MÉTODOS MATEMÁTICOS DA BIOLOGIA

ANO LECTIVO DE 2005/2006 FOLHA 1

1. Considere um modelo de crescimento de uma população traduzido pela equação não linear
$$x_{n+1} = \frac{\lambda x_n}{1+x_n},$$
com $\lambda > 0$.
   (a) Determine os estados estacionários.
   (b) Discuta a natureza dos estados estacionários em função do parâmetro e identifique as bifurcações.
   (c) Ilustre geometricamente os casos considerados na alínea anterior.
   (d) Verifique as respostas anteriores, usando a mudança de variável $y_n = \dfrac{1}{x_n}$ para resolver a equação.

2. Considere o modelo
$$x_{n+1} = \frac{R_0 x_n}{(1+x_n)^b}.$$
Determine os estados estacionários da equação e discuta a estabilidade em função dos parâmetros.

3. Um dos meios de controlar pragas de insectos é introduzir e manter insectos estéreis na população. O seguinte modelo foi usado para traduzir a dinâmica de uma população de insectos
$$N_{n+1} = f(N_n) = R_0 N_n \frac{N_n}{N_n+S}\frac{1}{1+aN_n},$$
onde $R_0 > 1$, $a > 0$ e S representa a população estéril.
   (a) Determine uma equação para os estados estacionários N^* e relacione S e N^* através de um gráfico.
   (b) Qual é o menor valor S_c de S que leva a população de insectos à extinção?

4. O modelo discreto para uma população N_t consiste na equação
$$N_{t+1} = \frac{rN_t}{1+bN_t^2},$$
onde t é o tempo (discreto), r e b são parâmetros positivos.
   (a) Mostre que para qualquer r, a população é extinta se $b > 4$.
   (b) Determine os estados estacionários e os seus valores próprios.
   (c) Considere uma versão com atraso do modelo anterior
   $$N_{t+1} = \frac{rN_t}{1+bN_{t-1}^2},$$
   $r > 1$.
   Seja $\eta_t = N_t - N^*$. Mostre que η_t satisfaz
   $$\eta_{t+1} - \eta_t + 2(r-1)r^{-1}\eta_{t-1} = 0$$
   e estude a estabilidade nos estados estacionários.