MÉTODOS MATEMÁTICOS DA BIOLOGIA

ANO LECTIVO DE 2005/2006 FOLHA 4

1. Considere a equação

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\mathrm{div}\, \mathbf{J}$$

na região V, como fluxo nulo na fronteira, isto é, com condição de fronteira $\mathbf{J}.\mathbf{n} = \mathbf{0}$, em que $\mathbf{n}$ é normal à superfície S de V.

Mostre que existe conservação, ou seja, verifique que $\int_V u\, dV$ é constante.

2. Considere a equação

$$\frac{\partial U}{\partial T} = f(U) + D\frac{\partial^2 U}{\partial X^2},$$

com $X \in (0, L)$ e condições de fronteira de Dirichlet homogéneas $U(0,T) = U(L,T) = 0$.

(a) Faça uma mudança de variável de forma a obter a equação

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \gamma^2 f(u) + D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

em $(0, \pi)$, com condições de fronteira de Dirichlet homogéneas.

(b) Linearizando, obtenha a equação

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \gamma^2 f'(u^*)v + D\frac{\partial^2 v}{\partial x^2},$$

em $(0, \pi)$, com condições de fronteira de Dirichlet homogéneas.

(c) Resolva o problema da alínea anterior com a condição inicial $v(x, 0) = \sin x$.

(d) Fixe $f'(u^*)$. Tendo em conta a solução obtida, discuta a estabilidade em relação a D.

3. Considere o sistema de difusão reacção

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u^2}{v} - bu + \Delta u, \qquad \frac{\partial v}{\partial t} = u^2 - v + d\Delta v,$$

com b e d constantes positivas.

(a) Considere, em primeiro lugar, que existe distribuição espacial uniforme.

i. Determine a matriz Jacobiana no estado estacionário positivo.

ii. Determine as condições de estabilidade relativamente a esse estado estacionário.

(b) Pode a difusão tornar instável o estado estacionário espacialmente homogéneo? Em caso afirmativo indique as condições em que isso acontece.