Departamento de Matemática - Universidade de Coimbra

ÁLGEBRA I

Exame

14/06/2006 Duração: 2h 30m

1. Considere o grupo $G = (\mathbb{Z}_{11} \backslash \{0\}, \otimes_{11})$.
   (a) Mostre que G é cíclico.
   (b) Indique um subgrupo de G de ordem 5.
   (c) Será única a resposta à alínea anterior?
2. Indique o valor lógico das seguintes proposições, provando-as ou indicando um contra-exemplo:
   (a) Existe pelo menos um grupo de ordem n para todo o $n \in \mathbb{N}$.
   (b) $D_n \cong S_n$, para todo o $n \geq 3$.
   (c) S_4 tem quatro subgrupos de ordem 3.
   (d) Um grupo com n elementos é abeliano se e só se tem n classes de conjugação.
3. Considere o grupo $Q = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ onde $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ e $ij = k$.
   (a) Mostre que $ji = -k$.
   (b) Encontre todos os subgrupos de Q.
   (c) Um grupo diz-se *hamiltoniano* se for não abeliano e todos os seus subgrupos são normais. Mostre que Q é hamiltoniano.
   (d) Mostre que não existe nenhum grupo hamiltoniano com menos de 8 elementos.
4. Seja G um grupo de ordem 26.
   (a) Mostre que se G é abeliano, então é cíclico.
   (b) Mostre que se G não é abeliano, então é diedral.
5. Considere a aplicação $\det : GL_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}\backslash\{0\}$ que a cada matriz faz corresponder o seu determinante.
   (a) Mostre que det é um homomorfismo de grupos.
   (b) Determine a imagem e o núcleo de det.
   (c) Encontre um isomorfismo entre $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ e um grupo quociente de $GL_n(\mathbb{R})$.
6. Determine todos os grupos abelianos de ordem 180 sem elementos de ordem 20.

FIM