MÉTODOS MATEMÁTICOS DA BIOLOGIA

Ano lectivo de 2006/2007 FOLHA 3

1. Considere o sistema

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt}(t) &= v(t) \\ \frac{dv}{dt}(t) &= -u(t) - v(t). \end{aligned}$$

   (a) Determine os pontos de equilíbrio.

   (b) Verifique que a função
   $$V(x, y) = x^2 + y^2$$
   é uma função de Lyapunov para o sistema anterior no ponto $(0, 0)$.

   (c) Estude a estabilidade do sistema nos pontos de equilíbrio.

2. Considere o modelo de propagação da malária

$$\frac{dv_1}{dt} = \alpha_1 v_2(1 - v_1) - v_1, \quad \frac{dv_2}{dt} = c\left(\alpha_2 v_1(1 - v_2) - v_2\right),$$

onde v_1 e v_2 representam, respectivamente, a população de humanos e mosquitos infectados pela doença, α_1, α_2 e c so constantes positivas.

   (a) Mostre que o estado estacionário de coexistência (v_1^*, v_2^*) existe se e só se $\alpha_1\alpha_2 > 1$.

   (b) Estude a estabilidade dos estados estacionários $(0, 0)$ e (v_1^*, v_2^*).

3. Considere o seguinte modelo presa-predador

$$\begin{aligned} \frac{dN_1}{dt} &= aN_1 - bN_1N_2 - eN_1^2 \\ \frac{dN_2}{dt} &= -cN_2 + dN_1N_2, \end{aligned}$$

com a, b, c, d, e positivos e $\dfrac{a}{e} > \dfrac{c}{d}$.

   (a) Determine os estados estacionários do sistema anterior.

   (b) Fazendo a mudança de variável $x_1 = \dfrac{d}{c}N_1$, $x_2 = \dfrac{bd}{da - ec}N_2$, obtenha um sistema do tipo

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \alpha x_1(1 - x_2) + \beta x_1(1 - x_1) \\ \frac{dx_2}{dt} &= -cx_2(1 - x_1). \end{aligned}$$

   (c) Mostre que a função definida por
   $$V(x_1, x_2) = cx_1 - c\log x_1 + \alpha x_2 - \alpha \log x_2 - c - \alpha$$
   é uma função de Lyapunov definida positiva para o sistema anterior no ponto de equilíbrio $(1, 1)$.

   (d) Que conclusões pode tirar, usando a alínea anterior, relativamente à estabilidade do estado estacionário de coexistência do sistema inicial?