

Esquema de Resolução do
Exame de Teoria das Categorias de 07/07/2005

1. Na categoria $\mathcal{POConj}$, dos conjuntos parcialmente ordenados e das funções monótonas, descreva

- (a) Isomorfismo.
- (b) Monomorfismo.
- (c) Produtos e coprodutos binários.
- (d) O igualizador e o co-igualizador dos morfismos $u, v : (\mathbb{N}_0, \leq) \rightarrow (\mathbb{Z}, \leq)$, definidos por $u(n) = 3n$ e $v(n) = 0$, para $n \in \mathbb{N}_0$.
- (e) Um functor fiel e representável $G : \mathcal{POConj} \rightarrow \mathcal{Conj}$.

1. (a) $f : (X, \leq) \rightarrow (Y, \leq)$ é um isomorfismo se e só se existe um $g : (Y, \leq) \rightarrow (X, \leq)$ tal que $g \cdot f = 1_{(X, \leq)}$ e $f \cdot g = 1_{(Y, \leq)}$. Portanto f tem de ser uma função monótona e bijectiva cuja função inversa é também monótona, isto é $g \in \mathcal{POConj}$. Então, f é um isomorfismo se e só se é uma função bijectiva tal que

$$x \leq x' \iff f(x) \leq f(x').$$

(Explicar)

(b) $f : (X, \leq) \rightarrow (Y, \leq)$ é monomorfismo $\iff f$ é injectiva.

Se f é injectiva e $f \cdot u = f \cdot v$, para $u, v : (Z, \leq) \rightarrow (X, \leq)$, então para todo o $z \in Z$ temos que $f(u(z)) = f(v(z))$. Pela injectividade de f , vem que $u(z) = v(z)$, para $z \in Z$, o que significa que $u = v$.

Reciprocamente, se $f(x) = f(x')$ para $x, x' \in X$ então $f \cdot g = f \cdot h$ para $g, h : (\{*\}, \leq) \rightarrow (X, \leq)$ definidas por $g(*) = x$ e $h(*) = x'$ que são funções monótonas. Como f é monomorfismo vem que $g = h$. Portanto $x = x'$ e, consequentemente, f é injectiva.

(c) O produto binário de $(X, \leq)$ e $(Y, \leq)$ é $\{(X \times Y, \leq); p_X, p_Y\}$ onde

- $X \times Y$ é o produto cartesiano;
- $(x, y) \leq (x', y')$ se e só se $x \leq x'$ e $y \leq y'$;
- as projecções são as usuais: elas pertencem à categoria pois são monótonas $p_X : (X \times Y, \leq) \rightarrow (X, \leq)$ e $p_Y : (X \times Y, \leq) \rightarrow (Y, \leq)$.

O coproduto binário de $(X, \leq)$ e $(Y, \leq)$ é $\{(X \uplus Y, \leq); i_X, i_Y\}$ onde

- $(X \uplus Y)$ é a reunião disjunta;
- $(x, 0) \leq (x', 0)$ se e só se $x \leq x'$ em X , $(y, 1) \leq (y', 1)$ se e só se $y \leq y'$ e não existem outras relações entre os restantes elementos;
- as inclusões $i_X : X \rightarrow (X \uplus Y)$ e $i_Y : Y \rightarrow (X \uplus Y)$ são funções monótonas.

É fácil provar que satisfazem as propriedades universais correspondentes.

(d) O igualizador de (u, v) é o subconjunto $E = \{n | u(n) = v(n)\}$ de $\mathbb{N}_0$, com a ordem induzida, e a inclusão $i : (E, \leq) \rightarrow (\mathbb{N}_0, \leq)$. Temos que $3n = 0$ se e só se $n = 0$, portanto $(E, \leq) = (\{0\}, \leq)$. Qualquer função monótona $h : (X, \leq) \rightarrow (\mathbb{N}_0, \leq)$ tal que $u \cdot h = v \cdot h$ é a função constante nula. Portanto existe um e um só morfismo $h' : (X, \leq) \rightarrow (\{0\}, \leq)$ tal que $i \cdot h' = h$.

Qualquer função que co-igualize (u, v) é constante:

$$g \cdot u = g \cdot v \text{ para } g : (\mathbb{Z}, \leq) \rightarrow (Y, \leq)$$

vem que

$$g(3k) \leq g(3k+1) \leq g(3k+2) \leq g(3k+3) = g(3k) \text{ para todo } k \in \mathbb{Z}$$

logo, como a relação é anti-simétrica,

$$g(3k) = g(3k+1) = g(3k+2) \text{ para todo } k \in \mathbb{Z}$$

o que significa que g tem a mesma imagem para todo o $n \in \mathbb{Z}$. Portanto a função constante

$$c : (\mathbb{Z}, \leq) \rightarrow (\{*\}, \leq)$$

pertence a $\mathcal{POConj}$ porque é monótona, co-igualiza (u, v) e qualquer $g \in \mathcal{POConj}$ tal que $g \cdot u = g \cdot v$ se factoriza segundo c , $g' \cdot c = g$, para um único g' .

(e) O functor de esquecimento $U : \mathcal{POConj} \rightarrow \mathcal{Conj}$ é fiel e é representado por $(\{*\}, \leq)$. De facto, existe um isomorfismo natural $\alpha : U \rightarrow \mathcal{POConj}((\{*\}, \leq), -)$, sendo cada componente $\alpha_{(X, \leq)} : U(X, \leq) \rightarrow \mathcal{POConj}((\{*\}, \leq), (X, \leq))$ a função que faz corresponder a cada $x \in X$ o morfismo definido por $* \vdash x$. Prova-se que $\alpha_{(X, \leq)}$ é um isomorfismo (uma função bijectiva) para todo o $(X, \leq)$ e que a transformação é natural $(\mathcal{POConj}((\{*\}, \leq), f) \cdot \alpha_{(X, \leq)} = \alpha_{(Y, \leq)} \cdot U(f)$, para todo o $f : (X, \leq) \rightarrow (Y, \leq)$.

2. Defina e dê um exemplo de

- (a) categoria completa.
- (b) equivalência de categorias.
- (c) imersão de Yoneda.

Ver apontamentos.

3. Prove que

- (a) Existe uma categoria que tem como objectos os conjuntos, como morfismos $\alpha : A \rightarrow B$ as relações binárias, i.e. $\alpha \subseteq A \times B$, sendo a composição definida por

$$\beta \circ \alpha = \{(a, c) | (a, b) \in \alpha \text{ e } (b, c) \in \beta \text{ para algum } b \in B\},$$

para $\alpha \subseteq A \times B$ e $\beta \subseteq B \times C$.

- (b) Um functor fiel e pleno cria isomorfismos.
- (c) Sendo $U : \mathcal{Mon} \rightarrow \mathcal{Conj}$ o functor de esquecimento da categoria dos monóides na dos conjuntos, a função que a cada monóide M faz corresponder o produto cartesiano $U(M) \times U(M)$ é função de objectos de um functor $U \times U : \mathcal{Mon} \rightarrow \mathcal{Conj}$.
- (d) A multiplicação de qualquer monóide $M = (M, \cdot, e)$ define a componente $\sigma_M : U(M) \times U(M) \rightarrow U(M)$ de uma transformação natural $\sigma : U \times U \rightarrow U$.
- (e) O functor de esquecimento da categoria dos semigrupos na categoria dos conjuntos tem adjunto à esquerda. (Unidade? Co-unidade?).

(a) A composição é associativa:

Para $\alpha \subseteq A \times B$, $\beta \subseteq B \times C$ e $\gamma \subseteq C \times D$

$$\gamma \cdot (\beta \cdot \alpha) = \{(a, d) | (a, c) \in \beta \cdot \alpha \text{ e } (c, d) \in \gamma, \text{ para algum } c \in C\}$$

que é igual a

$$\delta = \{(a, d) | (a, b) \in \alpha, (b, c) \in \beta, (c, d) \in \gamma \text{ para algum } b \in B, c \in C\}$$

Analogamente se prova que $(\gamma \cdot \beta) \cdot \alpha = \delta$.

Para cada conjunto A a relação diagonal $1_A = \{(a, a) | a \in A\}$ é a identidade de A .

(b) Se $f : FA \rightarrow FB$ é isomorfismo em $\mathcal{B}$ para um functor fiel e pleno $F : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ então existe um único $f' \in \mathcal{A}$ tal que $F(f') = f$.

Analogamente, para o inverso g de f em $\mathcal{B}$ existe um único g' em $\mathcal{A}$ tal que $F(g') = g$.

Daqui se conclui que f' é um isomorfismo em $\mathcal{A}$ com inverso g' :

$$F(f' \cdot g') = F(f') \cdot F(g') = f \cdot g = 1_{FB} = F(1_B),$$

o que implica que $f' \cdot g' = 1_B$ porque F é fiel. De forma semelhante se conclui que $g' \cdot f' = 1_A$.

(c) Para cada morfismo de monóides $f : M \rightarrow M'$, define-se $U \times U(f) = Uf \times Uf$, portanto $Uf \times Uf(x, y) = (f(x), f(y))$. Verifica-se que

$$- U \times U(1_M) = 1_{UM \times UM}$$

$$- U \times U(g \cdot f) = U \times U(g) \cdot U \times U(f)$$

portanto que, desta forma, se define um functor.

(d) Dado $f : M \rightarrow M'$ em $\mathcal{Mon}$ temos que provar que

$$\sigma_{M'} \cdot U \times U(f) = Uf \cdot \sigma_M :$$

Para todo o par (x, y) ,

$$\sigma_{M'} \cdot Uf \times Uf(x, y) = f(x) \cdot f(y), \text{ e}$$

$$Uf \cdot \sigma_M(x, y) = f(x \cdot y),$$

que são iguais - $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$ - porque f é homomorfismo de monóides.

(e) Seja $U : \mathcal{SGrp} \rightarrow \mathcal{Conj}$ o functor de esquecimento. Para um conjunto X , denote-se por $F(X)$ o semigrupo das seqüências finitas e não vazias de elementos de X , as palavras não vazias do alfabeto X , para a operação de “concatenação”.

O morfismo $\eta_X : X \rightarrow U(F(X))$ que a cada elemento x faz corresponder a palavra $\langle x \rangle$ é universal de X para U .

Daí se conclui que existe uma única forma de definir um functor F adjunto à esquerda de U com unidade η . A co-unidade ϵ , para cada semigrupo $S = (S, \star)$, é o homomorfismo $\epsilon_S : FU(S) \rightarrow S$ definido por

$$\epsilon_S(\langle x_1 x_2 \cdots x_k \rangle) = x_1 \star x_2 \star \cdots \star x_k$$

.