

1. Considere o seguinte modelo presa-predador de Lotka-Volterra

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} &= u(1 - \epsilon u - v) \\ \frac{dv}{dt} &= av(u - 1).\end{aligned}$$

(a) Mostre que o estado estacionário não trivial (u^*, v^*) é estável, quando ϵ é suficientemente pequeno e positivo.

(b) Mostre que a função definida por $\psi(u, v) = \phi(u, v) - \phi(u^*, v^*)$, onde

$$\phi(u, v) = a(u - \log u) + v - v^* \log v,$$

é uma função de Lyapunov para o sistema dado.

(c) Faça um esboço do plano fase.

2. Considere o seguinte modelo presa-predador de Lotka-Volterra em que é considerada a existência de um refugio para a espécie de presas

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} &= u - (u - k)v \\ \frac{dv}{dt} &= av(u - k - 1).\end{aligned}$$

(a) Faça uma interpretação deste modelo.

(b) Estude a estabilidade dos estados estacionários.

3. Considere o modelo predador-presa de Leslie

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} &= au - bu^2 - cuv \\ \frac{dv}{dt} &= dv - e\frac{v^2}{u},\end{aligned}$$

onde a, b, c, d e e são parâmetros positivos.

(a) Faça um esboço do plano fase do modelo.

(b) Estude o comportamento das soluções.