MÉTODOS MATEMÁTICOS DA BIOLOGIA

1. Considere o sistema
$$\begin{aligned} X_{n+1} &= -2X_n - Y_n^3, \\ Y_{n+1} &= X_n. \end{aligned}$$
   (a) Estude a estabilidade do sistema na origem.

   (b) Mostre que o sistema tem soluções periódicas, de período 2, da forma
$$X_n = (-1)^n, \quad Y_n = (-1)^{n+1}.$$
   (c) Estude a estabilidade das soluções periódicas anteriores.

2. Considere o modelo $z_{n+1} = Mz_n$, onde z_n é um vector de dimensão n e $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$, com z_0 dado, em que M tem m valores próprios distintos, λ_i, com correspondentes vectores próprios v_i, $i = 1, \ldots, m$, e $z_0 = \displaystyle\sum_{i=0}^{m} c_i v_i$, onde c_i, $i = 1, \ldots, m$, são constantes.

   (a) Prove que $z_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{m} c_i \lambda_i^n v_i$.

   (b) Considere o caso $m = 2$. Sejam $a_1 = -\mathrm{tr}M$ e $a_2 = \det M$. As condições necessárias e suficientes para a estabilidade assimptótica são
$$|a_1| < a_2 + 1, \quad a_2 < 1.$$

3. Considere um modelo de crescimento de uma população traduzido pelo sistema
$$x_{n+1} = f(y_n), \quad y_{n+1} = g(x_n),$$
   onde x_n e y_n representam, respectivamente, o número de crias e adultos, no ano n, f e g são funções crescentes, $f(0) = g(0) = 0$, $f(y) < y$ para todo $y > 0$ e $g(x) \to c$ quando $x \to \infty$, com c constante.

   (a) Mostre que os pontos fixos do sistema são os pontos de intersecção das curvas $y = g(x)$ e $y = f^{-1}(x)$.

   (b) Deduza, para o ponto fixo (x^*, y^*), a condição de estabilidade $g'(x^*) < (f^{-1})'(x^*)$.

   (c) Suponha que o sistema tem três pontos fixos $(0,0)$, (x_1^*, y_1^*) e (x_2^*, y_2^*). Use o resultado da alínea anterior para estudar a sua estabilidade.