

9.9 Teorema de existência de limites. *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria. As seguintes condições são equivalentes:*

(i) $\mathcal{C}$ é completa;

(ii) $\mathcal{C}$ tem produtos e igualizadores.

Dem.: Temos que (i) implica (ii) visto que produtos e igualizadores são exemplos de limites.

Reciprocamente, seja $\mathcal{D}$ uma categoria pequena, $\mathcal{C}$ uma categoria com produtos e igualizadores e $F : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ um functor. Consideremos o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & & F(codu) \\
 & & & \nearrow p_{D'} & \uparrow p_{codu} \\
 E & \xrightarrow{e} & \prod_{D \in \mathcal{D}} F(D) & \xrightleftharpoons[g]{f} & \prod_{(u:D \rightarrow D') \in \mathcal{D}} F(codu) \\
 & \searrow \alpha_D & \downarrow p_D & & \downarrow p_{codu} \\
 & & F(D) & \xrightarrow{F(u)} & F(codu)
 \end{array}$$

onde g é o único morfismo para o qual o quadrado inferior comuta, f é o único morfismo que torna comutativo o triângulo superior e $e = ig(f, g)$.

Vamos provar que $(E, (\alpha_D = p_D \cdot e : E \rightarrow F(D))_{D \in \text{Obj } \mathcal{D}})$ é um cone de F . De facto, para qualquer morfismo $u : D \rightarrow D'$ em $\mathcal{D}$ temos que

$$\begin{aligned}
 F(u) \cdot \alpha_D &= F(u) \cdot p_D \cdot e \\
 &= p_{codu} \cdot g \cdot e \\
 &= p_{codu} \cdot f \cdot e \\
 &= p_{D'} \cdot e \\
 &= \alpha_{D'}
 \end{aligned}$$

Vejamos agora que $(E, (\alpha_D = p_D \cdot e : E \rightarrow F(D))_{D \in \text{Obj } \mathcal{D}})$ é o cone limite de F . Se $\beta_D : C \rightarrow F(D)$ são as componentes de um cone de F então, pela propriedade universal do produto, existe um e um só $h : C \rightarrow \prod_{D \in \text{Obj } \mathcal{D}} F(D)$ tal que $p_D \cdot h = \beta_D$.

Como

$$\begin{aligned}
 p_{codu} \cdot (g \cdot h) &= F(u) \cdot p_D \cdot h \\
 &= F(u) \cdot \beta_D \\
 &= \beta_{D'} \\
 &= p_{D'} \cdot h \\
 &= p_{codu} \cdot (f \cdot h)
 \end{aligned}$$

vem que $g \cdot h = f \cdot h$. Consequentemente, existe um único $t : C \rightarrow E$ tal que $e \cdot t = h$, visto que e é o igualizador do par (f, g) . Portanto

$$\begin{aligned}\alpha_D \cdot t &= p_D \cdot e \cdot t \\ &= p_D \cdot h \\ &= \beta_D\end{aligned}$$

para todo o $D \in \mathcal{D}$.

$$\begin{array}{ccccc} E & \xrightarrow{e} & \prod_{D \in \mathcal{D}} F(D) & \xrightarrow[g]{f} & \prod_{U \in \mathcal{D}} F(codu) \\ \uparrow t & \searrow h & \swarrow \alpha_D & \downarrow p_D & \\ C & \xrightarrow{\beta_D} & F(D) & & \end{array}$$

Suponhamos que $\alpha_D \cdot t' = \beta_D$ para todo o objecto D de $\mathcal{D}$. Então temos que

$$\begin{aligned}\alpha_D \cdot t &= \alpha_D \cdot t' \\ \Downarrow \\ p_D \cdot e \cdot t &= p_D \cdot e \cdot t' \\ \Downarrow (1) \\ e \cdot t &= e \cdot t' \\ \Downarrow (2) \\ t &= t'\end{aligned}$$

(1) pela propriedade universal do produto e (2) pela propriedade universal do igualizador.

Provámos assim que $(E, (\alpha_D)_{D \in \text{Obj } \mathcal{D}})$ é o limite de F em $\mathcal{C}$.

9.910 Teorema de existência de limites finitos. *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria. As seguintes condições são equivalentes:*

- (i) $\mathcal{C}$ é finitamente completa;
- (ii) $\mathcal{C}$ tem objecto terminal, produtos binários e igualizadores.
- (iii) $\mathcal{C}$ tem objecto terminal e produtos fibrados.

Dem.: (i) $\implies$ (ii): o objecto terminal é o limite de

$$\begin{array}{c} \emptyset \\ \downarrow F \\ \mathcal{C} \end{array}$$

o produto binário é o limite de

$$\begin{array}{c} \bullet \quad \bullet \\ \downarrow F \\ \mathcal{C} \end{array}$$

e igualizador é o limite de

$$\begin{array}{ccc} \bullet & \rightrightarrows & \bullet \\ \downarrow F & & \\ \mathcal{C} & & \end{array}$$

todos limites finitos cuja existência se toma como hipótese.

(ii) $\implies$ (i): utilizando 9.9 vem que, para qualquer $F : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$, tal que $Mor(\mathcal{D})$ e, por consequência, $Obj(\mathcal{D})$ são conjuntos finitos, existem

$$\prod_{D \in \mathcal{D}} F(D) \quad \text{e} \quad \prod_{u \in \mathcal{D}} F(codu)$$

assim como o co-igualizador de (f, g) . Logo F tem limite em $\mathcal{C}$.

(ii) $\implies$ (iii): De facto basta ver que o produto fibrado de dois morfismos $f : A \rightarrow B, g : C \rightarrow B$ é o igualizador do par de morfismos

$$A \times C \begin{array}{c} \xrightarrow{g \cdot p_C} \\ \xrightarrow{f \cdot p_A} \end{array} B$$

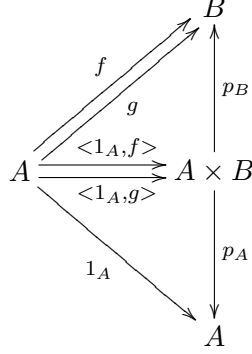
sendo $f' = p_C \cdot e$ e $g' = p_A \cdot e$

$$\begin{array}{ccccc} P & \xrightarrow{f'} & C & & \\ & \searrow e & \nearrow p_C & & \\ & A \times C & & & \\ & \swarrow p_A & & & \\ A & \xrightarrow{f} & B & & \\ & \nwarrow g' & & & \end{array}$$

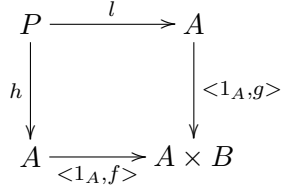
(iii) $\implies$ (i): É fácil verificar que o produto de dois objectos $A, B \in \mathcal{C}$ é o produto fibrado dos morfismos de A e de B no objecto terminal

$$\begin{array}{ccc} A \times B & \longrightarrow & V \\ \downarrow & & \downarrow \\ A & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

Resta provar que qualquer par de morfismos paralelos, $f, g : A \rightarrow b$, tem um igualizador em $\mathcal{C}$. Sejam $\bar{f} = \langle 1_A, f \rangle$ e $\bar{g} = \langle 1_B, g \rangle$, isto é, $\bar{f}$ é o único morfismos tal que $p_B \cdot \bar{f} = f$ e $p_A \cdot \bar{f} = 1_A$ e $\bar{g}$ é o único morfismos tal que $p_B \cdot \bar{g} = g$ e $p_A \cdot \bar{g} = 1_A$.



Por hipótese existe o produto fibrado de $(\bar{f}, \bar{g})$



Vejamos que $\mathbf{h} = \mathbf{l}$:

$$\begin{aligned} h &= p_A \cdot \langle 1_A, f \rangle \cdot h \\ &= p_A \cdot \langle 1_A, g \rangle \cdot l \\ &= l \end{aligned}$$

Fazendo $\mathbf{e} = \mathbf{h} = \mathbf{l}$ concluimos que $e = ig(f, g)$ da seguinte forma

- $f \cdot e = g \cdot e$:

$$\begin{aligned} f \cdot e &= f \cdot h \\ &= p_B \cdot \langle 1_A, f \rangle \cdot h \\ &= p_B \cdot \langle 1_A, g \rangle \cdot l \\ &= g \cdot l \\ &= g \cdot e \end{aligned}$$

- e, se $f \cdot s = g \cdot s$, para algum morfismo s , então

$$1_A \cdot s = p_A \cdot \langle 1_A, f \rangle \cdot s = p_A \cdot \langle 1_A, g \rangle \cdot s = 1_A \cdot s$$

$$f \cdot s = p_B \cdot \langle 1_A, f \rangle \cdot s = p_B \cdot \langle 1_A, g \rangle \cdot s = g \cdot s$$

donde, pela propriedade universal do produto, vem que

$$\langle 1_A, f \rangle \cdot s = \langle 1_A, g \rangle \cdot s$$

Além disso, pela propriedade universal do produto fibrado, existe um único morfismo s' tal que $h \cdot s' = s$ e $l \cdot s' = s$. Como $e = h = l$, s' é também o único morfismo tal que $e \cdot s' = s$.

Portanto $e = ig(f, g)$.

Os resultados duais de 9.9 e 9.10 dão condições necessárias e suficientes para uma categoria ser cocompleta e finitamente cocompleta, respectivamente.