f é contínua em $\mathbb{R}^2$.

(b) Mostre que f não é diferenciável em pontos da forma $(0,b)$, com $b \neq 0$.

(c) Prove que f é diferenciável em $(0,0)$.

109. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} |\,x\,|\,y & \text{se } y \geq 0 \\ \dfrac{e^{x\,(y+1)} - y - 1}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se } y < 0 \end{cases}.$$

(a) Analise a continuidade de f em $(0,1)$ e em $(0,0)$.

(b) Averigúe se f admite derivada direccional em $(0,1)$ segundo qualquer vector v.

(c) Averigúe se f é diferenciável em $(0,1)$ e em $(0,0)$.

110. Considere a função real f definida em $\mathbb{R}^2$ por

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{e^{x^2-y^2}-1}{x^2-y^2} & \text{se } x^2-y^2\neq 0\\[2ex] 1-x & \text{se } x^2-y^2=0\end{cases}.$$

(a) Determine o domínio de continuidade de f .

(b) Calcule, caso exista, $\dfrac{\partial f}{\partial v}(0,0)$, segundo qualquer vector v , não nulo, de $\mathbb{R}^2$.

(c) Averigúe se f é diferenciável em algum ponto da recta de equação $y=x$.

111. Considere a função real f definida em $\mathbb{R}^2$ por

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2\sin y}{x^2+y^2} & \text{se } x\neq 0 \text{ e } y\neq 0\\ 1-y^2 & \text{se } x=0\\ 1-x^2 & \text{se } y=0\end{cases}$$

(a) Estude a continuidade de f nos pontos da forma $(x_0,0)$, com $x_0\in\mathbb{R}$.

(b) Estude a diferenciabilidade de f em $(0,0)$ e em $(-1,0)$.

112. Considere a função real f definida em $\mathbb{R}^2$ por

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x+y}{x-y}\sin(x-y) & \text{se } |x|\neq|y|\\ y^2 & \text{se } |x|=|y|\end{cases}.$$

(a) Estude a continuidade de f no conjunto

$$C=\{(x,y):|x|=|y|\}.$$

(b) Calcule, caso exista, $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0)$, segundo um vector v, não nulo, de $\mathbb{R}^2$.

(c) Analise a diferenciabilidade de f em $(0,0)$ e em $(1,1)$.

113. Considere a função real g definida em $\mathbb{R}^2$ por

$$g(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy-4x}{(y-2)^2+x^2} & ,\ y>2\\ |x+y| & ,\ y\leq 2\end{cases}.$$

(a) Estude a continuidade de g nos pontos $(0,2)$ e $(0,0)$.

(b) Estude a diferenciabilidade de g nos pontos $(0,2)$ e $(0,0)$.

114. Considere a função real f definida em $\mathbb{R}^2$ por

$$f(x,y)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x}+y^2 & ,\ x\neq 0\\ y^2 & ,\ x=0\end{cases}.$$

(a) Prove que f é contínua em $(0,0)$.

(b) Defina as funções $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$.

(c) Estude a continuidade de $\frac{\partial f}{\partial x}$ em $(0,0)$.

(d) Prove que f é diferenciável em $(0,0)$.

115. Considere a função real f definida em $\mathbb{R}^2$ por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} & , \ y < -x \\ \sin(y+x) & , \ y \geqslant -x \end{cases}.$$

(a) Estude a continuidade de f nos pontos do conjunto

$$C = \{(x_0, y_0) : y_0 = -x_0\}.$$

(b) Determine, se possível, $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0)$, com $v = (v_1, v_2)$, sendo $v_2 > -v_1$.

(c) Analise a diferenciabilidade de f no conjunto C.

116. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 tal que $f(1) = f'(1) = 2$ e $f(2) = f'(2) = 1$. Considere as funções $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definidas por

$$h(x,y) = e^{8-x^2+y^3}, \quad g(x,y,z) = \begin{bmatrix} f\left(x^2\right) + f\left(x^2+y^2\right) \\ f^2(yz) \end{bmatrix}.$$

Prove que $h \circ g$ é diferenciável e determine as matrizes jacobianas $Dg(x,y,z)$ e $D(h \circ g)(1,1,2)$.

117. Sejam $\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ e $\psi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tais que:

- φ é diferenciável em $\mathbb{R}^3$;
- $\psi(x,y) = \left(e^{xy^2}, e^{x^2y}, y\right)$;
- $\varphi(1,1,0) = (1,0)$;
- $D\varphi(1,1,0)(h_1,h_2,h_3) = (h_2+h_3, h_1+h_2)$.

Justifique que $\varphi \circ \psi$ é diferenciável e determine a aplicação $D(\varphi \circ \psi)(1,0)$.

118. A temperatura, em graus Celsius, num ponto (x,y), $T(x,y)$, é tal que

$$T_x(2,3) = 4 \ \text{ e } \ T_y(2,3) = 3,$$

representando T uma função diferenciável. Um insecto desloca-se de modo que a sua posição, depois de t segundos, é dada por

$$x = \sqrt{1+t} \ \text{ e } \ y = 2 + \frac{1}{3}t.$$

Determine a taxa de variação da temperatura no caminho do insecto, depois de 3 segundos.

119. Sejam f uma função real de classe C^1 em $\mathbb{R}^2$ e G a função definida por

$$G(u,v) = f\left(u^2+v^2, \frac{u}{v}\right).$$

Mostre que para $w=(u,v)$, com $v \neq 0$, a derivada direccional $\frac{\partial G}{\partial w}(u,v)$ existe e é dada por

$$\frac{\partial G}{\partial w}(u,v) = 2\left(u^2+v^2\right)\frac{\partial f}{\partial x}\left(u^2+v^2, \frac{u}{v}\right).$$

120. Seja $g(u,v) = f(u-2v, v+2u)$, em que f é uma função de classe C^2 num aberto $D \subset \mathbb{R}^2$.

(a) Diga, justificando, se $\frac{\partial g}{\partial u}$ e $\frac{\partial g}{\partial v}$ são funções diferenciáveis.

(b) Expresse $\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(u,v)$ em função das derivadas parciais de f.

121. Considere $f, g, H : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, tais que

$$f(1,1) = 2 \quad \text{e} \quad g(x,y) = H\left(f(x,y), x^2\right).$$

Sabendo ainda que

$$\nabla g(1,1) = (3,4) \quad \text{e} \quad DH(2,1)(h_1,h_2) = -2h_2 - h_1,$$

(a) Estabeleça condições que garantam a diferenciabilidade de g em $(1,1)$.

(b) Determine uma equação do plano tangente a G_f no ponto $(1,1,2)$.

122. Considere a função $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, de classe C^1 e tal que

$$F(2,1) = 2 \quad \text{e} \quad DF(2,1) = [1 \quad 1].$$

(a) Determine a taxa de variação da função F, no ponto $(2,1)$ e na direcção do vector $(2,3)$.

(b) Determine a equação do plano tangente à superfície

$$S = \left\{(x,y,z) : (z-y)\, F\left(z^2+2y, zx+y\right) = -2\right\}$$

no ponto $(0,1,0)$.

123. (a) Considere as superfícies de equações

$$f(x,y,z) = 0 \quad \text{e} \quad g(x,y,z) = 0,$$

em que f e g representam funções diferenciáveis. Indique, justificando, uma condição necessária e suficiente para que as duas superfícies sejam perpendiculares num ponto P pertencente à sua intersecção.

(b) Determine os pontos do elipsóide $x^2+2y^2+z^2=1$ nos quais o plano tangente é paralelo ao plano $x-y+z=1$.

124. Seja $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função definida por

$$\phi(x, y, z) = g(x, \sin x) f^2(yz)$$

em que g e f são funções de classe C^1 e tais que:

$$f(2) = 1, f'(2) = 2, g(\pi, 0) = 2 \text{ e} \frac{\partial g}{\partial v}(\pi, 0) = 3v_1 + 2v_2, v \in \mathbb{R}^2.$$

Determine uma equação do plano tangente à superfície

$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \phi(x, y, z) = 2\right\}$$

no ponto $(\pi, 1, 2)$.

125. Considere a função g definida por

$$g(x, y) = 1 - x^2 - y^2$$

e seja π o plano tangente ao gráfico de g no ponto $\left(a, b, 1 - a^2 - b^2\right)$.

(a) Identifique as curvas de nível e faça um esboço do gráfico de g.

(b) Determine uma equação do plano π.

126. Considere a função $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x, y) = xy$. Escreva uma equação do plano tangente ao gráfico de g, que passa pelos pontos $(1, 1, 2)$ e $(-1, 1, 1)$.

127. Seja $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x, y) = xy$, onde

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 3x^2 - 1 \leq y \leq x^2 + 1\}.$$

Determine os extremos absolutos de f.

128. Determine, justificando, a cota máxima dos pontos do plano $z = 6 - 4x - 3y$ que se encontram sobre o cilindro de equação $x^2 + y^2 = 1$.

129. Seja h uma função de classe C^2 em $\mathbb{R}^2$ e tal que $\nabla h(0, 0) = (1, 1)$. Seja ainda $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\varphi(x, y) = h\left(y \sin x, y^2\right).$$

Mostre que $(0, 0)$ é um ponto crítico de φ e classifique-o.

130. Seja f a função real definida por $f(x, y, z) = x + y^2$. Determine os extremos absolutos da restrição de f ao conjunto

$$A = \left\{(x, y, z) : x = z \wedge y^2 + z^2 = 1\right\}.$$