

07/07/2005

Duração: 2h 30m

1. Na categoria $\mathcal{POConj}$, dos conjuntos parcialmente ordenados e das funções monótonas, descreva

- (a) Isomorfismo.
- (b) Monomorfismo.
- (c) Produtos e coprodutos binários.
- (d) O igualizador e o co-igualizador dos morfismos $u, v : (\mathbb{N}_0, \leq) \rightarrow (\mathbb{Z}, \leq)$, definidos por $u(n) = 3n$ e $v(n) = 0$, para $n \in \mathbb{N}_0$.
- (e) Um functor fiel e representável $G : \mathcal{POConj} \rightarrow \mathcal{Conj}$.

2. Defina e dê um exemplo de

- (a) categoria completa.
- (b) equivalência de categorias.
- (c) imersão de Yoneda.

3. Prove que

- (a) Existe uma categoria que tem como objectos os conjuntos, como morfismos $\alpha : A \rightarrow B$ as relações binárias, i.e. $\alpha \subseteq A \times B$, sendo a composição definida por

$$\beta \circ \alpha = \{(a, c) | (a, b) \in \alpha \text{ e } (b, c) \in \beta \text{ para algum } b \in B\},$$

para $\alpha \subseteq A \times B$ e $\beta \subseteq B \times C$.

- (b) Um functor fiel e pleno cria isomorfismos.
- (c) Sendo $U : \mathcal{Mon} \rightarrow \mathcal{Conj}$ o functor de esquecimento da categoria dos monóides na dos conjuntos, a função que a cada monóide M faz corresponder o produto cartesiano $U(M) \times U(M)$ é função de objectos de um functor $U \times U : \mathcal{Mon} \rightarrow \mathcal{Conj}$.
- (d) A multiplicação de qualquer monóide $M = (M, \cdot, e)$ define a componente $\sigma_M : U(M) \times U(M) \rightarrow U(M)$ de uma transformação natural $\sigma : U \times U \rightarrow U$.
- (e) O functor de esquecimento da categoria dos semigrupos na categoria dos conjuntos tem adjunto à esquerda. (Unidade? Co-unidade?).