MÉTODOS MATEMÁTICOS DA BIOLOGIA

1. Considere o seguinte modelo para o crescimento de um tumor

$$\frac{dN(t)}{dt} = -aN(t-\tau) + b[N(t)]^d, \quad t > 0,\ N(0) = N_0 > 1,$$

onde $N(t)$ representa o número de células do tumor no instante t, $\tau > 0,\ 0 < d < 1,\ b \gg a > 0$.

(a) Discretize a equação diferencial usando o método de Euler explícito.

(b) Considere o passo temporal com valor igual ao atraso τ. Mostre que o método pode ser escrito da forma

$$N_{i+1} = g(N_i, X_i), \quad X_{i+1} = N_i.$$

(c) Estude a estabilidade dos pontos de equilíbrio do sistema obtido na alínea anterior.

2. Considere o problema de condição inicial

$$\begin{aligned} u' &= f(t,u), \quad t \in (0,T) \\ u(0) &= u_0, \end{aligned}$$

onde $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é contínua e lipschitziana na variável u.

(a) Seja u_i a solução aproximada obtida pelo método dos trapézios

$$u_{i+1} = u_i + \frac{h}{2}(f(t_i, u_i) + f(t_{i+1}, u_{i+1})).$$

Supondo $f(t,u) = \lambda u$ e $|\lambda \frac{h}{2}| < 1$, mostre que $u_i = u_0 \left(\frac{1+\lambda\frac{h}{2}}{1-\lambda\frac{h}{2}}\right)^i$ e, consequentemente, que $\lim\limits_{h\to 0} u_i = u_0 e^{\lambda(t_i - t_0)}$.

(b) Considere o método de Runge-Kutta explícito dado pelo quadro de Butcher $\begin{array}{c|c} c & A \\ \hline & b^T \end{array}$.

Mostre que a região de estabilidade absoluta é $\{\bar{h} \in \mathbb{C} : |R(\bar{h})| \leq 1\}$, com

$$R(\bar{h}) = \det(I - \bar{h}A + \bar{h}eb^T),$$

onde $e = (1, \ldots, 1)$ e I é a matriz identidade.

(c) Determine o intervalo de estabilidade absoluta do método de Runge-Kutta

$$u_{i+1} = u_i + hf\left(t_i + \frac{1}{2}h, u_i + \frac{1}{2}hf(t_i, u_i)\right).$$