9.9 Teorema de existência de limites. *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria. As seguintes condições são equivalentes:*

(i) *$\mathcal{C}$ é completa;*

(ii) *$\mathcal{C}$ tem produtos e igualizadores.*

Dem.: Temos que (i) implica (ii) visto que produtos e igualizadores são exemplos de limites.

Reciprocamente, seja $\mathcal{D}$ uma categoria pequena, $\mathcal{C}$ uma categoria com produtos e igualizadores e $F : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ um functor. Consideremos o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd}
& & F(codu) \\
E \arrow[r, "e"] \arrow[dr, "\alpha_D"'] & \prod\limits_{D\in\mathcal{D}} F(D) \arrow[ur, "p_{D'}"] \arrow[r, dashed, shift left, "f"] \arrow[r, dashed, shift right, "g"'] \arrow[d, "p_D"] & \prod\limits_{(u:D\to D')\in\mathcal{D}} F(codu) \arrow[u, "p_{codu}"'] \arrow[d, "p_{codu}"] \\
& F(D) \arrow[r, "F(u)"'] & F(codu)
\end{tikzcd}$$

onde g é o único morfismo para o qual o quadrado inferior comuta, f é o único morfismo que torna comutativo o triângulo superior e $e = ig(f, g)$.

Vamos provar que $(E, (\alpha_D = p_D \cdot e : E \to F(D)_{D\in Obj\mathcal{D}})$ é um cone de F. De facto, para qualquer morfismo $u : D \to D'$ em $\mathcal{D}$ temos que

$$\begin{aligned}
F(u)\cdot\alpha_D &= F(u)\cdot p_D \cdot e \\
&= p_{codu}\cdot g\cdot e \\
&= p_{codu}\cdot f\cdot e \\
&= p_{D'}\cdot e \\
&= \alpha_{D'}
\end{aligned}$$

Vejamos agora que $(E, (\alpha_D = p_D \cdot e : E \to F(D)_{D\in Obj\mathcal{D}})$ é o cone limite de F. Se $\beta_D : C \to F(D)$ são as componentes de um cone de F então, pela propriedade universal do produto, existe um e um só $h : C \to \prod\limits_{D\in Obj\mathcal{D}} F(D)$ tal que $p_D \cdot h = \beta_D$.

Como

$$\begin{aligned}
p_{codu}\cdot(g\cdot h) &= F(u)\cdot p_D\cdot h \\
&= F(u)\cdot\beta_D \\
&= \beta_{D'} \\
&= p_{D'}\cdot h \\
&= p_{codu}\cdot(f\cdot h)
\end{aligned}$$

vem que $g \cdot h = f \cdot h$. Consequentemente, existe um único $t : C \to E$ tal que $e \cdot t = h$, visto que e é o igualizador do par (f, g). Portanto

$$\begin{array}{rcl} \alpha_D \cdot t & = & p_D \cdot e \cdot t \\ & = & p_D \cdot h \\ & = & \beta_D \end{array}$$

para todo o $D \in \mathcal{D}$.

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "e"] \arrow[drr, "\alpha_D"] & \prod\limits_{D \in \mathcal{D}} F(D) \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] \arrow[d, "p_D"] & \prod\limits_{U \in \mathcal{D}} F(codu) \\
C \arrow[u, dashed, "t"] \arrow[ur, dashed, "h"] \arrow[r, "\beta_D"'] & F(D) &
\end{tikzcd}$$

Suponhamos que $\alpha_D \cdot t' = \beta_D$ para todo o objecto D de $\mathcal{D}$. Então temos que

$$\begin{array}{c} \alpha_D \cdot t = \alpha_D \cdot t' \\ \Updownarrow \\ p_D \cdot e \cdot t = p_D \cdot e \cdot t' \\ \Downarrow(1) \\ e \cdot t = e \cdot t' \\ \Downarrow(2) \\ t = t' \end{array}$$

(1) pela propriedade universal do produto e (2) pela propriedade universal do igualizador.

Provámos assim que $(E, (\alpha_D)_{D \in Obj\mathcal{D}})$ é o limite de F em $\mathcal{C}$.

9.910 Teorema de existência de limites finitos. *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria. As seguintes condições são equivalentes:*

(i) $\mathcal{C}$ é finitamente completa;

(ii) $\mathcal{C}$ tem objecto terminal, produtos binários e igualizadores.

(iii) $\mathcal{C}$ tem objecto terminal e produtos fibrados.

Dem.:(i)$\Longrightarrow$(ii): o objecto terminal é o limite de

$$\begin{tikzcd} \emptyset \arrow[d, "F"] \\ \mathcal{C} \end{tikzcd}$$

o produto binário é o limite de

$$\begin{tikzcd} \bullet\ \bullet \arrow[d, "F"] \\ \mathcal{C} \end{tikzcd}$$

e igualizador é o limite de

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & \bullet \\ \arrow[d, "F"] & \\ \mathcal{C} & \end{tikzcd}$$

todos limites finitos cuja existência se toma como hipótese.

(ii)$\Longrightarrow$(i): utilizando 9.9 vem que, para qualquer $F : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$, tal que $Mor(\mathcal{D})$ e, por consequência, $Obj(\mathcal{D})$ são conjuntos finitos, existem

$$\prod_{D \in \mathcal{D}} F(D) \quad \text{e} \quad \prod_{u \in \mathcal{D}} F(codu)$$

assim como o co-igualizador de (f, g). Logo F tem limite em $\mathcal{C}$.

(ii)$\Longrightarrow$ (iii): De facto basta ver que o produto fibrado de dois morfismos $f : A \to B, g : C \to B$ é o igualizador do par de morfismos

$$\begin{tikzcd} A \times C \arrow[r, shift left, "g \cdot p_C"] \arrow[r, shift right, "f \cdot p_A"'] & B \end{tikzcd}$$

sendo $f' = p_C \cdot e$ e $g' = p_A \cdot e$

$$\begin{tikzcd} P \arrow[rr, "f'"] \arrow[dr, "e"] \arrow[dd, "g'"'] & & C \arrow[dd, "g"] \\ & A \times C \arrow[ur, "p_C"] \arrow[dl, "p_A"] & \\ A \arrow[rr, "f"'] & & B \end{tikzcd}$$

(iii)$\Longrightarrow$ (i): É fácil verificar que o produto de dois objectos $A, B \in \mathcal{C}$ é o produto fibrado dos morfismos de A e de B no objecto terminal

$$\begin{tikzcd} A \times B \arrow[r] \arrow[d] & V \arrow[d] \\ A \arrow[r] & 1 \end{tikzcd}$$

Resta provar que qualquer par de morfismos paralelos, $f, g : A \to b$, tem um igualizador em $\mathcal{C}$. Sejam $\overline{f} =< 1_A, f >$ e $\overline{g} =< 1_B, g >$, isto é, $\overline{f}$ é o único morfismos tal que $p_B \cdot \overline{f} = f$ e $p_A \cdot \overline{f} = 1_A$ e $\overline{g}$ é o único morfismos tal que $p_B \cdot \overline{g} = g$ e $p_A \cdot \overline{g} = 1_A$.

$$\begin{tikzcd}
& B \\
A \arrow[ur, shift left, "f"] \arrow[ur, shift right, "g"'] \arrow[r, shift left, "<1_A,f>"] \arrow[r, shift right, "<1_A,g>"'] \arrow[dr, "1_A"'] & A \times B \arrow[u, "p_B"'] \arrow[d, "p_A"] \\
& A
\end{tikzcd}$$

Por hipótese existe o produto fibrado de $(\overline{f}, \overline{g})$

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "l"] \arrow[d, "h"'] & A \arrow[d, "<1_A,g>"] \\
A \arrow[r, "<1_A,f>"'] & A \times B
\end{tikzcd}$$

Vejamos que $\mathbf{h = l}$:

$$\begin{aligned}
h &= p_A \cdot < 1_A, f > \cdot h \\
&= p_A \cdot < 1_A, g > \cdot l \\
&= l
\end{aligned}$$

Fazendo $\mathbf{e = h = l}$ concluímos que $e = ig(f, g)$ da seguinte forma

- $f \cdot e = g \cdot e$:

$$\begin{aligned}
f \cdot e &= f \cdot h \\
&= p_B \cdot < 1_A, f > \cdot h \\
&= p_B \cdot < 1_A, g > \cdot l \\
&= g \cdot l \\
&= g \cdot e
\end{aligned}$$

- e, se $f \cdot s = g \cdot s$, para algum morfismo s, então

$$1_A \cdot s = p_A \cdot < 1_A, f > \cdot s = p_A \cdot < 1_A, g > \cdot s = 1_A \cdot s$$

$$f \cdot s = p_B \cdot < 1_A, f > \cdot s = p_B \cdot < 1_A, g > \cdot s = g \cdot s$$

  donde, pela propriedade universal do produto, vem que

$$< 1_A, f > \cdot s = < 1_a, g > \cdot s$$

  Além disso, pela propriedade universal do produto fibrado, existe um único morfismo s' tal que $h \cdot s' = s$ e $l \cdot s' = s$. Como $e = h = l$, s' é também o único morfismo tal que $e \cdot s' = s$.

Portanto $e = ig(f, g)$.

Os resultados duais de 9.9 e 9.10 dão condições necessárias e suficientes para uma categoria ser cocompleta e finitamente cocompleta, respectivamente.